ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.024
УДК 539.3

С.Ю. Бабич [1], Н.О. Ярецька [2]

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
[2] Хмельницький національний університет
E-mail: massacran2@ukr.net

Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору

Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Я. Рущицьким

Стаття присвячена дослідженню контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя. Задачу розв'язано у випадку нерівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного кільцевого штампа та пружного півпростору однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив кільцевого штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружний півпростір виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композиційних матеріалів.

Ключові слова: *лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.*

Детальний огляд задач, що враховують початкові напруження представлені у роботах [1—3]. Причому у перших роботах з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями розглядаються або пружні потенціали конкретної структури [4], або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності [1, 2]. Роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [5]. Розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на пружний півпростір, який містить залишкові деформації, розглянуто у [6].

Цитування: Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2020. № 11. С. 24—30. https://doi.org/10.15407/dopovidi 2020.11.024

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності досліджена вісесиметрична контактна задача про тиск попередньо напруженого кільцевого штампа з плоскою основою на півпростір з початковими напруженнями без урахування сил тертя для нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [1]. Дослідження виконано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани в штампі і півпросторі є однорідними і рівними. Величини, які відносяться до пружного штампа, будемо записувати з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до попередньо напруженого півпростору — з верхнім індексом (2). Аналогічна контактна задача у класичному випадку, тобто без початкових напружень розглянута в [5].

Розрізнятимемо три стани тіл з початковими напруженнями: природний, коли у ньому відсутні напруження; початковий стан, та збурений стан, всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими за величини початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [1–3].

Для дослідження введемо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3), які в початковому стані збігаються з декартовими координатами (y_1, y_2, y_3), що пов'язані наступними співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i \quad (i = \overline{1,3})$, де $\lambda_i \quad (i = \overline{1,3})$ — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан у півпросторі є однорідним, а пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [1]. Матеріали тіл, що контактують, будемо вважати ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей координат.

Нехай скінченний пружний кільцевий штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю y_3 циліндричної системи координат, що напрямлена в середину півпростору, втискається у півпростір з силою P, після виникнення у штампі та у півпросторі початкового деформованого стану. R_1, R_2 — відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа, під дією якого всі точки торця штампа переміщаються у напрямку осі симетрії y_3 на одну і ту ж саму величину ε. Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження — неперервні.

При однорідних початкових напруження вважаємо, що: $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0, S_0^{33} = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Тоді у циліндричній системі координат (r, θ, z_i), де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}, (i = 1, 2)$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$, $\xi_2'^2, \xi_3'^2$ — корені визначального рівняння [1], такій постановці відповідають граничні умови

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \tag{1}$$

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \tag{2}$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)}=0,\quad U_3^{(2)}=0,\quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)}=0\quad (0<r<R_1, R_2<r<\infty), \tag{3}$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)}=0,\quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)}=0\quad (0\leqslant z_1\leqslant Hv_1^{-1}), \tag{4}$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)}=0,\quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)}=0\quad (0\leqslant z_1\leqslant Hv_1^{-1}). \tag{5}$$

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням торця штампа та рівнодіючою силою навантаження P має вигляд

$$P=-2\pi\int_{R_1}^{R_2} rQ_{33}^{(2)}(0,r)\,dr\,. \tag{6}$$

Для визначення напружено-деформованого стану в пружному кільцевому штампі з початковими напруженнями використовуємо лінеаризовані рівняння [1]. З цих рівнянь слідують вирази для компонентів вектора переміщення та тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл. Тому загальний розв'язок $\chi=\chi_1+\chi_2$ для випадку нерівних коренів $n_1\neq n_2$ визначального рівняння [1] приймемо у вигляді

$$\chi=0{,}5\varepsilon\theta_8^{-1}(r^2-z_1^2-z_2^2)+\sum_{k=1}^{\infty}\{\tilde{A}_k I_0(\gamma_k v_1 r)\sin(\gamma_k v_1 z_1)+\tilde{B}_k I_0(\gamma_k v_2 r)\sin(\gamma_k v_2 z_2)+$$

$$+J_0(\alpha_k r)[\tilde{S}_2(\alpha_k z_1)+\tilde{S}_3(\alpha_k z_2)]+\tilde{C}_0^{(k)}[3r^2(z_1+z_2)+6H\theta_6\theta_8^{-1}(r^2-z_1^2-z_2^2)+z_1^3+z_2^3)]\}M_k\,,$$

де $\chi_1=0{,}25\varepsilon\theta_8^{-1}(r^2-2z_1^2)+\sum_{k=1}^{\infty}\{\tilde{C}_0^{(k)}[(3H\theta_6\theta_8^{-1}+z_1)(r^2-2z_1^2)+2z_1r^2]+$

$$+\tilde{A}_k I_0(\gamma_k v_1 r)\sin(\gamma_k v_1 z_1)+J_0(\alpha_k r)\tilde{S}_2(\alpha_k z_1)\}M_k\,,$$

$$\chi_2=0{,}25\varepsilon\theta_8^{-1}(r^2-2z_2^2)+\sum_{k=1}^{\infty}\{\tilde{C}_0^{(k)}[(3H\theta_6\theta_8^{-1}+z_2)(r^2-2z_2^2)+2z_2r^2]+$$

$$+\tilde{B}_k I_0(\gamma_k v_2 r)\sin(\gamma_k v_2 z_2)+J_0(\alpha_k r)\tilde{S}_3(\alpha_k z_2)\}M_k\,,$$

$$\theta_8=m_1n_1^{-1}+m_2n_2^{-1},\quad \tilde{S}_2=\tilde{E}_k sh(\alpha_k Hv_1^{-1})-s_0n_1n_2^{-1}ch(\alpha_k Hv_1^{-1}),$$

$$\tilde{A}_k=-s_0I_1(\gamma_k v_2 R)I_1^{-1}(\gamma_k v_1 R),\quad \tilde{S}_3=\tilde{N}_k sh(\alpha_k Hv_2^{-1})-ch(\alpha_k Hv_2^{-1}),$$

$$\tilde{C}_0^{(k)}=-(6n_2\theta_7)^{-1}J_0(\mu_k)\theta_{10},\quad \theta_{10}=(\tilde{c}_1-\tilde{c}_0)v_1s_0-(\tilde{c}_2-\tilde{c}_0)v_2,$$

$$\tilde{B}_k=J_0(\mu_k)(n_2\alpha_k)^{-1}\{(\tilde{c}_1-\tilde{c}_0)s_0[cth(\alpha_k Hv_1^{-1})(v_1+Hsh(\alpha_k Hv_1^{-1})-v_1ch(\alpha_k Hv_1^{-1}))-$$

$$-\alpha_k Hch(\alpha_k Hv_1^{-1})+v_1sh(\alpha_k Hv_1^{-1})-0{,}5H^2\alpha_k v_1^{-1}]+(\tilde{c}_2-\tilde{c}_0)[\alpha_k Hch(\alpha_k Hv_2^{-1})-$$

$$-v_2sh(\alpha_k Hv_2^{-1})+0{,}5H\alpha_k(1-\alpha_k cth(\alpha_k Hv_2^{-1}))],$$

$\theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3}$, $\theta_7 = (1+\tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1)v_1^{-1} + (1+\tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_2)v_2^{-1}$, $\tilde{c}_i (i = 0, 1, 2)$ — величини, що залежать від пружного потенціалу.

Тоді напружено-деформований стан в попередньо напруженому кільцевому штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів, з урахуванням (1)—(5), представимо у вигляді

$$U_r^{(1)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\{6\tilde{C}_0^{(k)} r\theta_+ + \gamma_k^2 [v_1 \tilde{A}_k I_1(v_1\gamma_k r)\cos(\gamma_k v_1 z_1) + \tilde{B}_k v_2 I_1(v_2\gamma_k r)\cos(\gamma_k v_2 z_2)] -$$

$$-\alpha_k^2 J_1(\alpha_k r)(v_1^{-1}\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_2^{-1}\tilde{S}_5(\alpha_k z_2))\}M_k,$$

$$U_3^{(1)} = -2\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty}\{12\tilde{C}_0^{(k)}(m_1 z_1 n_1^{-1} + m_2 z_2 n_2^{-1} - H\theta_6) + \tag{7}$$

$$+\gamma_k^2[\tilde{A}_k m_1 I_0(\gamma_k v_1 r)\sin(\gamma_k v_1 z_1) + \tilde{B}_k m_2 I_0(\gamma_k v_2 r)\sin(\gamma_k v_2 z_2)] -$$

$$-\alpha_л^2 J_0(\alpha_k r)[m_1 n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + m_2 n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_k z_2)]\}M_k,$$

$$Q_{33}^{(1)} = C_{44}(1+m_1)l_1\sum_{k=1}^{\infty}\{12\tilde{C}_0^{(k)}[v_1^{-1} + sv_2^{-1}] + \gamma_k^3[\tilde{A}_k n_1 I_0(\gamma_k v_1 r)\cos(\gamma_k v_1 z_1) +$$

$$+sn_2\tilde{B}_k I_0(\gamma_k v_2 r)\cos(\gamma_k v_2 z_2)] - \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r)[\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)v_1^{-1} + s\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)v_2^{-1}]\}M_k,$$

$$Q_{3r}^{(1)} = C_{44}(1+m_1)\sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma_k^3[\tilde{A}_k v_1 I_1(\gamma_k v_1 r)\sin(\gamma_k v_1 z_1) + s_0 v_2 \tilde{B}_k I_1(\gamma_k v_2 r)\sin(\gamma_k v_2 z_2)] +$$

$$+\alpha_k^3 v_1^{-1} J_1(\alpha_k r)(n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + s_0 n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_k z_1))\}M_k,$$

де $\tilde{S}_4 = \dfrac{n_1 s_0}{n_2}[cth(\alpha_k H v_1^{-1})ch(\alpha_k z_1) - sh(\alpha_k z_1)]$, $\tilde{S}_5 = sh(\alpha_k z_2) - cth(\alpha_k H v_2^{-1})$, $\theta_+ = v_2^{-1} + 2v_1^{-1}$, $\tilde{N}_k = -cth(\alpha_k H v_2^{-1})$, $\tilde{E}_k = n_1 s_0 n_2^{-1} cth(\alpha_k H v_1^{-1})$, $R = \delta(r - R_1)R_1 + \delta(r - R_2)R_2$, $\delta(x)$ — функція Дірака; $J_v(x), I_v(x)$ — функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, відповідно; значення $D_{44}, C_{44}, l_1, l_2, m_1, m_2, s_0$ визначаються із [1] та визначають початковий напружений стан у контактуючих пружних тілах.

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому півпросторі для нерівних коренів, з врахуванням (1)—(5) та $z_1 = 0$ представимо у вигляді [1]

$$Q_{33}^{(2)} = \omega_3 (R_2 - R_1)^{-1}\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r)\, d\eta, \quad U_3^{(2)} = -\omega_3^{-1}\int_0^{\infty} F(\eta)\eta^{-1} J_0(\eta r)\, d\eta \tag{8}$$

$$U_r^{(2)} = \omega_1 \int_0^{\infty} F(\eta)\eta^{-1} J_1(\eta r)\, d\eta,$$

де $\omega_3 = c_{44} l_1 (1+m_1)(s - s_0)$, $\omega_1 = s_0 - 1$, $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$; $J_v(x)$ — функція Бесселя дійсного аргументу; $F(\eta)$ — невідома функція.

Враховуючи розв'язок для штампа (7) та задовольняючи другу умову (1), (4) та (5), знаходимо власні значення задачі (1)—(5) для $n_1 \neq n_2$:

$$\gamma_k = \pi(2k+1)H^{-1}, \ \alpha_k = \mu_k R^{-1} \ \ (J_1(\mu_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Задовольнивши перші умови (2) та (3), визначаємо невідому функцію $F(\eta)$ для (8) із парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r)\, d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2), \ \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r)\, d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1, R_2 < r < \infty), \tag{10}$$

де $f(r) = \omega_2 \left(\varepsilon - 2H\theta_6\theta_{10}(n_2\theta_7)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k) M_k + (m_1 s_0 - m_2) n_2^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) M_k \right)$.

Застосування формули обертання інтегральних перетворень Хенкеля до (10) приводить її до функції $F(\eta)$, тобто

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\omega_2}{\pi} \left\langle \varepsilon\psi(\eta, 0) - \frac{2H\theta_6\theta_{10}}{n_2\theta_7} \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_0(\mu_k)\psi(\eta, 0) + (m_1 s_0 - m_2)\frac{R}{n_2}\alpha_k^2 \psi(\eta, \mu_k) \right] M_k \right\rangle,$$

де $\psi(x, y) = (x \sin x \cos y - y \sin y \cos x)(x^2 - y^2)^{-1}, \quad \psi(x, 0) = x^{-1} \sin x$.

Задовольнивши першим двом граничним умовам (2), з урахуванням ортогональності Беселевих функцій $J_0(\mu_k \rho)$ для визначення сталих $M_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$, які входять в (7)—(10), отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$a_k M_k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} M_n = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Коефіцінти системи представимо у вигляді

$\beta_0 = 2\omega_2 \varepsilon \pi^{-1}(R_2^{-1} - R_1^{-1})$, $\beta_k = 2\omega_2 \varepsilon \pi^{-1} \psi(0, \mu_k)$, $a_0 = 0$,

$a_k = 4\omega_2 H\theta_6\theta_{10}(\pi\theta_7 n_2)^{-1} J_0(\mu_k)\psi(0, \mu_k) - 2\theta_{10}(R_2 - R_1)((s - s_3)\theta_7)^{-1}(v_1^{-1} -$

$- s v_2^{-1}) J_0(\mu_k)\mu_k^{-1}(R_2 J_1(\mu_k R_2) - R_1 J_1(\mu_k R_1))$,

$a_{kn} = (R_2 - R_1)(s - s_3)^{-1}(\gamma_k^3 [\tilde{A}_k n_1 t_{kn}^{(1)} + s n_2 t_{kn}^{(2)}] \tilde{B}_n - \alpha_k^3 v_2^{-1} [v_1 v_2^{-1} s_0 cth(\alpha_k H v_1^{-1}) -$

$- s \cdot cth(\alpha_k H v_2^{-1})] \tau_{kn} + 2(m_2 - m_1 s_0)(n_2 \pi)^{-1} \alpha_k^2 \psi(\mu_n, \mu_k)$

$a_{n0} = 4\omega_2 H\theta_6\theta_{10}(\pi\theta_7 n_2)^{-1}(R_2^{-1} - R_1^{-1}) J_0(\mu_n) + 2\omega_2(m_2 - m_1 s_0)(n_2\pi)^{-1}\alpha_k^2 \psi(0, \mu_n) -$

$- \omega_3 (s - s_0)^{-1} \{\theta_{10}(\theta_7 n_2)^{-1}(v_1^{-1} + s v_2^{-1}) J_0(\mu_n)(R_2^2 - R_1^2) + \gamma_n^2 (\tilde{A}_n v_1 + s v_2)[R_2 I_1(\gamma_n R_2 v_2) -$

$- R_1 I_1(\gamma_n R_1 v_1)] \tilde{B}_n - \alpha_k^2 n_2^{-1} [R_2 J_1(\alpha_n R_2) - R_1 J_1(\alpha_n R_1)][v_1 s_0 cth(\alpha_k H v_1^{-1}) - s v_2 cth(\alpha_k H v_1^{-1})]\}$, де $t_{kn}^{(i)}=[R_2I_0(\gamma_k v_i R_2)\mu_n J_1(\mu_n R_2)+R_2 I_1(\gamma_k v_i R_2)\gamma_k v_i J_0(\mu_n R_2)-$

$-R_1 I_0(\gamma_k v_i R_1)\mu_n J_1(\mu_n R_1)-R_1 I_1(\gamma_k v_i R_1)\gamma_k v_i J_0(\mu_n R_1)](v_i^2\gamma_k^2+\mu_n^2)^{-1},$

$\tau_{kn}=[R_1 J_1(\mu_n R_1)\mu_n J_0(\mu_k R_1)+R_2 J_1(\mu_k R_2)\mu_k J_0(\mu_n R_2)-$

$-R_1 J_1(\mu_k R_1)\mu_k J_0(\mu_n R_1)-R_2 J_1(\mu_n R_2)\mu_n J_0(\mu_k R_2)](\mu_k^2+\mu_n^2)^{-1}.$

Враховуючи умову рівноваги (6), встановимо зв'язок між осіданням торця та рівнодіючою силою навантаження P у вигляді

$$P=4\varepsilon\omega_2^2(R_2-R_1)^{-1}((1-R_2^2)^{-0,5}-(1-R_1^2)^{-0,5}).$$

Визначивши невідомі сталі $M_i(i=0,1,2,\ldots)$ із системи (11), обчислимо переміщення та напруження як у пружному штампі, так і у пружному півпросторі за формулами (7)—(8). В результаті цього, розв'язок представимо у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються з (11). Причому в (11) коефіцієнти β_k та a_{kn} залежать від величин, які визначають структуру пружного потенціалу, висоти пружного штампа H, а вільні члени залежать тільки від n_1, n_2.

Числові розрахунки було проведено для потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу).

Отже, за результатами досліджень даної роботи можна зробити узагальнюючі висновки, щодо впливу початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик пружних тіл, що взаємодіють.

При постійному зовнішньому навантаженні вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного півпростору, в який втискається пружний кільцевий штамп з початковими напруженнями, полягає в тому, що:

1) початкові напруження у півпросторі призводять у випадку стиску ($\lambda_1<1$) до зменшення напружень, а у випадку розтягу ($\lambda_1<1$) — до їх збільшення;

2) для переміщень — все відбувається навпаки.

При стиску ($\lambda_1<1$) початкові напруження у півпросторі призводять до збільшення переміщень по абсолютній величині, а у випадку розтягу ($\lambda_1<1$) — до їх зменшення.

Таким чином, отримані результати з урахуванням попередньо напруженого стану при контактній взаємодії пружного штампа і пружного півпростору можуть бути використані для регулювання контактних напружень і переміщень при розрахунках конструкцій на міцність.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями: Навч. посібник. Київ: Вища школа, 1995. 304 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Saarbrücken: LAP, 2015. 468 с.
3. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew.* 1998. **51**, № 5. P. 343–371. https://doi.org/10.1115/1.3099009
4. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел. *Прикл. механика.* 1984. **20**, № 3. С. 9–16. https://doi.org/10.1007/BF00883134

5. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища шк., 1981. 136 с.
6. Yaretskaya N.F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew*. 2018. **54**, № 5. P. 539—543. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y

Надійшло до редакції 30.09.2020

REFERENCES

1. Guz A. N., Babich S. Yu. & Rudnitsky V. B. (1995). Contact Interactoin of Prestressed Bodies. Kyiv: Vyshcha Shkola (in Ukrainian).
2. Guz, A. N., Babich, S. Yu. & Glukhov, Yu. P. (2015). Mixed Problems for Prestressed Elastic Foundation. Saarbrücken, Germany: LAP (in Russian).
3. Guz, A. N., Babich, S. Y. & Rudnitskii, V. B. (1998), Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. Int. Appl. Mech. Rew., 51, No. 5, pp. 343-371. https://doi.org/10.1115/1.3099009
4. Aleksandrov, V. M. & Arutyunyan, N. Ky. (1984). Contact problems for prestressed deformed bodies. Soviet Appl. Mech., 20(3). pp. 209-215. https://doi.org/10.1007/BF00883134
5. Hrylytskyi, D. V. & Kyzyma, Ya. M. (1981). Axisymmetric contact problems in the theory of elasticity and thermoelasticity. Lviv: Vyshcha Shkola (in Ukrainian).
6. Yaretskaya, N. F. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. Int. Appl. Mech. Rew., 54, No. 5, pp. 539-543. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y

Received 30.09.2020

S.Yu. Babich [1], *N.O. Yaretska* [2]
[1] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] Khmelnitsky National University
E-mail: massacran2@ukr.net

CONTACT INTERACTION OF PRESTRESSED
ANNULAR PUNCH AND HALF-SPACE

The article is devoted to the task of contact interaction of the pressure of a pre-stressed cylindrical annular punch on the half-space with initial (residual) stresses without friction. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) deformations and two variants of the theory of small initial ones within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having any structure. It is assumed that the initial states of the elastic annular stamp and the elastic half-space remain homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with Lagrange coordinates (natural state). In addition, the influence of the annular stamp causes small perturbations of the basic elastic deformed state. It is assumed that the elastic annular stamp and the elastic half-space are made of different isotropic, transversal-isotropic or composite materials.

Keywords: *linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, half-space.*