ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.09.003
УДК 531.01

А.А. Мартынюк, Л.Н. Чернецкая, Ю.А. Мартынюк-Черниенко

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

О стабилизации движения неточных аффинных систем

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

В статье рассматриваются аффинные системы с неточными значениями параметров для стабилизации которых применяется линейное управление. Исследование устойчивости и ограниченности движения проводится прямым методом Ляпунова. Вводится понятие пары нелинейно стабилизируемой системы и устанавливаются достаточные условия устойчивости и ограниченности движения, включая случай устойчивости на конечном интервале времени.

Ключевые слова: *афинная система, нелинейная стабилизируемость, устойчивость, метод функций Ляпунова.*

В настоящей работе приведены некоторые подходы к проблеме стабилизации движения неточных аффинных систем (НАФ), основанные на идеях прямого метода Ляпунова. Указано, что при различных предположениях о динамических свойствах решений номинальной системы, метод функций Ляпунова остается эффективным инструментом решения проблемы устойчивости рассматриваемой аффинной системы.

Постановка задачи. Рассматривается система уравнений управляемого движения аффинной системы с неточными значениями параметров

$$dx/dt = F(t,x) + B(u(t) + g(t,x,\alpha)) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Состояние системы (1) представлено вектором $x(t) \in R^n$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, вектор-функция $F \in C(R_+ \times R^n, R^n)$, B — $n \times m$-постоянная матрица, $u \in U$ — вектор управления, $g \in C(R_+ \times R^n \times \Im, R^n)$ — вектор-функция нелинейных составляющих системы (1) с неточными значениями параметров, $\alpha \in \Im \subset R^d$, $d \geqslant 1$, — компактное множество в R^d. Предполагается, что движение системы (1) происходит под действием управления

$$u(t) = -Kx(t), \tag{3}$$

где K — постоянная матрица соответствующей размерности.

Далее будем рассматривать уравнения движения (1) при начальных условиях (2)

$$dx / dt = F(t, x(t)) - BKx(t) + Bg(t, x(t), \alpha) \tag{4}$$

при некоторых предположениях о паре (F, K) и функциях $g(t, x, \alpha)$, представляющих нелинейные члены и ''неточности'' в системе (4).

Установим условия устойчивости и ограниченности движения в системе (4).

Условия устойчивости и ограниченности. Напомним следующие понятия (см. [1]).

Определение 1. Аффинную систему (4) будем называть устойчивой, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом значении параметра $\alpha \in \Im$.

Определение 2. Решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, НАФ системы является ограниченным, если существует постоянная $\beta > 0$ такая, что $\|x(t)\| < \beta$ при всех $t \geqslant t_0$ при любом значении параметра $\alpha \in \Im$, где β может зависеть от каждого решения системы (4) и параметра $\alpha \in \Im$.

Определение 3. Пара (F, K) является нелинейно стабилизируемой если для системы уравнений

$$dx / dt = F(t, x) - BKx \tag{5}$$

существует локально большая определенно положительная и убывающая функция $V(t, x)$, локально липшицева по x с постоянной $M > 0$ такая, что

$$D^+V(t, x(t))\big|_{(5)} \leqslant -a_1 \|x\|^2, \tag{6}$$

где $a_1 > 0$ и $x(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Замечание 1. Если $F(t, x) = Ax$, где A — $n \times n$-постоянная матрица, то пара (A, K) является стабилизируемой в обычном смысле (см. [2]), так как условие (6) эквивалентно следующему:

$$\left\| e^{(A-BK)t} \right\| \leqslant Me^{-\beta t}, \tag{7}$$

где $M > 0$ и $\beta < 0$ — некоторые постоянные.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что для системы (4) выполняются следующие условия:*

1) управление (3) образует с вектор-функцией $F(t, x)$ нелинейную управляемую пару (F, K);

2) существуют постоянные $a_2 > 0$, $a_3 \geqslant 0$ такие, что

$$\|g(t, x, \alpha)\| \leqslant a_2 \|x\|^2 + a_3 \|x\| \tag{8}$$

при всех $(t, x, \alpha) \in R_+ \times R^n \times \Im$;

3) выполняется неравенство $a_1 - M\|B\|a_2 > 0$.

Тогда

а) если $a_3 = 0$, то НАФ система (4) устойчива;

б) если $a_3 \neq 0$ и оценка (8) выполняется при всех $(t, x) \in R_+ \times R^n$, то движение НАФ (4) ограничено.

Доказательство. Поскольку функция $V(t, x)$ определенно положительная и убывающая, найдутся постоянные $(c_1, c_2) > 0$ такие, что

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant c_2\|x\|^2 \tag{9}$$

при всех $(t,x) \in R_+ \times D$, $D \subseteq R^n$. Вдоль решений системы (4) верна оценка

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant -a_1\|x\|^2 + M\|B\|\|g(t,x,\alpha)\| \leqslant -(a_1 - M\|B\|a_2)\|x\|^2 + M\|B\|a_3\|x\|$$

при всех $(t,x) \in R_+ \times D$. Если $a_3 = 0$ и выполняется условие (3) теоремы 1, то

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant -(a_1 - M\|B\|a_2)\|x\|^2 \tag{10}$$

и, согласно теореме Ляпунова, состояние $x = 0$ асимптотически устойчиво. Поскольку оценка (10) выполняется при любом значении $\alpha \in \Im$, система (4) устойчива.

Если $a_3 \neq 0$, то

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant 0 \tag{11}$$

в области значений $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| > \dfrac{M\|B\|a_3}{a_1 - M\|B\|a_2}$. Согласно теореме 10.1 из монографии [1] решения $x(t,t_0,x_0)$ НАФ системы (4) равномерно ограничены и поскольку неравенство (11) выполняется при любом значении $\alpha \in \Im$, НАФ система (4) ограничена. Теорема 1 доказана.

Определение 4. Пара (F, K) является нелинейно стабилизируемой относительно функции $V(t,x)$, указанной в определении 3, если выполняется условие

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant -f_1(t)V(t,x(t)), \tag{12}$$

где функция $f_1(t) > 0$ непрерывна на любом конечном интервале.

Замечание 2. Условие (12) эквивалентно условию (6) при выполнении оценки (9) для функции $V(t,x)$.

Рассмотрим систему (4) при следующем предположении о вектор-функции неточностей:

H_1. Существуют постоянные $a_4 > 0$ и $a_5 \geqslant 0$ такие, что

$$\|g(t,x,\alpha)\| \leqslant a_4\|x\| + a_5 \tag{13}$$

при всех $(t,x,\alpha) \in R_+ \times D \times \Im$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для системы (4) построена функция $V(t,x)$ такая, что:*

1) выполняются оценки (9) и (12);

2) вектор-функция $g(t,x,\alpha)$ удовлетворяет оценке (13) при всех $(t,x,\alpha) \in R_+ \times D \times \Im$. Тогда

а) если $a_5 = 0$, то система (4) ограничена в области значений

$$x \in R^n : \|x\| > \frac{M\|B\|a_4}{f_1(t)c_2};$$

б) если $a_5 \neq 0$, *то система (4) ограничена в области значений* $x \in R^n$:

$$\|x\| > \frac{M\|B\|a_4 + (M^2\|B\|^2 a_4^2 + 4f_1(t)c_2M\|B\|a_5)^{1/2}}{2f_1(t)c_2}.$$

Доказательство. Для функции $V(t,x)$ вдоль решений $x(t,t_0,x_0)$ системы (4) верна оценка

$$D^+V(t,x(t))|_{(1.4)} \leqslant -f_1(t)V(t,x(t)) + M\|B\|\|g(t,x,\alpha)\| \leqslant -f_1(t)c_2\|x\|^2 +$$
$$+M\|B\|(a_4\|x\| + a_5) = -f_1(t)c_2\|x\|^2 + M\|B\|a_4\|x\| + M\|B\|a_5. \qquad (14)$$

Если $a_5 = 0$, то оценка (14) приводится к виду

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant -(f_1(t)c_2\|x\| - M\|B\|a_4)\|x\|.$$

Отсюда следует

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant 0$$

при всех $t \in R_+$ и $\|x\| > \dfrac{M\|B\|a_4}{f_1(t)c_2}$. В этом случае, согласно теореме 10.1 из монографии [1], движение НАФ (4) ограничено.

Если $a_5 \neq 0$, то при выполнении условия (б) теоремы 2 $D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant 0$ и, следовательно, вместе с условием (9) получаем условия ограниченности движения системы (4). Теорема 2 доказана.

Определение 5. Пара (F,K) является асимптотически нелинейно стабилизируемой, если существуют функция $V(t,x)$, указанная в определении 3, и непрерывная функция $\varphi_1(t)$ такие, что

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant \varphi_1(t)V(t,x(t)) \qquad (15)$$

при всех $(t,x) \in R_+ \times R^n$ и

$$\int_{t_0}^{t} \varphi_1(s)\,ds \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для системы (4) выполняются следующие условия:*

1) пара (F,K) *асимптотически нелинейно стабилизируемая;*

2) существует интегрируемая функция $\varphi_2(t)$ *такая, что*

$$\|g(t,x,\alpha)\| \leqslant \varphi_2(t)V^k(t,x(t)), \quad k > 1, \qquad 16)$$

при всех $(t,x,\alpha) \in R_+ \times R^n \times \Im$;

3) при всех $t \geqslant t_0$ *выполняется неравенство*

$$\left(1-(k-1)V_0^{k-1}M\|B\|\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)\exp\left((k-1)\int_{s}^{t}\varphi_1(\tau)\,d\tau\right)ds\right)^{\frac{1}{k-1}}>0\,.$$

Тогда нулевое решение НАФ системы (4) устойчиво.

Доказательство. Для функции $V(t,x)$ при выполнении условий (1), (2) теоремы 3 имеем

$$D^{+}V(t,x(t))\big|_{(4)}\leqslant\varphi_1(t)\,V(t,x(t))+M\|B\|\|g(t,x,\alpha)\|\leqslant$$
$$\leqslant\varphi_1(t)\,V(t,x(t))+M\|B\|\varphi_2(t)\,V^{k}(t,x(t))\,. \tag{17}$$

Обозначим $z(t)=V(t,x(t))$, где $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ — решение НАФ системы (4). Оценку (17) представим в виде

$$D^{+}z(t)\leqslant\varphi_1(t)\,z(t)+M\|B\|\varphi_2(t)z^{k}(t)\,, \tag{18}$$

откуда получим интегральное неравенство

$$z(t)\leqslant z(t_0)+\int_{t_0}^{t}(\varphi_1(s)\,z(s)+M\|B\|\varphi_2(s)z^{k}(s))\,ds\,. \tag{19}$$

Вычислим $V_I=\max\{V(t_0,x_0):x_0\in D\}$ и перепишем неравенство (19) в псевдолинейной форме

$$z(t)\leqslant V_I+\int_{t_0}^{t}(\varphi_1(s)+M\|B\|\varphi_2(s)z^{k-1}(s))\,z(s)\,ds\,.$$

Применяя к этому неравенству технику оценивания из работ [3, 4], получим оценку

$$V(t,x(t))\leqslant\frac{V_I\exp\left(\int_{t_0}^{t}\varphi_1(s)\,ds\right)}{\left(1-(k-1)V_I^{k-1}M\|B\|\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)\exp\left((k-1)\int_{s}^{t}\varphi_1(\tau)\,d\tau\right)ds\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \tag{20}$$

При выполнении условия (3) теоремы 3 оценка (20) верна при всех $t\in[t_0,\infty)$. Нетрудно показать, что движение системы (4) асимптотически устойчиво. Поскольку оценка (20) верна при всех $\alpha\in\mathfrak{I}$, имеет место устойчивость движения НАФ системы. Теорема 3 доказана.

Определение 6. Пара (F,K) является практически стабилизируемой, если существуют две функции: $V(t,x)$, указанная в определении 3, и функция $W(t,V)$, $W\in C(R_{+}\times R_{+},R)$, неубывающая по V такие, что

$$D^+V(t,x(t))|_{(4)} \leqslant W(t,V(t,x)), \tag{21}$$

а решение уравнения сравнения

$$dr/dt = W(t, r+\sigma(t)), \quad r(t_0) = r_0,$$

удовлетворяет определенному типу ограничений. Здесь $\sigma(t): R_+ \to R_+$ — ограниченная функция на любом конечном интервале $J \subseteq R_+$.

Лемма 1. *Если*

$$u(t) \leqslant \sigma(t) + \int_{t_0}^{t} W(s,u(s))ds + r(t_0),$$

где $\sigma(t)$ *и* $u(t)$ *— непрерывные функции на* $J \subset R_+$*, то*

$$u(t) \leqslant r(t,t_0,r_0) + \sigma(t),$$

где $r(t,t_0,r_0)$ *— максимальное решение уравнения.*

Доказательство этого утверждения имеется в работе [5].

Далее понадобятся следующие обозначения:

$$B(a) = \{x \in R^n: \ \|x\| < a\}, \quad \overline{B}(a) = \{x \in R^n: \ \|x\| \leqslant a\};$$

$$V_m^{\beta}(t) = \inf\{V(t,x): \ \|x\| = \beta\}, \quad V_M^{\beta}(t) = \{V(t,x): \ \|x\| = \beta\},$$

$$V^{\beta}(t) = \sup\{V(t,x): \ \|x\| < \beta\}, \quad V_{\delta}^{\beta}(t) = \sup\{V(t,x): \ x \in \overline{B}(\beta) \setminus B(\delta)\}, \quad \delta < \beta.$$

Будем предполагать, что функция $V(t,x)$ является локально липшицевой и для любой пары чисел $0 < \beta < \gamma$ выполняется оценка

$$|V(t,x) - V(t,y)| \geqslant M\|x-y\|, \quad M > 0,$$

при всех $t \in J$ и $(x,y) \in \overline{B}(\gamma) \setminus B(\beta)$. Как и выше, $x(t) = x(t,t_0,x_0\underline{)}$ — семейство решений управляемой системы (4), начинающееся в множестве $(t_0, x_0 \in [\underline{x}_0, x_0])$.

Определение 7. Аффинная система (4) устойчива относительно величин (β, γ, t_0, T), $0 < \beta \leqslant \gamma$, если для любой траектории $x(t)$ с начальными условиями $\|x(t_0)\| < \beta$ следует, что $\|x(t)\| < \gamma$ при всех $t \geqslant t_0$, $t \in J = [t_0, t_0 + T)$, и при любом $\alpha \in \Im$.

Лемма 2 (см. [6]). *Пусть*

1) пара (F,K) *является практически стабилизируемой и оценка (15) выполняется для значений* $(t,x) \in J \times (\overline{B}(\gamma) \setminus B(\beta))$*;*

2) существует интегрируемая на любом конечном интервале функция $\xi(t)$ *такая, что*

$$\|g(t,x,\alpha)\| \leqslant \xi(t) \tag{22}$$

при всех $(t,x,\alpha) \in J \times (\overline{B}(\gamma) \setminus B(\beta)) \times \Im$*;*

3) существует максимальное решение уравнения сравнения

$$dr/dt = W(t, r+\sigma(t)), \quad r(t_1) = r_1, \tag{23}$$

где $r_1 = V_M^{\|x_1\|}(t_1) - \sigma(t_1)$, *а* $\sigma(t) = M\|B\|\int\limits_{t_1}^{t}\xi(s)ds$, $t \in J$, $x_1 \in B(\gamma) \setminus B(\beta)$.

Тогда при всех $t \geqslant t_1$ *верна оценка*

$$V(t, x(t)) \leqslant r(t, t_1, r_1) + \sigma(t) \tag{24}$$

вдоль множества решений $x(t) \in \overline{B}(\gamma) \setminus B(\beta)$.

Доказательство. Для функции $V(t, x)$ в области значений $(t, x) \in J \times (B(\gamma) \setminus B(\beta))$ имеем

$$\begin{aligned} &D^+V(t, x(t))\big|_{(4)} \leqslant W(t, V(t, x(t))) + M\|B\|\|g(t, x, \alpha)\| \leqslant \\ &\leqslant W(t, V(t, x(t))) + M\|B\|\xi(t). \end{aligned} \tag{25}$$

Интегрируя неравенство (25) от t_1 до t, получим

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_1, x(t_1)) - \sigma(t_1) + \sigma(t) + \int\limits_{t_1}^{t} W(s, V(s, x(s)))ds. \tag{26}$$

Применяя к неравенству (26) лемму 1, получим оценку (24) при всех $t \geqslant t_1$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия леммы 2 и максимальное решение уравнения (23) с начальным условием* $r(t_0) = r_0 = V^{\beta}(t_0) - \sigma(t_0)$ *удовлетворяет оценке*

$$r(t, t_0, r_0) < V_m^{\gamma}(t) - \sigma(t) \tag{27}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Тогда управляемая система (4) робастно устойчива относительно величин (β, γ, t_0, T).

Доказательство. Пусть $x(t)$ — любое решение системы (4), начинающееся в множестве начальных значений (t_0, x_0). Предположим, что существует момент $t_1 \in J$ такой, что $\|x(t_1)\| = \gamma$. Согласно лемме 2 имеем оценку

$$V(t, x(t)) \leqslant r(t, t_0, r_0) + \sigma(t) \text{ при всех } t \geqslant t_0.$$

Отсюда, учитывая условие (27), получаем

$$V_m^{\gamma}(t_1) \leqslant V(t_1, x(t_1)) \leqslant (t_1, t_0, r_0) + \sigma(t_1) < V_m^{\gamma}(t_1).$$

Это неравенство противоречит существованию $t_1 \in J$ такого, что $\|x(t_1)\| = \gamma$. Учитывая, что условия теоремы 4 выполняются при всех $\alpha \in \mathfrak{I}$, приходим к заключению об устойчивости движения НАФ системы (4) относительно величин (β, γ, t_0, T). Теорема 4 доказана.

Заключительные замечания. Для системы уравнений (1) предложены достаточные условия устойчивости и ограниченности движения на основе метода функций Ляпунова в сочетании с методом интегральных неравенств и принципом сравнения. Ограничения “неточных нелинейностей” вида (8), (13), (16), (22) дополняют известные ограничения неточностей, которые рассмотрены в работах [7— 9] и др. Из их вида следует, что метод функций Ляпунова является универсальным методом анализа устойчивости движения рассматриваемого класса НАФ систем.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Yoshizava T. Stability Theory by Liapunov's Second Method. Tokyo: Math. Soc. Japan, 1966.
2. Zak S.H. On the stabilization and observation of non-linear uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1990. **AC 35**. P. 604—607.
3. Louartassi Y., El Houssine El Mazoudi, Noureddine E. A new generalization of lemma Gronwall–Bellman. *Appl. Math. Sci*. 2012. № 6(13). P. 621—628.
4. Martynyuk A. A. Novel Bounds for Solutions of Nonlinear Differential Equations. *Appl. Math*. 2015. № 6. P. 182—194.
5. Rao M.R.M. Upper and lower bounds of the norm of solutions of nonlinear Volterra integral equations. *Proc. Not. Acad. Sci*. (India). 1963. № 33. P. 263—266.
6. Tsokos C.P., Rao M.R.M. Finite time stability of control systems and integral inequalities. *Bul. Inst. Politech. Lasi*. 1969. **15**(**19**). № 1—2. P. 105—112.
7. Corless U., Leitmann G. Deterministic Control of Uncertain Systems via a Constructive Use of Lyapunov Stability Theory. Berlin: Springer, 1989.
8. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu. A. Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton: CRC Press, 2012. 296 p.
9. Blancini F. Lyapunov methods in robustness – an overview. Univ. di Udine, Italy (manuscript). 2016. 73 p.

Поступило в редакцию 19.06.2019

REFERENCES

1. Yoshizava, T. (1966). Stability Theory by Liapunov’s Second Method. Tokyo: Math. Soc. Japan.
2. Zak, S. H. (1990). On the stabilization and observation of non-linear uncertain dynamic systems. IEEE Trans. Automat. Control. AC 35. pp. 604-607.
3. Louartassi, Y., El Houssine El Mazoudi & Noureddine, E. (2012). A new generalization of lemma Gronwall–Bellman. Appl. Math. Sci., No. 6(13), pp. 621-628.
4. Martynyuk, A. A. (2015). Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. Appl. Math., No. 6, pp. 182-194.
5. Rao, M. R. M. (1963). Upper and lower bounds of the norm of solutions of nonlinear Volterra integral equations. Proc. Not. Acad. Sci. (India), No. 33, pp. 263-266.
6. Tsokos, C. P. &Rao, M. R. M. (1969). Finite time stability of control systems and integral inequalities. Bul. Inst. Politech. Lasi., 15(19). No. 1-2, pp. 105-112.
7. Corless, U. & Leitmann, G. (1989). Deterministic Control of Uncertain Systems via a Constructive Use of Lyapunov Stability Theory. Berlin: Springer.
8. Martynyuk, A. A. & Martynyuk-Chernienko, Yu. A. (2012). Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton: CRC Press.
9. Blancin,i F. (2016). Lyapunov methods in robustness — an overview. Univ. di Udine, Italy (manuscript). 73 p.

Received 19.06.2019

А.А.Мартинюк, Л.М.Чернецька,
Ю.А.Мартинюк-Чернієнко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ РУХУ НЕТОЧНИХ АФФІННИХ СИСТЕМ

Розглядаються афінні системи з неточними значеннями параметрів, для стабілізації яких застосовується лінійне керування. Дослідження стійкості і обмеженості руху проводиться прямим методом Ляпунова.

Вводиться поняття пари нелінійно стабілізованої системи і встановлюються достатні умови стійкості та обмеженості руху, включаючи випадок стійкості на скінченному інтервалі часу.

Ключові слова: *афінна система, нелінійна стабілізованість, стійкість, метод функцій Ляпунова.*

A.A. Martynyuk, L.N. Chernetskaya,
Yu.A. Martynyuk-Chernienko

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ON THE STABILIZATION OF THE MOTION
OF UNCERTAIN AFFINE SYSTEMS

The article discusses affine systems with uncertain parameter values, for the stabilization of which the linear control is applied. The study of the stability and boundedness of the motion is carried out by the direct Lyapunov method. The concept of a pair of nonlinearly stabilized systems is introduced, and the sufficient conditions for the stability and boundedness of the motion are established, including the case of stability over a finite time interval.

Keywords: *affine system, nonlinear stabilizability, stability, Lyapunov function method.*