ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.015
УДК 519.8

Т.Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова, Т.І. Сергієнко

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
E-mail: lebedevatt@gmail.com, nvsemenova.meta.ua

Стійкість за векторним критерієм задачі частково цілочислової оптимізації з квадратичними критеріальними функціями

Представлено академіком НАН України І.В.Сергієнком

Стаття присвячена вивченню якісних характеристик різних типів стійкості векторних задач частково цілочислової оптимізації, а саме, виявленню умов, за яких множина Парето-оптимальних розв'язків задачі має деяку наперед задану властивість інваріантності по відношенню до малих змін вхідних даних початкової задачі. Для векторної задачі частково цілочислової оптимізації з квадратичними критеріальними функціями вивчені питання стійкості щодо збурень вхідних даних її векторного критерію. Знайдено необхідні і достатні умови стійкості трьох типів для задачі пошуку Парето-оптимальних розв'язків. Тобто визначено умови, за яких гарантується, що достатньо малі зміни у вхідних даних векторного критерію: 1) не приводять до появи нових Парето-оптимальних розв'язків; 2) зберігають усі Парето-оптимальні розв'язки задачі і допускають появу нових; 3) не змінюють множину Парето-оптимальних розв'язків початкової задачі.

Ключові слова: *задача частково цілочислової оптимізації, векторний критерій, стійкість, Парето-оптимальні розв'язки, збурення вхідних даних.*

Розглянемо питання стійкості відносно збурень вхідних даних для векторного критерію частково цілочислової оптимізаційної задачі такого вигляду:

$$Q(F,X): \max\{F(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

де $X \subset R^{n_1} \times Z^{n_2} \subset R^n$, $n_1 + n_2 = n$, $1 \leqslant n_1 < n$, R^n — n-вимірний дійсний простір; Z^{n_2} — множина всіх цілочислових векторів з R^{n_2}; $x = (y, z) \in R^{n_1} \times Z^{n_2}$, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_\ell(x))$, $\ell \geqslant 2$; $f_i : R^{n_1} \times Z^{n_2} \to R^1$ — квадратичні функції вигляду $f_i(x) = \langle x, D_i x\rangle + \langle c_i, x\rangle$, $D_i \in R^{n\times n}$, $c_i \in R^n$, $i \in N_\ell = \{1,\ldots,l\}$; $X \neq \varnothing$. Вважаємо, що задача (1) полягає у пошуку елементів множини Парето-оптимальних розв'язків

$$P(F,X) = \{x \in X \mid \pi(x,F,X) = \varnothing\},$$

Цитування: Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість за векторним критерієм задачі частково цілочислової оптимізації з квадратичними критеріальними функціями. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 10. С. 15—21. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.015

де $\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geqslant F(x),\ \ F(y) \neq F(x)\}$.

Множина Парето $P(F, X)$ називається *зовнішньо стійкою*, якщо для будь-якого $x \in X \setminus P(F, X)$ знайдеться такий розв'язок $x' \in P(F, X)$, для якого $F(x') \geqslant F(x)$. Згідно з [1] скінченність непорожньої множини X є достатньою умовою існування Парето-оптимальних розв'язків векторної задачі і зовнішньої стійкості множини Парето. Проте за умови нескінченності допустимої області X множина Парето може не бути зовнішньо стійкою і, взагалі, може бути порожньою. Нагадаємо, що за теоремою В.В. Подиновського [1] множина Парето є непорожньою і зовнішньо стійкою, якщо допустима множина X задачі є непорожнім компактом, тобто обмеженою і замкненою, а вектор-функція задачі — напівнеперервною зверху (покомпонентно) на X.

Введемо до розгляду також множину оптимальних за Слейтером розв'язків

$$S\ell(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\},\ \text{де}\ \sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$$

і множину розв'язків, оптимальних за Смейлом,

$$Sm(F, X) = \{x \in X \mid \eta(x, F, X) = \varnothing\},\ \text{де}\ \eta(x, F, X) = \{y \in X \mid y \neq x,\ F(y) \geqslant F(x)\}.$$

Легко бачити, що

$$Sm(F, X) \subset P(F, X) \subset S\ell(F, X) \tag{2}$$

і $\forall x \in X\ \ \sigma(x, F, X) \subset \pi(x, F, X) \subset \eta(x, F, X)$.

З відомого результату [1] про замкненість множини оптимальних за Слейтером розв'язків задачі оптимізації неперервної вектор-функції на замкненій допустимій множині випливає наступне твердження, яке стосується задачі (1) і надалі буде нам корисним.

Твердження 1. Нехай допустима множина X задачі $Q(F, X)$ є замкненою. Тоді множина Слейтера $S\ell(F, X)$ є також замкненою.

Зазначимо, що множини Парето та Смейла для задачі $Q(F, X)$ частково цілочислової оптимізації можуть бути і не замкнені навіть за умов замкненості допустимої множини X. Відповідні приклади для задачі з лінійними частковими критеріальними функціями наведені в роботі [2].

Для задачі (1) за вхідні дані, що можуть підлягати збуренню, розглядатимемо коефіцієнти векторного критерію F. Позначимо $D = (D_1, \ldots, D_\ell) \in R^{n \times n \times \ell}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell \times n}$, де $(c_{i1}, \ldots, c_{in}) = c_i$, $i \in N_\ell$. Пара $u = (D, C)$ є елементом простору $U \subset R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$ всіх вхідних даних задачі, що стосуються векторного критерію. Поряд з введеними вище позначеннями $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\ell(x))$ для векторної цільової функції і окремих часткових критеріїв задачі $Q(F, X)$ будемо користуватися, коли це необхідно, й позначеннями $F_u(x) = (f_1^u(x), f_2^u(x), \ldots, f_\ell^u(x))$, уточнюючими, який саме елемент u з простору вхідних даних U відповідає задачі, що розглядається.

Для будь-якого натурального числа q дійсний векторний простір R^q будемо розглядати як нормований. Норму в R^q задамо формулою

$$\|z\| = \sum_{i \in N_q} |z_i|, \tag{3}$$

де $z=(z_1,\dots,z_q)\in R^q$. Під нормою деякої матриці $B=[b_{ij}]_{m\times k}\in R^{m\times k}$ будемо розуміти норму вектора $(b_{11},b_{12},\dots,b_{mk})$. Нагадаємо [3], що у скінченно-вимірному просторі R^q будь-які дві норми $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$ еквівалентні, тобто існують такі числа $\alpha>0$ і $\beta>0$, що $\forall z\in R^q$ виконуються нерівності $\alpha\|z\|^{(1)}\leqslant\|z\|^{(2)}\leqslant\beta\|z\|^{(1)}$. Враховуючи цю еквівалентність, зауважимо, що викладені далі результати справедливі і для інших норм у скінченно-вимірних просторах.

Для пари $u=(D,C)\in U$ і довільного числа $\delta>0$ визначимо множину збурених вхідних даних

$$O_\delta(u)=\left\{u(\delta)\in U\,\middle|\,\max_{i\in N_\ell}\|D_i(\delta)-D_i\|<\delta,\ \|C(\delta)-C\|<\delta\right\},$$

де $u(\delta)=(D(\delta),C(\delta))$, $D(\delta)=(D_1(\delta),\dots,D_\ell(\delta))$, $D_i(\delta)\in R^{n\times n}$, $i\in N_\ell$, $C(\delta)=[c_{ij}(\delta)]\in R^{\ell\times n}$. Розглянемо таку збурену за векторним критерієм задачу:

$$Q(F_{u(\delta)},X):\max\{F_{u(\delta)}(x)\,|\,x\in X\},$$

де $u(\delta)\in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x)=(f_1^{u(\delta)}(x),f_2^{u(\delta)}(x),\dots,f_\ell^{u(\delta)}(x))$, $f_i^{u(\delta)}(x)=\langle x,D_i(\delta)x\rangle+\langle c_i(\delta),x\rangle$, $c_i(\delta)=(c_{i1}(\delta),\dots,c_{in}(\delta))$, $i\in N_\ell$.

Визначимо різні типи стійкості [4] відносно збурень вхідних даних для векторного критерію частково цілочислових задач вигляду $Q(F,X)$, та поширивши на цей клас задач поняття T_1-, T_2-, T_3-, T_4- і T_5-стійкості за векторним критерієм, введені нами в роботі [5] для повністю цілочислових задач векторної оптимізації з квадратичними частковими критеріями.

Задачу $Q(F_u,X)$ назвемо T_1*-стійкою за векторним критерієм*, якщо існує таке число $\delta>0$, що для будь-якого збуреного набору вхідних даних задачі $u(\delta)\in O_\delta(u)$ справджується нерівність

$$P(F_u,X)\cap P(F_{u(\delta)},X)\neq\varnothing.$$

Задачу $Q(F_u,X)$ назвемо T_2*-стійкою за векторним критерієм*, якщо існує таке число $\delta>0$, для якого справедлива нерівність

$$\bigcap_{u(\delta)\in O_\delta(u)}P(F_{u(\delta)},X)\neq\varnothing$$

Задачу $Q(F_u,X)$ назвемо T_3*-стійкою (T_4-стійкою, T_5-стійкою) за векторним критерієм*, якщо $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, таке, що $\forall u(\delta)\in O_\delta(u)$ виконується умова

$$P(F_u,X)\cap O_\varepsilon(x(\delta))\neq\varnothing\quad\forall x(\delta)\in P(F_{u(\delta)},X)\tag{4}$$

(відповідно умова

$$P(F_{u(\delta)},X)\cap O_\varepsilon(x)\neq\varnothing\quad\forall x\in P(F_u,X)\tag{5}$$

для T_4-стійкості та обидві умови (4) і (5) для T_5-стійкості), де $O_\varepsilon(x)=\{x'\in R^n\,|\,\|x-x'\|<\varepsilon\}$ $\forall x\in R^n$.

Зазначимо, що умова (4) рівносильна включенню $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$, а умова (5) — $P(F_u, X) \subset O_\varepsilon(P(F_{u(\delta)}, X))$,
де $O_\varepsilon(B) = \{x \in R^n \mid r(x, B) < \varepsilon\}$ — ε-окіл будь-якої множини $B \subset R^n$, $r(x, B) = \inf\limits_{y \in B} \|x - y\|$ — відстань між будь-якою точкою $x \in R^n$ і множиною B. Для частково цілочислової задачі $Q(F, X)$, як і для задачі з усіма цілочисловими змінними, T_3-стійкість (T_4-стійкість, T_5-стійкість) за векторним критерієм означає, що точково-множинне відображення $P: U \to 2^X$, $u \to P(u) = P(F_u, X)$ є напівнеперервним зверху (відповідно напівнеперервним знизу, неперервним) за Хаусдорфом у точці $u \in U$.

Теорема 1. *Якщо множина X обмежена і замкнена, то рівність*

$$S\ell(F, X) = \mathrm{cl}(P(F, X)) \tag{6}$$

де $\mathrm{cl}B$ *— замикання будь-якої множини $B \subset R^n$, є достатньою умовою T_3-стійкості за векторним критерієм частково цілочислової задачі $Q(F, X)$.*

Доведення. Нехай справджується рівність (6), але всупереч твердженню теореми, задача $Q(F_u, X)$ не є T_3-стійкою за векторним критерієм, тобто $\exists \varepsilon > 0$ таке, що $\forall \delta > 0$ існує збурений набір вхідних даних $u(\delta) = (D(\delta), C(\delta)) \in O_\delta(u)$, для якого не виконується умова (4). Отже, $\forall \delta > 0$ знайдеться хоч один розв'язок $x_\delta \in P(F_{u(\delta)}, X)$ збуреної задачі $Q(F_{u(\delta)}, X)$, який разом із усім своїм ε-околом не належить множині Парето задачі $Q(F_u, X)$:

$$O_\varepsilon(x_\delta) \subset R^n \setminus P(F_u, X). \tag{7}$$

З належності $x_\delta \in P(F_{u(\delta)}, X)$, отримуємо, що

$$\pi(x_\delta, F_{u(\delta)}, X) = \{z \in X \mid F_{u(\delta)}(z) \geqslant F_{u(\delta)}(x_\delta),\ F_{u(\delta)}(z) \neq F_{u(\delta)}(x_\delta)\} = \varnothing,$$

тобто $\forall z \in X$ справджується одне із двох співвідношень:

$$N^<(z) = \{i \in N_\ell \mid f_i^{u(\delta)}(z) < f_i^{u(\delta)}(x_\delta)\} \neq \varnothing,\ N^=(z) = \{i \in N_\ell \mid f_i^{u(\delta)}(z) = f_i^{u(\delta)}(x_\delta)\} = N_\ell.$$

Тоді для будь-якої точки $z \in X$ можна виділити зі скінченної множини $\{i_\delta \in N^<(z) \cup$ $\cup N^=(z) \mid \delta > 0\} \subset N_\ell$ стаціонарну послідовність $\{i_{\delta_r}, \mid r \in N\}$. А враховуючи теорему Больцано—Вейєрштрасса [3], можна з обмеженої множини $\{x_\delta \mid \delta > 0\} \subset X$ виділити збіжну послідовність $\{x_{\delta_r} \mid r \in N\}$, причому $\lim\limits_{r \to \infty} \delta_r = 0$. Позначимо $\tilde{x} = \lim\limits_{r \to \infty} x_{(\delta_r)}$, $i_0 = \lim\limits_{r \to \infty} i_{\delta_r}$. Враховуючи замкненість множини X, заключаємо, що $\tilde{x} \in X$. При $r \to \infty$ дістанемо нерівність $f_{i_0}^u(z) \leqslant f_{i_0}^u(\tilde{x})$, яка справджується для $\forall z \in X$. Отже, $\sigma(\tilde{x}, F_u, X) = \{z \in X \mid F_u(z) >> F_u(\tilde{x})\} = \varnothing$ і $\tilde{x} \in S\ell(F, X)$. Враховуючи рівність (6), приходимо до висновку:

$$\tilde{x} \in \mathrm{cl}(P(F_u, X)). \tag{8}$$

Проте з включення (7) випливає, що $\forall x \in P(F_u, X)$ справджуються нерівності $\|x - x^{(\delta_r)}\| \geqslant \varepsilon$, $r \in N$, з яких, в свою чергу, при $r \to \infty$ отримуємо нерівність $\|x - \tilde{x}\| \geqslant \varepsilon$. Це означає, що $\tilde{x} \notin \mathrm{cl}(P(F_u, X))$, і призводить до протиріччя з належністю (8). Доведення теореми завершено.

Теорема 2. *Нехай множина X замкнена. Необхідною умовою T_4-стійкості за векторним критерієм частково цілочислової задачі $Q_P(F, X)$ є виконання рівності*

$$\mathrm{cl}(P(F,X)) = \mathrm{cl}(Sm(F,X)) \tag{9}$$

Якщо, крім того, множина X є і обмеженою, тоді вказана умова є достатньою.

Доведення. Необхідність. Припустимо (від супротивного), що для T_4-стійкої за векторним критерієм задачі $Q(F,X)$ не справджується умова (9) і, отже, існує деяка точка $\nu \in \mathrm{cl}(P(F,X)) \setminus \mathrm{cl}(Sm(F,X))$. З одного боку, належність точки ν замиканню $\mathrm{cl}(P(F,X))$ означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists y \in O_\varepsilon(\nu) \cap P(F,X).$$

З другого боку, розглядаючи ν як точку відкритої множини $R^n \setminus \mathrm{cl}(Sm(F,X))$, робимо висновок, що $\forall \varepsilon' > 0$: $O_{\varepsilon'}(\nu) \subset R^n \setminus \mathrm{cl}(Sm(F,X))$. Отже, $\exists y = (y_1, \ldots, y_n) \in O_{\varepsilon'}(\nu) \cap P(F,X) \subset$ $\subset R^n \setminus \mathrm{cl}(Sm(F,X))$. Оскільки $y \in P(F,X) \setminus Sm(F,X)$, то існує також точка $z = (z_1, \ldots, z_n) \in$ $\in \eta(y,F,X) \setminus \pi(y,F,X)$, для якої справджуються співвідношення

$$F(z) = F(y), \;\; z \neq y. \tag{10}$$

З метою отримання протиріччя з припущенням щодо T_4-стійкості задачі $Q(F_u, X)$ покажемо, що $\exists \varepsilon'' > 0$ таке, що $\forall \delta > 0 \; \exists u(\delta) \in O_\delta(u)$: $P(F_{u(\delta)}, X) \cap O_{\varepsilon''}(y) = \varnothing$. В зв'язку з цим для будь-якого $\delta > 0$ розглянемо збурений набір вхідних даних $u(\delta) = (D(\delta), C(\delta)) \in O_\delta(u)$, в якому $D(\delta) = D = (D_1, \ldots, D_\ell)$, тобто матриці $D_i(\delta), i \in N_\ell$, залишимо незмінними у порівнянні з початковим набором вхідних даних, а матрицю $C(\delta)$ побудуємо, виходячи з такої формули для обчислення її окремих елементів: $c_{ij}(\delta) = c_{ij} + \dfrac{\alpha}{n\ell}\mathrm{sgn}(z_j - y_j)$, $i \in N_\ell$, $j \in N_n$, де $\alpha \in (0, \delta)$. Враховуючи формулу (3), легко впевнитися, що $\|C(\delta) - C\| = \sum\limits_{i \in N_\ell} \sum\limits_{j \in N_n} \left| c_{ij}(\delta) - c_{ij} \right| < \delta$. Крім того, беручи до уваги формули (10), $\forall i \in N_\ell$ виконуються співвідношення

$$f_i^{u(\delta)}(z) - f_i^{u(\delta)}(y) = \langle z, D_i(\delta) z \rangle + \langle c_i(\delta), z \rangle -$$

$$-\langle y, D_i(\delta) y \rangle - \langle c_i(\delta), y \rangle = f_i^u(z) - f_i^u(y) +$$

$$+\frac{\alpha}{n\ell} \sum_{j \in N_n} \mathrm{sgn}(z_j - y_j)(z_j - y_j) = \frac{\alpha}{n\ell} \sum_{j \in N_n} \left| z_j - y_j \right| = \frac{\alpha}{n\ell} \|z - y\| > 0.$$

Отже, $F_{u(\delta)}(z) - F_{u(\delta)}(y) > 0$. Тому $z \in \sigma(y, F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing$, і відповідно до означення множини Слейтера точка y не належить збуреній множині Слейтера $S\ell(F_{u(\delta)}, X)$, яка є замкненою за твердженням 1. Отже, точка y належить відкритій множині $R^n \setminus S\ell(F_{u(\delta)}, X)$, і знайдеться число $\varepsilon'' > 0$, для якого справджується включення $O_{\varepsilon''}(y) \subset R^n \setminus S\ell(F_{u(\delta)}, X)$, а враховуючи формули (2), має місце і включення $O_{\varepsilon''}(y) \subset R^n \setminus P(F_{u(\delta)}, X)$. Проте існування такого околу $O_{\varepsilon''}(y)$ точки $y \in P(F_u, X)$ суперечить припущенню щодо T_4-стійкості задачі $Q(F,X)$, тому що за означенням цього типу стійкості $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ виконується умова (5).

Достатність. Нехай справджується рівність (9), але задача $Q(F_u, X)$ не є T_4-стійкою за векторним критерієм. Отже, $\exists \varepsilon > 0$ таке, що $\forall \delta > 0$ знайдеться певний збурений набір вхідних даних $u(\delta) \in O_\delta(u)$, для якого не виконується умова (5). Це означає, що для будь-якого

$\delta > 0$ існує принаймні один Парето-оптимальний розв'язок $x_\delta^* \in P(C, X)$, який разом із усім своїм околом $O_\varepsilon(x_\delta^*)$ не належить збуреній множині Парето $P(F_{u(\delta)}, X)$, тобто

$$O_\varepsilon(x_\delta^*) \subset R^n \setminus P(F_{u(\delta)}, X), \tag{11}$$

і, отже, $\forall y \in P(F_{u(\delta)}, X) : \left\| x_\delta^* - y \right\| \geqslant \varepsilon$.

Оскільки множина $\{x_\delta^* \,|\, \delta > 0\} \subset P(F, X) \subset X$ є обмеженою (зважаючи на обмеженість допустимої множини X за умовою теореми), то з неї можна за теоремою Больцано— Вейєрштрасса [3] виділити збіжну послідовність $\{x_{\delta_r}^* \,|\, r \in N\}$, для якої $\lim\limits_{r\to\infty} \delta_r = 0$. Позначимо $x^* = \lim\limits_{r\to\infty} x_{\delta_r}^*$. Враховуючи також замкненість множини X, приходимо до висновку:

$$x^* \in \mathrm{cl}(P(F, X)) \subset X. \tag{12}$$

Розглянемо окіл $O_{\varepsilon/2}(x^*)$, для якого, виходячи з означення границі послідовності, можна вказати такий номер $r_0 \in N$, що $\forall r \geqslant r_0 \;\; x_{\delta_r}^* \in O_{\varepsilon/2}(x^*)$. Виходячи з включення (11), яке має місце $\forall \delta > 0$, заключаємо, що $\forall r \geqslant r_0$

$$O_{\varepsilon/2}(x^*) \subset O_\varepsilon(x_{\delta_r}^*) \subset R^n \setminus P(F_{u(\delta_r)}, X).$$

Звідси випливає, що для будь-яких точки $\nu \in O_{\varepsilon/2}(x^*) \cap X$ і номера $r \geqslant r_0$ знайдеться парето-оптимальний розв'язок $\bar{x}_{(\delta_r)} \in P(F_{u(\delta_r)}, X)$ збуреної задачі, для якого справджуються нерівності

$$f_i^{u(\delta_r)}(\bar{x}_{\delta_r}) \geqslant f_i^{u(\delta_r)}(\nu), \; i \in N_\ell.$$

Остан ній висновок зроблено, беручи до уваги зовнішню стійкість, властиву множині $P(F_{u(\delta_r)}, X)$ у зв'язку з неперервністю критеріальної вектор-функції задачі $Q_P(F_{u(\delta_r)}, X)$ і з тим, що її непорожня допустима множина X є компактом [1].

Даді для будь-якої точки ν з множини $O_{\varepsilon/2}(x^*) \cap X$ розглянемо послідовність $\{\bar{x}_{\delta_r} \,|\, r \geqslant r_0, r \in N\} \subset X$. З цієї обмеженої послідовності виділимо збіжну підпослідовність $\{\bar{x}(\delta_{r_k}) \,|\, k \in N\}$, для якої $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{r_k} = 0$. Позначимо $\bar{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}(\delta_{r_k})$ У зв'язку із замкненістю множини X маємо $\bar{x} \in X$. Очевидно, що $\left\| x^* - \bar{x} \right\| > \varepsilon/2$, $\bar{x} \notin O_{\varepsilon/2}(x^*)$ і, отже, $\bar{x} \neq \nu$. Від нерівностей $f_i^{u(\delta_{r_k})}(\bar{x}(\delta_{r_k})) \geqslant$ $\geqslant f_i^{u(\delta_{r_k})}(\nu)$, $i \in N_\ell$, $k \in N$, перейдемо при $k \to \infty$ до такої:

$$f_i^u(\bar{x}) \geqslant f_i^u(\nu), \; i \in N_\ell.$$

Остання разом з нерівністю $\nu \neq \bar{x}$ дозволяє заключити, що $\bar{x} \in \eta(\nu, F, X) \neq \varnothing$ і $\nu \notin Sm(F, X)$. Таким чином, $O_{\varepsilon/2}(x^*) \cap Sm(F, X) = \varnothing$, і точка x^* не є точкою дотикання множини $Sm(F, X)$. Отже, вона не належить і замиканню $\mathrm{cl}(Sm(F, X))$ цієї множини. Враховуючи припущення про виконання рівності $\mathrm{cl}(P(F, X)) = \mathrm{cl}(Sm(F, X))$, приходимо до висновку, що $x^* \notin \mathrm{cl}(P(F, X))$, а це суперечить належності (12) і завершує доведення теореми.

З теорем 1 та 2 з очевидністю випливає наступна.

Теорема 3. *Якщо множина X обмежена і замкнена, то виконання співвідношень*

$$S\ell(F, X) = \mathrm{cl}(P(F, X)) = \mathrm{cl}(Sm(F, X)).$$

є достатньою умовою T_5 -стійкості за векторним критерієм задачі $Q(F, X)$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука, 1982. 256 с.
2. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Задача частично целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости. *Кибернетика*. 1991. №1. С. 58—61.
3. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. 4.1. Київ: Вища школа, 1992. ч. 1. 495 с.
4. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Качественные характеристики устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности. *Кибернетика и систем. анализ*. 2014. №2. С. 75—82.
5. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений. *Кибернетика и систем. анализ*. 2005. №4. С. 90—100.

Надійшло до редакції 15.07.2020

REFERENCES

1. Podinovsky, V. V. & Nogin, V. D. (1982). Pareto optimal solutions in multicriteria problems. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Kozeratskaya, L. N., Lebedeva, T. T. & Sergienko, I. V. (1991). Mixed integer vector optimization problem: stability questions. Cybernetics, 27, No. 1, pp. 76-80.
3. Lyashko, I. I., Emelyanov, V. F. & Boyarcyuk, O. K. (1992). Mathematical analysis. Part. 1. Kyiv: Visha shcola. (in Ukrainian).
4. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2014). Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. Cybernetics and Systems Analysis, 50, No. 2, pp. 228-233.
5. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2005). Stability of vector problems of integer optimization: relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. Cybernetics and Systems Analysis, 41, No. 4, pp. 551-558.

Received 15.07.2020

T.T. Lebedeva, N.V. Semenova, T.I. Sergienko

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: lebedevatt@gmail.com, nvsemenova.meta.ua

STABILITY BY THE VECTOR CRITERION
OF A MIXED INTEGER OPTIMIZATION PROBLEM
WITH QUADRATIC CRITERIAL FUNCTIONS

The article is devoted to the study of qualitative characteristics of different concepts of stability of vector problems of mixed-integer optimization, namely, to identifying the conditions under which the set of Pareto-optimal solutions of the problem possesses some property of invariance defined in advance in relation to the external influences on initial data of the problem. We investigate the questions of stability with respect to data perturbations in a vector criterion of mixed-integer optimization problem. The necessary and sufficient conditions of stability of three types for a problem of finding the solutions of the Pareto set are found. Such conditions guarantee that the small variations of initial data of vector criterion: 1) do not result in new Pareto-optimal solutions, 2) save all Pareto-optimal solutions of the problem and can admit new solutions, 3) do not change the set of Pareto-optimal solutions of the initial problem.

Keywords: *mixed integer optimization problem, vector criterion, stability, Pareto-optimal solutions, perturbations of initial data.*