

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.09.020>

УДК 539.3

**А.А. Каминский, Е.Е. Курчаков**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: fract@inmech.kiev.ua

## **О трансформации области пассивной деформации в нелинейном упругом анизотропном теле с трещиной**

*Представлено академиком НАН Украины В.Д. Кубенко*

*Исследована деформация нелинейного упругого ортотропного тела с трещиной нормального отрыва, у вершины которой имеется зона предразрушения. Рассмотрен случай плоского напряженного состояния. Соответствующая краевая задача поставлена в компонентах вектора перемещения. Для этого привлечены тензорно-линейные определяющие уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций, и конститутивные уравнения, связывающие компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения с компонентами вектора смещения относительно друг друга этих точек. Частные производные в основных уравнениях представлены через конечные разности. Введены понятия активной и пассивной деформации применительно к нелинейному упругому анизотропному телу. При решении краевой задачи использован метод дополнительных напряжений, предложенный авторами ранее. В результате решения краевой задачи обнаружено, что вокруг зоны предразрушения возникает область пассивной деформации. Повышение параметра нагрузки вызывает уменьшение напряжений в этой области. Изучены закономерности развития области пассивной деформации. В частности, установлены изменения ее размеров, а также формы в зависимости от параметра нагрузки. Выполнено сопоставление области пассивной деформации с зоной нелинейности, образующейся возле вершины трещины. Показаны различия между ними.*

**Ключевые слова:** *нелинейное упругое ортотропное тело, трещина нормального отрыва, зона предразрушения, конститутивные уравнения, область пассивной деформации.*

При постановке краевых задач механики разрушения надлежит учитывать зону предразрушения, образующуюся у вершины трещины. Однако это сопряжено с определенными трудностями. Избежать их можно упрощенно представляя зону предразрушения. В настоящей работе, следуя статьям [1–3], границы зоны предразрушения будем интерпретировать как поверхности раскрытого разреза, к которым приложены противоположные векторы напряжения. Компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения будем полагать зависящими от компонент вектора смещения относительно друг друга этих точек, и воспользуемся конститутивными уравнениями, установленными

ми в статье [4]. Решая краевую задачу, будем требовать, чтобы в конце зоны предразрушения соблюдался критерий прочности.

В работе [5] установлено, что с увеличением нагрузки на тело возрастает длина зоны предразрушения и уменьшаются напряжения по ее границам. Все это приводит к возникновению вокруг зоны предразрушения некоторой области, в которой совершается пассивная деформация.

Рассмотрим нелинейное упругое ортотропное тело малой толщины с трещиной нормального отрыва. Изучим трансформацию области пассивной деформации, происходящую при нагружении тела.

Ограничимся малыми деформациями. Соответствующую краевую задачу поставим в компонентах вектора перемещения.

**Определяющие уравнения.** Обратимся к следующим тензорно-линейным определяющим уравнениям, связывающим компоненты тензора напряжений  $\mathbf{S}$  с компонентами тензора деформаций  $\mathbf{D}$  [6]:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} + \frac{\Phi}{\Omega} \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1)$$

Здесь

$$\Phi = \sqrt{K - \frac{E^2}{Z}}; \quad \Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (2)$$

Инварианты  $E$ , а также  $Z$ ,  $K$  и  $\Xi$  таковы:

$$E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad K = F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (3)$$

Взаимно обратные тензоры четвертого ранга  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  характеризуют анизотропию.

При выводе уравнений (1) предполагалось, что для окрестности начального состояния известны зависимости всех компонент тензора  $\mathbf{D}$  от каждой компоненты тензора  $\mathbf{S}$ :

$$D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(S^{\gamma\delta}).$$

По этим зависимостям определены компоненты тензора  $\mathbf{F}$ :

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left. \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial S^{\gamma\delta}} \right|_{S^{\gamma\delta}=0}.$$

Заметим, что компоненты тензоров  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , как компоненты взаимно обратных тензоров четвертого ранга, должны удовлетворять формулам [7]

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\alpha\beta\epsilon\zeta} = \delta_{\gamma\delta}^{\epsilon\zeta}(\epsilon, \zeta). \quad (4)$$

В формулах (4) фигурируют символы Кронекера  $\delta_{\eta}^{\iota}$ :

$$\delta_{\eta}^{\iota} = \begin{cases} 1 & (\eta = \iota); \\ 0 & (\eta \neq \iota). \end{cases} \quad (5)$$

Важно отметить, что физическая интерпретация величин  $\Phi$  и  $\Omega$  [5] совпадает, по сути, с физической интерпретацией интенсивностей напряжений и деформаций, принадлежащей Хенки [8].

Если тело является изотропным, то компоненты тензора  $F$  могут быть выражены через две константы ( $\nu$  и  $\xi$ ) [7]:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \xi g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \quad (\gamma, \delta) \quad (6)$$

Подстановка в формулы (4) выражений (6) с учетом равенств (5) дает [9]

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\xi} \left( g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - \frac{\nu}{3\nu + \xi} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right) (\gamma, \delta). \quad (7)$$

Согласно выражениям (6) и (7), уравнения (1) преобразуются в уравнения Хенки—Надаи [10, 11], причем величины  $\Phi$  и  $\Omega$  переходят (с точностью до постоянных множителей) в интенсивности напряжений и деформаций соответственно.

В соответствии с началами термодинамики величины  $\Phi$  и  $\Omega$  связаны между собой [12]:

$$\Phi = \varphi(\Omega). \quad (8)$$

Из условия термодинамического равновесия вытекает, что функция  $\varphi(\Omega)$  должна быть возрастающей.

Представим функцию  $\varphi(\Omega)$  следующим образом:

$$\varphi(\Omega) = [1 - \tilde{\varphi}(\Omega)] \Omega. \quad (9)$$

С учетом формул (8) и (9) уравнения (1) принимают вид

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (10)$$

**Постановка краевой задачи.** Пусть система координат  $x^1, x^2, x^3$ , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (11)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещения  $u$ .

Представим компоненты тензора  $D$  через частные производные от компонент вектора  $u$  по координатам, для чего обратимся к соотношениям Коши [13]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta} (\varepsilon, \zeta). \quad (12)$$

Привлекая соотношения (12), запишем уравнения (10) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (13)$$

В силу соотношений (12) первый и четвертый из инвариантов (3) будут

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \quad (14)$$

Предположим, что тело является ортотропным, а главные направления совпадают с направлениями осей  $x^1, x^2, x^3$ .

Остановимся на случае плоского напряженного состояния, в котором

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2); \quad (15)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 3; \quad \alpha = 3, \beta = 1, 2; \quad \alpha = 3, \beta = 3). \quad (16)$$

Так как  $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$ , то, учитывая равенства (11) и первые четыре из равенств (16), на основании уравнений (13) установим, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \delta = 3; \quad \gamma = 3, \delta = 1, 2). \quad (17)$$

А учитывая равенства (11) и пятое из равенств (16), на основании уравнений (13) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{1}{G^{3333}} \left[ \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{E}{Z} \right) - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \quad (18)$$

Примем следующие обозначения:

$$G^{1111} \equiv \mu_{AA}, \quad G^{1212} \equiv \mu_{BB}, \quad G^{1122} \equiv \mu_{AD}, \quad G^{2222} \equiv \mu_{DD},$$

$$G^{1133} \equiv \mu_{AF}, \quad G^{2233} \equiv \mu_{DF}, \quad G^{3333} \equiv \mu_{FF};$$

$$G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} \equiv \check{\mu}_{AA}, \quad G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{AD},$$

$$G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} \equiv \check{\mu}_{DA}, \quad G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{DD}.$$

Согласно уравнениям (13), а также равенствам (11) и выражению (18), для компонент тензора  $S$ , не равных нулю, имеем

$$\begin{aligned} S^{11} &= \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right]; \\ S^{12} &= S^{21} = \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - \tilde{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \\ S^{22} &= \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В соответствии с равенствами (11) первый из инвариантов (14) примет вид

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (20)$$

Используя равенства (17), представим второй из инвариантов (14) в виде

$$\begin{aligned} \Xi = & \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \\ & + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ & + \left( 2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Обратимся к уравнениям Навье [13]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (22)$$

Допустим, что тело однородно.

Учитывая формулы (15), а также используя равенства (16) и уравнения (19), на основании уравнений (22) установим

$$\begin{aligned} \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^1} \right) &= Q^1; \\ \mu_{BB} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \right) + \check{\mu}_{DA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q^1 = & \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \check{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] \right\} + \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \check{\varphi}(\Omega) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right]; \\ Q^2 = & \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \check{\varphi}(\Omega) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \check{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

На границах тела, берегах трещины и границах зоны предразрушения зададим вектор напряжения  $\mathbf{P}$  с компонентами  $P^\alpha$ .

Обратимся к граничным условиям [13]:

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \quad (25)$$

где  $n_\beta$  — компоненты единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Используя равенства (16) и уравнения (19), на основании условий (25) получим

$$\begin{aligned} \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 &= P^1 + R^1; \\ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 &= P^2 + R^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R^1 &= \check{\varphi}(\Omega) \left\{ \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right\}; \\ R^2 &= \check{\varphi}(\Omega) \left\{ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left[ \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] n_2 \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси  $x^1, x^2$ .

Нагрузку на тело будем задавать симметрично относительно осей  $x^1, x^2$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь четвертой части тела, например, располагающейся в первом квадранте (рис. 1).

Для верхней и боковой границ рассматриваемой части тела  $n_1 = 1, n_2 = 0$  и  $n_1 = 0, n_2 = 1$  соответственно. А для верхнего берега трещины и верхней границы зоны предразрушения  $-n_1 = 1, n_2 = 0$ .

Будем считать, что только компонента  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе рассматриваемой части тела не равна нулю (см. рис. 1).

Введем вектор  $\mathbf{v}$ , изображающий смещение точек на верхней границе зоны предразрушения относительно точек на нижней границе зоны предразрушения.

Компоненты вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения необходимо представить, используя конститутивные уравнения, через компоненты вектора  $\mathbf{v}$ .

В записи через соответствующие квадратичные формы модуль  $|\mathbf{P}| \equiv P$  вектора  $\mathbf{P}$  и модуль  $|\mathbf{v}| \equiv v$  вектора  $\mathbf{v}$  будут

$$P = \sqrt{g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}; \quad v = \sqrt{g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}. \quad (28)$$

$$\text{Положим, что } P|_{v=0} = P_0.$$

Обратимся к таким конститутивным уравнениям [4]:

$$P^\alpha = P_0 [\tilde{f}(v) - 1] \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}, \quad (29)$$

где  $\tilde{f}(v)$  — функция, возрастающая в промежутке  $(0, \eta)$ .

Очевидно, что в данной задаче

$$v_1 > 0, \quad (30)$$

$$v_2 = v_3 = 0. \quad (31)$$

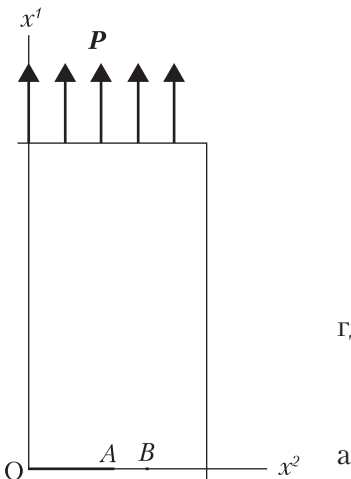


Рис. 1

Учитывая равенства (11), а также неравенство (30) и равенства (31), на основании второй из формул (28) получим

$$v = v_1. \quad (32)$$

Для компоненты  $v_1$  вектора  $\mathbf{v}$  имеем

$$v_1 = 2u_1. \quad (33)$$

Согласно уравнениям (29), равенствам (11), а также равенствам (31) и формуле (32), для компонент вектора  $\mathbf{P}$  будем иметь

$$P^1 = P_0 [\tilde{f}(v) - 1]; \quad (34)$$

$$P^2 = P^3 = 0. \quad (35)$$

Для решения краевой задачи потребуется еще одна группа уравнений. Из симметрии относительно осей  $x^1, x^2$  следуют такие уравнения:

$$\begin{aligned} u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) = 0; \quad u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) = 0; \\ u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) = 0; \quad u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Кроме того, из симметрии относительно оси  $x^2$  вытекает, что компонента  $u_1$  вектора  $\mathbf{u}$  в конце зоны предразрушения будет

$$u_1 = 0. \quad (37)$$

Выведем уравнение для компоненты  $u_2$  вектора  $\mathbf{u}$  в конце зоны предразрушения.

Выделим около конца зоны предразрушения точку  $(a^1, a^2)$ . Будем полагать, что  $u_2(x^1, x^2)$  — действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные (до второго порядка включительно) в окрестности точки  $(a^1, a^2)$ .

Составив кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням  $x^1 - a^1, x^2 - a^2$ , и записав координаты конца зоны предразрушения как  $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$ , будем иметь

$$\begin{aligned} -u_2(a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2) + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Решение краевой задачи получим численно. Для этого частные производные в основных уравнениях представим через конечные разности.

Теперь о понятиях активной и пассивной деформации.

В работе [14] деформация бесконечно малого элемента нелинейного изотропного тела, следующего уравнениям Хенки–Надаи [10, 11], названа активной, если интенсивность напряжений возрастает, и пассивной, если интенсивность напряжений убывает.

Отметим, что по своей структуре уравнения (1) идентичны уравнениям Хенки—Надаи [10, 11]. В частности, они содержат величины  $\Phi$  и  $\Omega$ , аналогичные интенсивностям напряжений и деформаций соответственно.

Ввиду этого, деформацию бесконечно малого элемента нелинейного анизотропного тела, следующего уравнениям (1), будем называть активной, если величина  $\Phi$  возрастает, и пассивной, если величина  $\Phi$  убывает.

При условии, что функция  $\varphi(\Omega)$  является возрастающей, величина  $\Phi$  будет следовать величине  $\Omega$ . Иными словами, величина  $\Phi$  будет возрастать или убывать тогда, когда возрастает или убывает величина  $\Omega$ .

Таким образом, деформацию бесконечно малого элемента нелинейного анизотропного тела, следующего уравнениям (1), можно также называть активной, если величина  $\Omega$  возрастает, и пассивной, если величина  $\Omega$  убывает.

В статье будут разобраны три варианта краевой задачи, различающиеся длиной зоны предразрушения. Для каждого из вариантов будет определена величина  $\Omega$ . Сравнивая найденные значения для первого и второго (первый случай), а также для второго и третьего (второй случай) вариантов, выявим точки, в которых величина  $\Omega$  не изменялась. Соединив эти точки, установим (в обоих случаях) границы области пассивной деформации.

**Числовой пример.** Используются данные для сплава Д16, приведенные в статье [6].

Компоненты тензора  $\mathbf{F}$  являются такими:

$$\begin{aligned} F_{1111} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & -F_{1122} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & -F_{1133} &= 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \\ F_{1212} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{1313} &= 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{2222} &= 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \\ -F_{2233} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{2323} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{3333} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \end{aligned}$$

Для второго из инвариантов (3) с учетом равенств (11) имеем:

$$Z = 0,250 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Компоненты тензора  $\mathbf{G}$  вычислены по формулам (4) (с учетом равенств (5)):

$$\begin{aligned} G^{1111} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1122} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1133} &= 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ G^{1212} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1313} &= 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{2222} &= 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ G^{2233} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{2323} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{3333} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}. \end{aligned}$$

Функция  $\tilde{\varphi}(\Omega)$  принята в виде [12]

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0, & \Omega \in [0, \nu]; \\ \frac{\Omega - \nu - a \ln\left(\frac{\Omega - \nu}{a} + 1\right)}{\Omega}, & \Omega \in [\nu, \infty). \end{cases} \quad (39)$$



Постоянные  $\upsilon$  и  $\psi$ , а также коэффициент  $a$  являются следующими:

$$\upsilon = 0,325 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}, \quad \psi = 9,350 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 0,11112866 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}.$$

В дальнейшем используем критерии нелинейности

$$\Omega = \upsilon \tag{40}$$

и прочности

$$\Omega = \psi, \tag{41}$$

установленные в статье [12].

Функция  $\tilde{f}(v)$  принята в виде [4]

$$\tilde{f}(v) = b_{k_1} v^{k_1} + b_{k_2} v^{k_2}, \tag{42}$$

где  $k_1, k_2$  — целые числа ( $1 < k_1 < k_2$ ).

Коэффициенты  $b_{k_1}, b_{k_2}$  таковы:

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \tag{43}$$

Здесь  $m = -\frac{d}{dv} \tilde{f}(v) \Big|_{v=\eta}$ .

Принято, что

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3; \quad m = -0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; \quad \eta = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

По формулам (43) вычислены коэффициенты  $b_{k_1}, b_{k_2}$ :

$$b_{k_1} = 0,08 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}; \quad b_{k_2} = -0,008 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Размеры рассматриваемой части тела по осям  $x^1, x^2$ , обозначенные  $s_{(1)}, s_{(2)}$ , соответственно, приняты такими:

$$s_{(1)} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad s_{(2)} = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Координата  $x^2$  начала зоны предразрушения (точки А) записана как  $x_f^2$ , а конца зоны предразрушения (точки В) — как  $x_g^2$  (см. рис. 1).

Были заданы

$$x_f^2 = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_g^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad -\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Итак, длина трещины,  $l_R = x_f^2$ , была равна  $1,50 \cdot 10^{-2}$  м, а длина зоны предразрушения,  $l_S = x_g^2 - x_f^2$ , составляла  $0,08 \cdot 10^{-2}$  м для первого варианта,  $0,10 \cdot 10^{-2}$  м для второго варианта и  $0,12 \cdot 10^{-2}$  м для третьего варианта.

Компонента  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе рассматриваемой части тела выражена через параметр  $\omega$ :  $P^1 = \omega$ .

Решая краевую задачу, следовало определить параметр  $\omega$  (из условия, что в точке  $B$  соблюдается критерий (41)).

При решении краевой задачи принимали во внимание, что в точке  $B$  компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  должна удовлетворять равенству

$$S_B^{11} = P_o. \quad (44)$$

Изначально величину  $P_o$  и параметр  $\omega$  задавали.

Затем, используя уравнения (23), (26), уравнение (34) и первое из равенств (35), а также уравнения (36), (37) и (38), отыскивали компоненты  $u_1, u_2$ . Делали это методом последовательных приближений, изложенным в статье [1]. В первом приближении полагали, что  $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$  и  $\tilde{f}(v) = 0$ . В каждом последующем приближении, одном из 89-ти приближений, значения функции  $\tilde{\varphi}(\Omega)$ , величин  $Q^1, Q^2$  и  $R^1, R^2$ , а также функции  $\tilde{f}(v)$  устанавливали на основе значений компонент  $u_1, u_2$ , полученных в предыдущем приближении. Для этого привлекали формулу (39), вторую из формул (2), инварианты (20), (21), выражение (18), формулы (24), (27), а также уравнение (34), формулы (42), (32) и (33).

После этого по первому из уравнений (14) вычисляли компоненту  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точке  $B$ . Если она не удовлетворяла равенству (44), то значение  $P_o$  корректировали и всю процедуру повторяли.

Наконец, проверяли соблюдение критерия (41) в точке  $B$ . Если это не имело места, то параметр  $\omega$  изменяли.

**Анализ полученных результатов.** В результате решения краевой задачи определен параметр  $\omega$  (табл. 1). Из табл. 1 явствует, что с повышением параметра  $\omega$  увеличивается длина зоны предразрушения.

В результате решения краевой задачи определены также компонента  $u_1$  вектора  $\mathbf{u}$  и компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точках, принадлежащих верхней границе зоны предразрушения (для нее  $x^1 = 0$ ). В табл. 2 приведены значения  $u_1 \cdot 10^5$  м и  $S^{11} \cdot 10^{-8}$  Па (верхние и нижние значения соответственно).

Согласно табл. 2, с повышением параметра  $\omega$  увеличивается компонента  $u_1$  вектора  $\mathbf{u}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения. При этом, в соответствии с формулами

Таблица 1

$l_s \cdot 10^2, \text{ м}$	$\omega \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$
0,08	5,8463
0,10	5,9037
0,12	5,9098

Таблица 2

$\omega \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$	$x^2 \cdot 10^5, \text{ м}$						
	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62
5,8463	1,5218 0,9701	1,1935 1,3075	0,8164 1,6452	0,4379 1,8893	0 2,0026		
5,9037	1,7951 0,6795	1,5104 0,9831	1,1819 1,3200	0,8118 1,6503	0,4356 1,8919	0 2,0046	
5,9098	2,0311 0,4345	1,7908 0,6858	1,5063 0,9897	1,1808 1,3238	0,8110 1,6539	0,4352 1,8947	0 2,0087

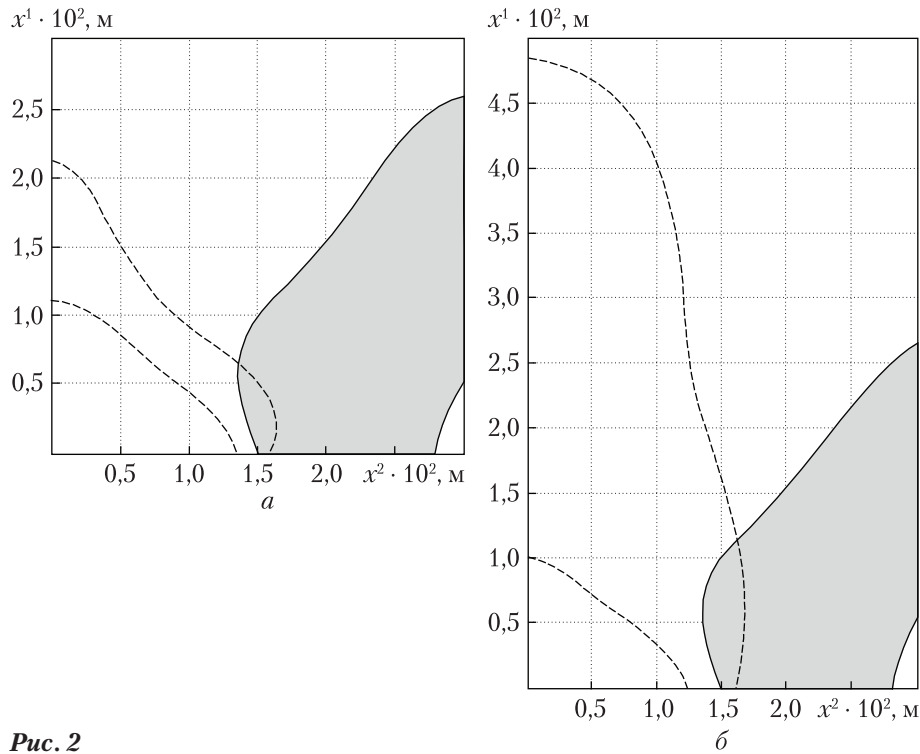


Рис. 2

(32) и (33), увеличивается модуль  $v$  вектора  $\mathbf{v}$ . Поэтому, в силу уравнения (34), увеличивается, оставаясь отрицательной, компонента  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$ . А это означает, что уменьшается компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения. Однако компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в конце зоны предразрушения не только не уменьшается, но даже несколько увеличивается.

Для всех вариантов в точках с координатами  $x^1 = ih$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ),  $x^2 = jh$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) ( $h = 0,02 \cdot 10^{-2}$  м) определялась величина  $\Omega$ .

Сравнение найденных значений для первого и второго, а также для второго и третьего вариантов позволило выявить точки, в которых величина  $\Omega$  оставалась неизменной при повышении параметра  $w$ . По этим точкам построены границы области пассивной деформации. Они изображены штриховыми линиями на рис. 2, а (первый случай) и б (второй случай). Как видно, в первом и во втором случаях область пассивной деформации получилась различной.

С повышением параметра  $w$  происходило расширение области пассивной деформации в направлениях осей  $x^1, x^2$ . Так, наибольший размер области пассивной деформации в направлении оси  $x^1$  в первом и во втором случаях составил  $2,12 \cdot 10^{-2}$  м и  $4,84 \cdot 10^{-2}$  м соответственно. Вместе с тем, наибольший размер области пассивной деформации в направлении оси  $x^2$  в первом и во втором случаях оказался меньшим, равным  $1,62 \cdot 10^{-2}$  м и  $1,64 \cdot 10^{-2}$  м соответственно.

Интересно, что при повышении параметра  $w$  с  $5,9037 \cdot 10^7$  Па до  $5,9098 \cdot 10^7$  Па нижняя граница области пассивной деформации, в отличие от ее верхней границы, не претерпела значительных изменений. Она лишь несколько сместилась к началу координат.

Для второго и третьего вариантов выявлены точки, в которых величина  $\Omega = 0,325 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$ , т. е. соблюдался критерий (40). Эти точки соединены линиями, являющимися границами зоны нелинейности. Сама зона нелинейности изображена в виде затемненной области на рис. 2, а (второй вариант) и 2, б (третий вариант).

Появившись возле вершины трещины, зона нелинейности почти полностью вышла на боковую границу рассматриваемой части тела. Исключением стал лишь малый участок этой границы напротив трещины.

Сопоставляя область пассивной деформации с зоной нелинейности, можно констатировать следующее. По форме область пассивной деформации напоминает зону нелинейности. Но есть между ними и значительные различия. Если область пассивной деформации выходит на ось  $x^1$ , то зона нелинейности — на боковую границу рассматриваемой части тела. Заслуживает внимания и то, что размеры зоны нелинейности слабо зависят от параметра  $w$ . В частности, ее площадь с повышением параметра  $w$  лишь незначительно увеличивается.

*Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы “Поддержка приоритетных направлений научных исследований” (КПКВК 6541230).*

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Каминский А.А., Курчаков Е.Е. Об эволюции зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном анизотропном теле. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 10. С. 44–55. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.044>
2. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A Semi-Analytical Solution Method for Problems of Cohesive Fracture and Some of Its Applications. *Int. J. of Fracture.* 2018. **212**, № 1. P. 113–121.
3. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O., Kononchuk O.P. Determination of Crack Opening Displacement and Critical Load Parameter within a Cohesive Zone Model. *Cont. Mech. and Thermodynamics.* 2019. **31**, № 2. P. 569–586.
4. Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 5. С. 25–33. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025>
5. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Fracture Process Zone at the Tip of a Mode I Crack in a Nonlinear Elastic Orthotropic Material. *Int. Appl. Mech.* 2019. **55**, № 1. P. 23–40.
6. Kurchakov E.E. Stress-Strain Relation for Nonlinear Anisotropic Medium. *Sov. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 9. P. 803–807.
7. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E., Gavrilov G.V. Study of the Plastic Zone near a Crack in an Anisotropic Body. *Int. Appl. Mech.* 2006. **42**, № 7. P. 749–764.
8. Хенки Х. Развитие и современное состояние теории пластичности. *Прикл. математика и механика.* 1940. **4**, № 3. С. 31–36.
9. Kurchakov E.E., Gavrilov G.V. Formation of the Plastic Zone in an Anisotropic Body with a Crack. *Int. Appl. Mech.* 2008. **44**, № 9. P. 982–997.
10. Hencky H. Zur Theorie plastische Deformationen. Proc. 1-st Int. Congress Appl. Mech. Delft, 1924. P. 312–317.
11. Nadai A. Plasticity. New York – London: McGraw–Hill, 1931. P. 186.
12. Курчаков Е.Е. Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 9. С. 46–53. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.09.046>
13. Love A. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. P. 674.
14. Ильюшин А.А. Пластичность. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. 376 с.

Поступило в редакцию 06.06.2019

REFERENCES

1. Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2018). On Evolution of Fracture Process Zone near the Crack Tip in Nonlinear Anisotropic Body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 10, pp. 44-55 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.044>
2. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2018). A Semi-Analytical Solution Method for Problems of Cohesive Fracture and Some of Its Applications. *Int. J. of Fracture*, 212, No. 1, pp. 113-121.
3. Selivanov, M. F., Chornoivan, Y. O. & Kononchuk, O. P. (2019). Determination of Crack Opening Displacement and Critical Load Parameter within a Cohesive Zone Model. *Cont. Mech. and Thermodynamics*, 31, No. 2, pp. 569-586.
4. Bogdanova, O. S., Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2017). On the Fracture Process Zone near the Front of an Arbitrary Crack in a Solid. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 25-33 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025>
5. Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2019). Fracture Process Zone at the Tip of a Mode I Crack in a Nonlinear Elastic Orthotropic Material. *Int. Appl. Mech.*, 55, No. 1, pp. 23-40.
6. Kurchakov, E. E. (1979). Stress-Strain Relation for Nonlinear Anisotropic Medium. *Sov. Appl. Mech.*, 15, No. 9, pp. 803-807.
7. Kaminsky, A. A., Kurchakov, E. E. & Gavrilov, G. V. (2006). Study of the Plastic Zone near a Crack in an Anisotropic Body. *Int. Appl. Mech.*, 42, No. 7, pp. 749-764.
8. Hencky, H. (1940). Development and Present State of the Theory of Plasticity. *Prikl. Mat. i Mekh.*, 4, No. 3, pp. 31-36 (in Russian).
9. Kurchakov, E. E. & Gavrilov, G. V. (2008). Formation of the Plastic Zone in an Anisotropic Body with a Crack. *Int. Appl. Mech.*, 44, No. 9, pp. 982-997.
10. Hencky, H. (1924). *Zur Theorie plastische Deformationen*. Proc. 1-st Int. Congress Appl. Mech. Delft.
11. Nadai, A. (1931). *Plasticity*. New York—London: McGraw—Hill.
12. Kurchakov, E. E. (2015). Thermodynamic Verification of Constitutive Equations for a Nonlinear Anisotropic Body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 9, pp. 46-53 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.09.046>
13. Love, A. (1927). *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Univ. Press.
14. Ilyushin, A. A. (1948). *Plasticity*. Moscow—Leningrad: OGIZ (in Russian).

Received 06.06.2019

A.O. Камінський, Є.Є. Курчаков

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: fract@inmech.kiev.ua

ПРО ТРАНСФОРМАЦІЮ ОБЛАСТІ ПАСИВНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ  
В НЕЛІНІЙНОМУ ПРУЖНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ З ТРІЩИНОЮ

Досліджено деформацію нелінійного пружного ортотропного тіла із тріщиною нормального відриву, у вершині якої є зона передруйнування. Розглянуто випадок плоского напруженого стану. Відповідну крайову задачу поставлено в компонентах вектора переміщення. Для цього залучено тензорно-лінійні визначальні рівняння, які зв'язують компоненти тензора напружень з компонентами тензора деформацій, та конститутивні рівняння, які зв'язують компоненти векторів напруження в точках на протилежних межах зони передруйнування з компонентами вектора зміщення відносно одна одної цих точок. Частинні похідні в основних рівняннях представлено через скінченні різниці. Введено поняття активної й пасивної деформації стосовно до нелінійного пружного анізотропного тіла. При розв'язанні крайової задачі використано метод додаткових напружень, запропонований авторами раніше. В результаті розв'язання крайової задачі виявлено, що навколо зони передруйнування виникає область пасивної деформації. Підвищення параметра навантаження спричиняє зменшення напружень в цій області. Вивчено закономірності розвитку області пасивної деформації. Зокрема, встановлено зміни її розмірів, а також форми в залежності від параметра навантаження. Здійснено порівняння області пасивної деформації із зоною нелінійності, що утворюється біля вершини тріщини. Показано відмінності між ними.

**Ключові слова:** нелінійне пружне ортотропне тіло, тріщина нормального відриву, зона передруйнування, конститутивні рівняння, область пасивної деформації.

A.A. Kaminsky, E.E. Kurchakov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: fract@inmech.kiev.ua

ON THE TRANSFORMATION OF THE PASSIVE DEFORMATION AREA  
IN A NONLINEAR ELASTIC ANISOTROPIC BODY WITH CRACK

The deformation of a nonlinear elastic orthotropic thin plate with a crack of normal separation is considered. It is assumed that there is a prefracture zone in the crack tip. It is assumed that the plane stress conditions are applicable. The boundary-value problem for the plate is stated in terms of the displacement vector. Governing equations are stated to describe the dependence between the stress and the strain tensors. Constitutive equations are used as an interlink between components of the stress vector at the points on the opposite faces of the prefracture zone and components of the mutual displacement vector for these points. The partial derivatives in the equations are transformed into the finite differences using the mesh discretization. Terms “active” and “passive” are introduced for the deformation according to its action on the nonlinear elastic anisotropic body. The problem is solved using the additional stress method that was earlier proposed by the authors of this work. The boundary-value problem solution allows concluding that a passive deformation area appears around the prefracture zone. Stresses in this area diminish, as the loading parameter grows. An analysis is given for the extents of the passive deformation area. In particular, it is investigated how it changes its dimensions and form depending on the loading parameter. A comparison is made between the passive deformation area and the nonlinearity area around the crack tip. It is shown that there are some differences between them.

**Keywords:** *nonlinear elastic orthotropic body, crack of normal separation, prefracture zone, constitutive equations, passive deformation area.*