
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.031>
УДК 539.:534.1

О.В. Борисейко¹,
В.І. Денисенко², Ю.Ф. Діденко²

¹ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

² Київський національний торговельно-економічний університет

E-mail: b12313@ukr.net, d0212@ukr.net

Коливання циліндричної п'єзооболонки, заповненої рідиною

Представлено академіком НАН України В.Т. Грінченком

Розглядаються стаціонарні коливання п'єзокерамічної циліндричної оболонки з товщиною поляризацією під дією гармонічного за часом механічного навантаження у вигляді зовнішнього тиску. Оболонка має скінчену довжину і закрита з торців жорсткими пластинами. Внутрішній об'єм оболонки заповнений нев'язкою стисливою рідиною. На циліндричні поверхні оболонки нанесено суцільне тонке електродне покриття. Поверхневі електроди вважаються розімкненими. У постановці задачі для оболонки записані рівняння осесиметричних коливань та відповідні граничні умови на торцях. Сформульовано також задачу для визначення руху у вигляді малих коливань рідини всередині оболонки, а також граничні умови рівності швидкостей частинок рідини та оболонки на поверхнях їх дотику. Наведено аналітичний вираз для визначення розподілу товщинної компоненти напруженості електричного поля, яке виникає внаслідок деформації елемента оболонки, в залежності від частоти коливань зовнішнього механічного навантаження. Наведено результати чисельних розрахунків.

Ключові слова: п'єзооболонка, осесиметричні коливання, зовнішній тиск, жорстка пластина, малі коливання рідини.

Питання про необхідні характеристики акустичних випромінювачів (джерел) та приймачів акустичних сигналів, а також їх обробки чи перетворення є актуальними в сучасній акустиці та гідроакустиці. Як правило з цією метою використовуються п'єзокерамічні елементи різноманітних форм, у тому числі і оболонкові елементи, зокрема кругові циліндричні [1]. В модельних задачах дослідження механічної поведінки п'єзооболонок під дією різних типів навантаження проводяться в ідеалізованій постановці, наприклад циліндрична оболонка нескінченної довжини, або цілком зімкнена сферична оболонка [2]. Тобто не розглядаються умови закріплення елемента, не враховується вплив середовища, в якому

Цитування: Борисейко О.В., Денисенко В.І., Діденко Ю.Ф. Коливання циліндричної п'єзооболонки, заповненої рідиною. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 11. С. 31–38. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.031>

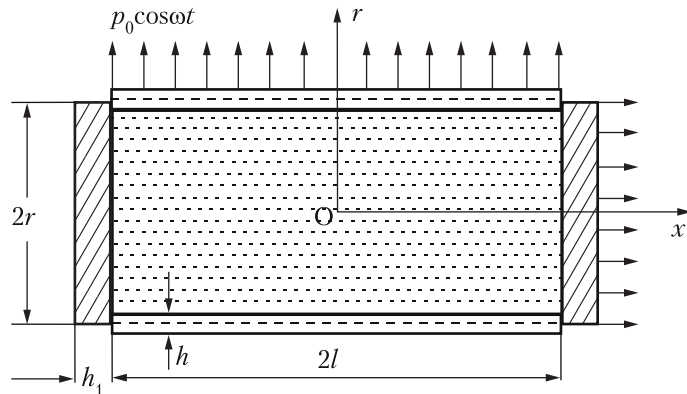


Рис. 1. П'єзокерамічна оболонка, заповнена рідиною, під дією зовнішнього тиску.

знаходиться відповідний п'єзоелемент, тощо. Відомо, що зміна умов закріплення торців циліндричних оболонок скінченої довжини істотно змінює їх спектр власних чисел [3]. Тобто для оболонок з п'єзокераміки зазнає зміни спектр резонансних частот і, відповідно, ефективність перетворення енергії на новому спектрі. Також важливим фактором є наявність наповнювача всередині оболонки як для вільно зануреної відкритої оболонки, так і для оболонки із закритими торцями [1]. В останньому випадку оболонка зазнає деформації при сумісній дії навантаження розтягу—стиску та зовнішнього чи внутрішнього тиску, що також вносить зміни до спектра власних чисел порівняно зі спектрами, що відповідають окремій дії таких навантажень [4].

В п'єзокерамічних приймачах акустичних сигналів механічна енергія деформації оболонки під дією зовнішнього навантаження перетворюється в електричну, яка знімається з поверхневих електродів для подальшої обробки. Різниця потенціалів на електродних поверхнях визначається розподілом відповідної компоненти вектора напруженості електричного поля в об'ємі елемента.

В даній роботі досліджується зв'язане електромеханічне поле в круговій циліндричній оболонці з п'єзокераміки з товщинною поляризацією. Оболонка скінченої довжини закрита на торцях жорсткими важкими пластинами і заповнена нев'язкою стисливою рідиною. Коливання відбуваються під дією гармонічного за часом зовнішнього тиску. Метою досліджень є визначення радіальної складової напруженості електричного поля, що виникає внаслідок деформацій розтягу—стиску у напрямку твірної оболонки та впливу на вказану характеристику розмірів торцевих пластин.

Постановка задачі. Розглядається задача про усталені коливання кругової циліндричної оболонки (товщина h та довжина $2l$), поляризованої у радіальному напрямку. З торців оболонка щільно закрита круглими абсолютно жорсткими пластинами — товщина h_1 . Циліндричні поверхні оболонки $r = r_1, r_2$ суцільним чином покриті тонкими поверхневими електродами, які у даній задачі вважаються розімкненими. Оболонка заповнена нев'язкою стисливою рідиною. Коливання оболонки відбуваються під дією гармонічного у часі зовнішнього тиску сталої амплітуди $p_0 \cos \omega t$ (рис. 1).

Коливання п'єзокерамічної оболонки досліджуються на основі положень прикладної теорії деформування п'єзокерамічних елементів, аналогічній гіпотезам Кірхгофа—Лява [5]. Оскільки розглядаються усталені коливання, то всі наступні позначення величин вважаються позначеннями відповідних амплітуд.

Деформації в точках оболонки обчислюються за формулами [2]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(0)} + z\chi_x; \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^{(0)} + z\chi_\varphi. \quad (1)$$

Тут z — товщинна координата оболонки, направлена всередину перпендикулярно до її серединної поверхні.

Деформації розтягу серединної поверхні $\epsilon_x^{(0)}$, $\epsilon_\phi^{(0)}$ та зміни головних кривизн χ_x , χ_ϕ зв'язані з меридіональними переміщеннями u та прогином w в точках серединної поверхні наступними співвідношеннями (осесиметрична деформація):

$$\epsilon_x^{(0)} = \frac{du}{dx}; \quad \epsilon_\phi^{(0)} = \frac{w}{r_0}; \quad \chi_x = -\frac{d^2w}{dx^2}; \quad \chi_\phi = 0. \quad (2)$$

У тонких п'єзокерамічних оболонках з товщинною поляризацією згідно з прикладними гіпотезами деформації тонких п'єзокерамічних оболонок нормальні компоненти векторів напруженості електричного поля E_z та електричної індукції D_z наближено можна подати у вигляді [5]

$$E_z = E_z^{(0)}(x) + zE_z^{(1)}(x); \quad D_z = D_z^{(0)}(x), \quad (3)$$

де

$$E_z^{(1)}(x) = -\frac{1}{d_{31}} \cdot \frac{k_p^2}{1+k_p^2} (\chi_x + \chi_\phi) \quad (4)$$

— напруженість внутрішнього електричного поля, яке виникає внаслідок згинної деформації елемента оболонки; d_{31} — п'єзоелектрична стала; k_p — статичний планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку; $E_z^{(0)}$ — напруженість внутрішнього електричного поля, яке виникає внаслідок деформації розтягу—стиску елемента оболонки.

Рівняння руху тонких п'єзокерамічних оболонок з товщинною поляризацією отримані у роботі [5]. У даному випадку осесиметричних коливань циліндричної оболонки вирази для інтегральних характеристик механічного поля — зусиль N_x , N_ϕ та моментів M_x , M_ϕ , а також для електричної індукції $D_z^{(0)}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} N_x &= D_N [\epsilon_x^{(0)} + \nu \epsilon_\phi^{(0)} - d_{31}(1+\nu)E_z^{(0)}]; \\ N_\phi &= D_N [\nu \epsilon_x^{(0)} + \epsilon_\phi^{(0)} - d_{31}(1+\nu)E_z^{(0)}]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$M_x = \bar{D}_M [\chi_x + \bar{\nu} \chi_\phi]; \quad M_\phi = \bar{D}_M [\bar{\nu} \chi_x + \chi_\phi];$$

$$D_z^{(0)} = \epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[E_z^{(0)} + \frac{1}{2d_{31}} \cdot \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} (\epsilon_x^{(0)} + \epsilon_\phi^{(0)}) \right]. \quad (6)$$

Тут жорсткості оболонки на розтяг D_N , згин \bar{D}_M та приведений коефіцієнт Пуассона $\bar{\nu}$ знаходяться за формулами

$$D_N = \frac{h}{s_{11}^E (1 - \nu^2)}; \quad \bar{D}_M = \frac{h}{12s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right);$$

$$\bar{v} = v + \frac{1+v}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \Big/ 1 + \frac{1+v}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2}, \quad (7)$$

де $v = -s_{12}^E/s_{11}^E$ – коефіцієнт Пуассона; s_{11}^E, s_{12}^E – пружні піддатливості кераміки, виміряні при сталому (нульовому) електричному полі; ϵ_{33}^T – діелектрична проникність кераміки, виміряна при сталих (нульових) механічних напруженнях.

Рівняння осесиметричних коливань п'єзокерамічної циліндричної оболонки з товщиною поляризацією в амплітудах отримаємо у вигляді:

$$\alpha h^2 \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \lambda^2 \right) w + \frac{v}{r_0} \frac{du}{dx} = \frac{p+p_0}{D_N} + \frac{1+v}{r_0} d_{31} E_z^{(0)}; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^2 u + \frac{v}{r_0} \frac{dw}{dx} = 0,$$

де $\alpha = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1+v}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right)$; $\lambda = \frac{\omega}{c_k}$; c_k – швидкість звуку в кераміці; ρ – густина кераміки.

Систему диференціальних рівнянь (8) слід доповнити наступними граничними умовами на контурах оболонки $x = \pm l$:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\pm l} = 0; \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=\pm l} = 0; \quad u|_{x=\pm l} = u_0, \quad (9)$$

де u_0 – амплітуда переміщень торцевої пластини.

Рівняння малих акустичних коливань нев'язкої стисливої рідини, яка наповнює оболонку, має вигляд [6]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \kappa^2 \Phi = 0, \quad (10)$$

де $\kappa = \frac{\omega}{c_*}$; c_* – швидкість звуку в рідині. Для амплітуди потенціалу швидкостей Φ , амплітуди швидкості частинок рідини \bar{v} та тиску в рідині p мають місце наступні співвідношення:

$$\bar{v} = -\text{grad } \Phi; \quad p = \omega \rho_* \Phi, \quad (11)$$

де ρ_* – густина рідини.

Граничні умови, які характеризують взаємодію рідини з оболонкою і торцевими пластинами, є рівностями швидкостей частинок рідини і точок поверхонь, до яких вона дотикається:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \omega w(x); \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=l} = \omega u_0. \quad (12)$$

Розв'язання крайової задачі. Розв'язок рівняння (10), який задовольняє граничні умови (12), знаходимо застосувавши інтегральне перетворення Фур'є:

$$\Phi(r, x) = -\omega \left[u_0 \frac{\cos(\kappa x)}{\kappa \sin(\kappa l)} + A_0 \frac{J_0(\kappa r)}{\kappa J_1(\kappa r_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_0(\beta_n r)}{\kappa J_1(\beta_n r_0)} \cos \frac{n\pi x}{l} \right], \quad (13)$$

де $\beta_n^2 = \kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$; A_0 та A_n – коефіцієнти Фур'є.

Тиск у рідині обчислюється за формулою

$$p(r, x) = -E_* \left[\frac{u_0}{l} \frac{(\kappa l) \cos(\kappa x)}{\kappa \sin(\kappa l)} + \frac{A_0}{r_0} \frac{(\kappa r_0) J_0(\kappa r)}{J_1(\kappa r_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r_0} \frac{(\kappa r_0)^2 J_0(\beta_n r)}{(\beta_n r_0) J_1(\beta_n r_0)} \cos \frac{n\pi x}{l} \right], \quad (14)$$

де $E_* = \rho_* c^*$ – модуль пружності рідини.

Розв'язок системи рівнянь (8), який задовольняє граничним умовам (9), знаходимо у вигляді рядів:

$$w(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}; \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (15)$$

де A_0 , A_n та B_n – коефіцієнти розкладу нормальних w та меридіональних u переміщень точок серединної поверхні оболонки в ряд Фур'є на проміжку $[0; l]$.

Умова розімкнутості електродів, які повністю покривають циліндричні поверхні оболонки, при осесиметричній деформації має вигляд [7]

$$\frac{1}{l} \int_0^l D_z^{(0)} dx = 0. \quad (16)$$

Звідси, враховуючи співвідношення (6), (2) та граничні умови (9), маємо

$$E_z^{(0)} = -\frac{1}{2d_{31}} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \left(\frac{u_0}{l} + \frac{A_0}{r_0} \right). \quad (17)$$

Із системи рівнянь (8) методом Стокса–Грінберга отримуємо рівняння для визначення невідомих A_0 , A_n та B_n з врахуванням співвідношень (9), (14) та (17).

$$\begin{aligned} a_0 \frac{A_0}{r_0} + b_0 \frac{u_0}{l} &= \frac{hp_0}{D_N}, \quad n = 0; \\ a_n \frac{A_n}{r_0} + b_n \frac{B_n}{l} &= l_n \frac{u_0}{l}, \quad n \geq 1; \\ c_n \frac{A_n}{r_0} - d_n \frac{B_n}{l} &= g_n \frac{u_0}{l}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Тут вводяться наступні позначення:

$$a_0 = [1 - (\lambda r_0)^2 + \delta] + R \frac{(\kappa r_0) J_0(\kappa r_0)}{J_1(\kappa r_0)}; \quad b_0 = \frac{h}{r_0} (v + \delta) + R;$$

$$a_n = \frac{h}{r_0} \left[1 - (\lambda r_0)^2 + \alpha \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 \left(\frac{r_0}{l} \right)^4 (n\pi)^4 \right] + R \frac{(\kappa r_0)^2 J_0(\beta_n r_0)}{(\beta_n r_0) J_1(\kappa r_0)};$$

$$b_n = v \left(\frac{h}{r_0} \right) n\pi; \quad c_n = v n\pi; \quad d_n = (\lambda l)^2 - (n\pi)^2;$$

$$l_n = -(-1)^n 2 \left[v \left(\frac{h}{r_0} \right) + R \frac{(\kappa l)^2}{(\kappa l)^2 - (n\pi)^2} \right];$$

$$g_n = -(-1)^n 2n\pi; \quad \delta = \frac{1+v}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2}; \quad R = \frac{\rho_* c_*^2}{\rho c_k^2}. \quad (19)$$

Розв'язки рівнянь (18) отримаємо у вигляді

$$\frac{A_0}{r_0} = \frac{hp_0}{a_0 D_N} - \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{u_0}{l}; \quad \frac{A_n}{r_0} = \frac{d_n l_n + b_n g_n}{a_n d_n + c_n b_n} \cdot \frac{u_0}{l}; \quad \frac{B_n}{l} = \frac{c_n l_n - a_n g_n}{a_n d_n - c_n b_n} \cdot \frac{u_0}{l}. \quad (20)$$

Умову для визначення u_0 формулюємо за допомогою рівняння руху круглої абсолютно жорсткої торцевої пластини радіусом r_0 і товщиною h_1 :

$$\frac{2}{r_0} N_x - \rho_M h_1 \omega^2 u_0 = p_0 + p_{cp}, \quad x = l, \quad (21)$$

де $p_{cp} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} p(r, l) r dr$ – середній тиск рідини на пластину; ρ_M – густина матеріалу пластини. З рівняння (21) отримуємо формулу для визначення нормованої величини амплітуди переміщень торцевої пластини:

$$H \approx E_Z^0 \frac{u_0}{l} = -\frac{hp_0}{\Delta D_N} \left(1 - \frac{\alpha_0}{a_0} \right), \quad (22)$$

де

$$\Delta = \gamma_0 + 2 \frac{b_0^2}{a_0} - 2 \frac{h}{r_2} \frac{(\lambda l) \cos(\lambda l)}{\sin(\lambda l)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_n l_n + b_n g_n)^2}{d_n (a_n d_n + b_n c_n)};$$

$$b_0 = 2 \left[\frac{h}{r_0} (v + \delta) + R \right];$$

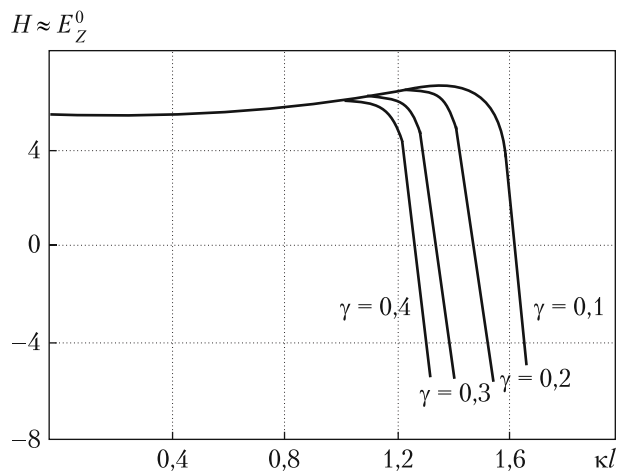


Рис. 2. Розподіл напруженості електричного поля

$$\gamma_0 = \frac{\rho_M}{\rho} \frac{h_1}{l} (\lambda l)^2 - R \frac{(\kappa l) \cos(\kappa l)}{\sin(\kappa l)} - 2 \frac{h}{r_0} \delta.$$

Підставляючи перше з співвідношень (20) і формулу (22) в (17), отримуємо вираз для обчислення компоненти напруженості електричного поля:

$$E_z^{(0)} = -\frac{hp_0}{2d_{31}D_N} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \cdot \frac{1}{a_0} \left[1 - \frac{(a_0 - b_0)(a_0 - 2b_0)}{a_0 \Delta} \right]. \quad (23)$$

Чисельні розрахунки виконані для п'єзокераміки PZT-4 [8] при наступній геометрії оболонки: $r_0 = l$; $\frac{h}{r_0} = 0,1$. Акустичним середовищем, що наповнює оболонку, вибрана вода; швидкість звуку $c_* = 1500$ м/с, густина $\rho_* = 1000$ кг/м³, матеріал торцевих пластин — сталь, $\rho_M = 7800$ кг/м³.

На рис.2. наведено розподіл напруженості електричного поля $E_z^{(0)}$ в залежності від частоти коливань. Розподіл показано для оболонок з відносною товщиною торцевих пластин 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Видно, що розподіл напруженості електричного поля практично однаковий для всіх чотирьох випадків, починаючи від статички до частоти резонансу чисто позовжніх коливань рідини. В цьому діапазоні значення напруженості електричного поля майже не залежать від частоти коливань. Зі збільшенням маси пластин на торцях оболонки дана область звужується.

Висновки. Таким чином, в роботі розглянуто вимушені коливання п'єзокерамічної оболонки, заповненої ідеальною стисливою рідиною, закритої з торців жорсткими пластинами, під дією зовнішнього механічного навантаження. Отримано розподіл напруженості електричного поля $E_z^{(0)}$, яке виникає внаслідок деформацій розтягу—стиску елемента оболонки в залежності від частоти коливань та відносною товщини торцевих пластин.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Grinchenko V.T, Vovk I.V, Matsypura V.T. Acoustic Wave Problems. 2018. Danbury: Begell House, 439 p.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
3. Babich I.Y., Borisejko A.V., Semenyuk N.P. On stability of cylindrical shells from composites beyond the elasticity level. *Zhongnan Gongye Daxue Xuebao*. 29, № 5. P. 24–31.
4. Babich I.Y., Semenyuk N.P., Boriseiko A.V. Stability and efficient design of cylindrical shells of metal composites subject to combination loading. *Int. Appl. Mech.* 1999. 35, № 6. P. 595–01.
5. Борисейко В.А., Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения. *Прикл. механика*. 1976. 12, № 2. С. 26–33.
6. Релей Д. Теория звука. Т. 2. Москва: Гостехиздат, 1955. 476 с.
7. Улитко А.Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. 1975. Вып. 15. С. 90–99.
8. Мезон У. Физическая акустика. Т. 1. Москва: Мир, 1966. С. 204–326.

Надійшло до редакції 04.10.2020

REFERENCES

1. Grinchenko, V. T., Vovk, I. V. & Matsypura, V. T. (2018). Acoustic Wave Problems. Danbury: Begell House, 439 p.
2. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Electroelasticity. Mechanics of connected fields in structural elements. T. 5. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
3. On stability of cylindrical shells from composites beyond the elasticity level Zhongnan Gongye Daxue Xuebao. 29, No. 5, pp. 24-31.
4. Babich, I. Y., Semenyuk, N. P. & Boriseiko, A. V. (1999). Stability and efficient design of cylindrical shells of metal composites subject to combination loading. Int. Appl. Mech., 35, No. 6, pp. 595-01.
5. Boriseyko, V. A., Grinchenko, V. T. & Ulitko, A. F. (1976). Relations of electroelasticity for piezoceramic shells of rotation. Appl. Mech., 12, No. 2, pp. 26-33 (in Russian).
6. Rayleigh, D. (1955). Theory of sound. T. 2. Moscow: Gostekhizdat (in Russian).
7. Ulitko, A. F. (1975). To the theory of oscillations of piezoceramic bodies. Thermal stresses in structural elements, No. 15, pp. 90-99 (in Russian).
8. Mason, W. (Ed.). (1966). Piezoelectric and piezomagnetic materials and their application in converters. Physical acoustics. T. 1-4. Moscow: Mir, pp. 204-326 (in Russian).

Received 04.10.2020

*O.V. Boryseiko*¹, *V.I. Denysenko*², *Yu.F. Didenko*²

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv

²Kyiv National University of Trade and Economics

E-mail: b12313@ukr.net, d0212@ukr.net

VIBRATIONS OF A CYLINDRICAL
PIEZOSHELL FILLED WITH A FLUID

Stationary oscillations of a piezoceramic cylindrical shell with thickness polarization under the action of a time-harmonic mechanical load in the form of an external pressure are considered. The shell has a finite length and is closed at the ends with rigid plates. The inner volume of the shell is filled with a non-viscous compressible liquid. A continuous thin electrode coating is applied to the cylindrical surfaces of the shell. Surface electrodes are considered open. The equations of axisymmetric oscillations and the corresponding boundary conditions at the ends are written in the problem statement for the shell. A problem is formulated also for determining the motion in the form of small oscillations of a liquid inside the shell, as well as the boundary conditions for the equality of velocities of liquid particles and the shell on their contact surfaces. An analytic expression is given for determining the distribution of the thickness component of the electric field strength, which arises due to the deformation of the shell element, depending on the frequency of oscillations of the external mechanical load. The results of numerical calculations are shown.

Keywords: *a piezoceramic shell, axisymmetric vibration, external pressure, rigid plate, small vibrations of liquid.*