

В.В. Савчук¹, М.В. Савчук²

¹ Інститут математики НАН України, Київ

² НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”

E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

Опис класу Шура в термінах коефіцієнтів ряду за базисом Лагера

Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком

Класичний критерій Шура дає відповідь на питання, чи є функція f , задана своїм степеневим рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, функцією Шура, тобто голоморфною в одиничному крузі \mathbb{D} і такою, що $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$.

Стосовно цього критерію є велика кількість завершених результатів про його узагальнення і важливі застосування, але, на думку авторів, немає жодного критерію для повного описання класу Шура в термінах коефіцієнтів ортогональних рядів за довільними повними ортонормованими системами. У даній роботі сформульовано такий критерій для формального ортогонального ряду з комплексними коефіцієнтами за базисом Лагера.

Ключові слова: голоморфна функція, простір Гарді, функція Шура, клас Шура, базисна система Лагера.

У даній роботі наведено один результат і низку наслідків, що стосується такої задачі.

Задача про коефіцієнти. Нехай $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — повна ортонормована система в просторі Гарді H^2 (див. означення нижче) і нехай

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k \tag{1}$$

— формальний ортогональний ряд з комплексними коефіцієнтами. Якими є необхідні та достатні умови на послідовність коефіцієнтів $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ для того, щоб сума f ряду (1) була функцією Шура, тобто була голоморфною функцією в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ і задовольняла умову $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$?

І. Шур [1] дав низку розв'язків задачі про коефіцієнти у випадку, коли система φ має вигляд $\varphi_k(z) = z^k$, а ряд (1) є формальним степеневим рядом. Одним із цих розв'язків є таке твердження (див. міркування про співвідношення (26) в [1]).

Теорема Шура. Сума формального степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ з комплексними коефіцієнтами є функцією Шура тоді і тільки тоді, коли нерівність

$$\sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n c_{j-k} \lambda_j \right|^2 \leq \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2$$

справджується для всіх цілих $n \geq 0$ і будь-якої послідовності комплексних чисел $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Ми розширимо цей критерій на випадок, коли система φ є базисною системою Лагера в крузі \mathbb{D} . Нагадаємо необхідні для цього поняття.

Нехай $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ і нехай $d\sigma$ — нормована міра Лебега на \mathbb{T} . Простір Гарді H^p , $1 \leq p < \infty$, складається з усіх голоморфних у \mathbb{D} функцій f , для яких

$$\|f\|_p := \sup_{0 < \rho < 1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\rho t)|^p d\sigma(t) \right)^{1/p} < \infty,$$

а H^{∞} — це простір обмежених голоморфних у \mathbb{D} функцій f з нормою $\|f\|_{\infty} := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$.

Добре відомо, що функції з H^p , $1 \leq p \leq \infty$ мають майже скрізь на \mathbb{T} недотичні граничні значення, які позначатимемо так само f , причому $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Нехай a — фіксована точка у крузі \mathbb{D} . Система $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ голоморфних функцій

$$\varphi_k(z) := \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\bar{a}} \left(\frac{z-a}{1-z\bar{a}} \right)^k \tag{2}$$

називається базисом Лагера в просторі Гарді H^2 . Така назва закріпилася в сучасній літературі, мабуть, під впливом робіт [2, 3] (див. також історичні коментарі в [4, с. 163–165]), в яких використовувалася та ідея, що аналог системи (1) для простору Гарді у правій півплощині

$$\tilde{\varphi}_k(s) := \frac{\sqrt{2\alpha}}{s+\alpha} \left(\frac{s-\alpha}{s+\alpha} \right)^k, \quad \alpha > 0, s \in \mathbb{H}_+ := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta > 0\},$$

є перетворенням Лапласа ортонормованої на \mathbb{R}_+ системи функцій

$$\psi_k(x) = \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha x} L_k(2\alpha x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

де

$$L_k(t) := \frac{e^t}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (e^{-t} t^k)$$

— многочлени Лагера.

У випадку $a = 0$ базис Лагера збігається з базисом Тейлора, тобто $\varphi_k(z) = z^k$.

Скрізь далі ми будемо ототожнювати базис Лагера φ з точкою a , яка його породжує за правилом (2).

Система Лагера є повною ортонормованою системою в H^2 . Додаймо до цього ще таке

Твердження 1. Нехай $a \in \mathbb{D}$ і $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ – система Лагера. Тоді для кожної голоморфної в \mathbb{D} функції f :

1) справджується рівність $f = \sum_{k=0}^\infty \hat{f}_a(k) \varphi_k$, в якій ряд збігається рівномірно і абсолютно всередині \mathbb{D} , а коефіцієнти $\hat{f}_a(k)$ визначаються як коефіцієнти Тейлора функції

$$z \mapsto \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1+z\bar{a}} (f \circ w_a)(z), \text{ де } w_a(z) := \frac{z+a}{1+z\bar{a}};$$

2) для кожного цілого $k \geq 0$ виконується рівність

$$\hat{f}_a(k) = \sqrt{1-|a|^2} \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} \frac{(f \circ \rho w_a)(t) \bar{t}^k}{1+t\bar{a}} d\sigma(t) = \sqrt{1-|a|^2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (1-|a|^2)^j (-\bar{a})^{k-j};$$

3) якщо $f \in H^1$, то $\hat{f}_a(k) = \int_{\mathbb{T}} f \bar{\varphi}_k d\sigma$.

Твердження 1 показує, що базис Лагера має основні властивості степеневій системі (базису Тейлора) – свого частинного випадку при $a=0$, зокрема, властивість відтворення будь-якої голоморфної функції f за інформацією про її коефіцієнти $\hat{f}_a(k)$.

Основним результатом цієї роботи є

Теорема 1. Нехай $a \in \mathbb{D}$, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ – система Лагера і $\{c_k\}_{k=0}^\infty$ – послідовність комплексних чисел. Сума ряду (1) є функцією Шура тоді і тільки тоді, коли нерівність

$$\sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n c_{j-k} \lambda_j \right|^2 \leq (1-|a|^2) \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n (-\bar{a})^{j-k} \lambda_j \right|^2 \quad (3)$$

справджується для всіх цілих $n \geq 0$ і будь-якої послідовності комплексних чисел $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$.

У випадку $a=0$, маючи на увазі, що $0^0 = 1$, з теореми 1 легко одержуємо теорему Шура.

Позначимо B клас Шура, тобто множину всіх функцій Шура.

Наслідок 1. Нехай $a \in \mathbb{D}$, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ – система Лагера і $\{c_k\}_{k=0}^\infty$ – послідовність комплексних чисел. Тоді справджується імплікація

$$\sum_{k=0}^\infty c_k \varphi_k \in B \Rightarrow \sum_{k=0}^\infty c_k z^k \in \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}} B.$$

Справді, сума степеневого ряду $\sum_{k=0}^\infty (1-|a|)(-\bar{a})^k z^k$ належить до B , оскільки

$$\sum_{k=0}^\infty (1-|a|)(-\bar{a})^k z^k = \frac{1-|a|}{1+z\bar{a}} \quad (4)$$

і

$$\left\| \frac{1-|a|}{1+\bar{a}} \right\|_\infty = \frac{1-|a|}{1-|a|} = 1.$$

Тому, застосувавши теорему Шура до ряду в (4), можемо продовжити далі нерівність (3), оцінивши її праву частину:

$$\sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n c_{j-k} \lambda_j \right|^2 \leq (1-|a|^2) \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n (-\bar{a})^{j-k} \lambda_j \right|^2 \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2.$$

Звідси випливає нерівність

$$\sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n \sqrt{\frac{1-|a|}{1+|a|}} c_{j-k} \lambda_j \right|^2 \leq \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2,$$

що й потрібно було довести.

Наслідок 2. Нехай $a \in \mathbb{D}$. Тоді для кожного цілого $n \geq 0$

$$\max_{f \in B} \sum_{k=0}^n \left| \hat{f}_a(k) \right|^2 = 1 - |a|^{2(n+1)}.$$

Максимум досягається для функцій вигляду $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$.

Справді, поклавши в теоремі 1 $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ і $\lambda_n = 1$ після елементарних перетворень одержимо оцінку зверху

$$\max_{f \in B} \sum_{k=0}^n \left| \hat{f}_a(k) \right|^2 \leq 1 - |a|^{2(n+1)}.$$

Для оцінки знизу візьмемо функцію $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$. Тоді згідно з п. 2 твердження 1

$$f(z) = \omega = \omega \sqrt{1-|a|^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-\bar{a})^k \varphi_k(z), \tag{5}$$

а отже, $\hat{f}_a(k) = \omega \sqrt{1-|a|^2} (-\bar{a})^k$.

Таким чином, для цієї функції

$$\sum_{k=0}^n \left| \hat{f}_a(k) \right|^2 = (1-|a|^2) \sum_{k=0}^n |a|^{2k} = 1 - |a|^{2(n+1)}.$$

Для формулювання наступного наслідку позначимо

$$S_{k,a}(f)(t) := \sum_{j=0}^k \hat{f}_a(j) \varphi_j(t).$$

Наслідок 3. Нехай $a \in \mathbb{D}$. Тоді для кожного цілого $n \geq 0$ і $t \in \mathbb{T}$

$$\max_{f \in B} \sum_{k=0}^n \left| S_{k,a}(f)(t) \right|^2 = \sum_{k=0}^n \left| 1 - \left(\frac{|a|^2 - t\bar{a}}{1-t\bar{a}} \right)^{k+1} \right|^2. \tag{6}$$

Максимум досягається для функцій вигляду $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$.

Справді, поклавши в теоремі 1 $\lambda_j = \varphi_j(t)$ і врахувавши, що

$$\varphi_j(t) = \left(\frac{t-a}{1-t\bar{a}} \right)^k \varphi_{j-k}(t),$$

після простих обчислень одержимо

$$\sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=0}^k \hat{f}_a(j) \varphi_j(t) \right|^2 \leq \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=0}^k \sqrt{1-|a|^2} (-\bar{a})^j \varphi_j(t) \right|^2 = \sum_{k=0}^n \left| 1 - (-\bar{a})^{k+1} \left(\frac{t-a}{1-t\bar{a}} \right)^{k+1} \right|^2.$$

Згідно з (5) для функції $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$, у цих співвідношеннях виконуються рівності.

Нижченаведене твердження є аналогом знаменитого результату Л. Фейєра, про норму $(C, 1)$ середніх Чезаро ряду Тейлора функцій з H^∞ .

Наслідок 4. Нехай $a \in \mathbb{D}$. Тоді для кожного цілого $n \geq 0$ і $t \in \mathbb{T}$

$$\max_{f \in B} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_{k,a}(f)(t) \right| \leq 1 + |a|.$$

Рівність виконується у випадку $a = 0$, а максимум при цьому досягається для функції $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$,

Справді, за нерівністю Коші–Буняковського для будь-якої функції $f \in B$

$$\left| \sum_{k=0}^n S_{k,a}(f)(t) \right| \leq \sqrt{n+1} \sqrt{\sum_{k=0}^n |S_{k,a}(f)(t)|^2}.$$

З іншого боку, для величини в правій частині (6) маємо оцінку

$$\sum_{k=0}^n \left| 1 - \left(\frac{|a|^2 - t\bar{a}}{1-t\bar{a}} \right)^{k+1} \right|^2 \leq \max_{0 \leq k \leq n, t \in \mathbb{T}} \left| 1 - \left(\frac{|a|^2 - t\bar{a}}{1-t\bar{a}} \right)^{k+1} \right|^2 (n+1) = (1+|a|)^2 (n+1).$$

Об'єднавши дві останні нерівності, одержимо доводжуване співвідношення. Для доведення рівності у випадку, коли $a = 0$, досить зауважити, що для відповідної функції $S_{k,0}(f)(t) = 1$ при всіх k і $t \in \mathbb{T}$.

Добре відомо, що для будь-якої функції $f \in H^2$, $\|f\|_2 \leq 1$ у кожній точці $z \in \mathbb{D}$ виконується точна нерівність

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Нижченаведений наслідок, який випливає з твердження 1, узагальнює цей факт.

Наслідок 5. Для будь-якого цілого $k \geq 0$ і будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$\max_{f \in H^2, \|f\|_2 \leq 1} \left| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{f^{(j)}(z)}{j!} (1-|z|^2)^j (-\bar{z})^{k-j} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

При даних k і z максимум досягається для функції

$$f(t) = \omega \frac{\sqrt{1-|z|^2}}{1-t\bar{z}} \cdot \left(\frac{t-z}{1-t\bar{z}} \right)^k, \quad |\omega| = 1. \quad (7)$$

Справді, згідно з п. 2, 3 твердження 1 маємо формулу

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (1-|a|^2)^j (-\bar{a})^{k-j} = \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}} \int_{\mathbb{T}} f \bar{\phi}_k d\sigma.$$

Поклавши у ній $a = z$, а потім оцінивши інтеграл справа за нерівністю Коші–Буняковського, одержимо потрібну оцінку зверху. Для оцінки знизу візьмемо функцію f , означену в (7). Для цієї функції інтеграл в останній формулі (при $a = z$) дорівнює одиниці, що й доводить точність верхньої оцінки.

У [5] дано просте доведення теореми Шура, яке ґрунтується на описі функції Шура в термінах обмеженості оператора мультиплікатора в просторі H^2 . Ми використали подібну схему для доведення теореми 1. Ключовим моментом при цьому стала така

Лема 1. Нехай $a \in \mathbb{D}$ і $g \in H^2$. Тоді для будь-якої функції $f \in B$ при кожному цілому $n \geq 0$ справджується нерівність

$$\sum_{k=0}^n \left| (\widehat{fg})_a(k) \right|^2 \leq \sum_{k=0}^n \left| \hat{g}_a(k) \right|^2.$$

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проєктом Ф84/177-2019 Національного фонду досліджень України.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.* 1917. **147**. S. 205–232.
- Lee Y.W. Synthesis of electric networks by means of the Fourier transforms of Laguerre functions. *J. Math. Phys.* 1932. **11**, № 1–4. P. 83–113.
- Hille E. Bilinear formulas in the theory of the transformation of Laplace. *Compos. Math.* 1939. **6**. P. 93–102.
- Masani P.R. Norbert Wiener: 1894–1964. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1990. 416 p.
- Kortram R. A. A simple proof for Schur's theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2001. **129**, № 11. С. 3211–3212.

Надійшло до редакції 05.10.2020

REFERENCES

- Schur, I. (1917). Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, **147**, pp. 205-232.
- Lee, Y. W. (1932). Synthesis of electric networks by means of the Fourier transforms of Laguerre functions. *J. Math. Phys.*, **11**, No. 1-4, pp. 83-113.
- Hille, E. (1939). Bilinear formulas in the theory of the transformation of Laplace. *Compos. Math.*, **6**, pp. 93-102.
- Masani, P. R. (1990). Norbert Wiener: 1894–1964. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.
- Kortram, R. A. (2001). A simple proof for Schur's theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**, No. 11, pp. 3211-3212.

Received 05.10.2020

V.V. Savchuk¹, M.V. Savchuk²

¹ Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

² NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnical Institute”

E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

CHARACTERIZATION OF THE SCHUR CLASS
IN TERMS OF THE COEFFICIENTS
OF A SERIES ON THE LAGUERRE BASIS

The classical Schur criterion answers the question of whether a function f given by its power series $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

is a Schur function that is, holomorphic in a unit disk \mathbb{D} and such that $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$. Regarding this criterion, there are a large number of completed results devoted to its generalizations and various applications, but, as it seems to us, there is no criterion for a complete description of the Schur class in terms of coefficients of orthogonal series on arbitrary complete orthonormal systems. In this paper, we formulate such criterion for a formal orthogonal series with complex coefficients based on the Laguerre system.

Keywords: holomorphic function, Hardy space, Schur function, Schur class, Laguerre basis.