

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.028>

УДК 539.3

Я.Я. Рушицький, В.М. Юрчук

Інститут механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, Київ

E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Нетипова еволюція поодинокі хвилі, що поширюється в нелінійно пружному середовищі

Представлено членом-кореспондентом НАН України Я.Я. Рушицьким

Описано та прокоментовано нетипову еволюцію поодинокі циліндричної хвилі, яка поширюється в нелінійно пружному середовищі і має початковий профіль у вигляді функції Макдональда. Для аналізу використано наближений метод обмеження на градієнт деформації і враховано три перші наближення. При цьому показано та прокоментовано два приклади типової еволюції хвилі — гармонічної і дзвіноподібної хвиль, де враховано теж перші три наближення. Проведене числове моделювання показало, що нетиповий початковий профіль (профіль без звичного горба) еволюціонує нетипово — профіль стає значно більш крутим, залишаючись опуклим вниз, і підосва профіля зменшується майже вдвічі.

Ключові слова: подинокі нелінійно пружна хвиля, еволюція початкового профіля хвилі, функція Макдональда, метод обмеження на градієнт деформації, три перші наближення.

Поодинокі хвилі (solitary wave) означаються як такі, що мають профіль, який описується функцією, заданою на скінченному відрізьку, або функцією скінченної ваги. Типовим прикладом поодинокі хвилі є хвиля з профілем у вигляді функції Гаусса (дзвіноподібна чи горбоподібна хвиля, яка є функцією скінченної ваги). До класу цих хвиль відносяться солітони (solitons), які мають теж профілі у вигляді горба, але є точними розв'язками певних нелінійних рівнянь. До прикладу, найпростіша подинокі хвиля може описуватись класичним розв'язком Д'Алямбера $u(x, t) = f(x - ct)$ лінійного хвильового рівняння $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ і солітон $u(x, t) = \alpha \operatorname{sech}[\sqrt{\alpha/12\beta}(x - (\alpha/3)t)]$ є точним розв'язком рівняння Кортевега-де Вріза $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$. Суттєва відмінність між поодинокими хвилями і солітонами полягає у тому, що поодинокі хвилі взаємодіють між собою, а солітони — ні.

До вивчення еволюції хвилі застосовується одна з найбільш розвинених моделей нелінійної теорії пружності — п'ятиконстантна модель Мурнагана [1]. Найпростіший варіант нелінійного хвильового рівняння в рамках цієї моделі включає лише квадратичну неліній-

Цитування: Рушицький Я.Я., Юрчук В.М. Нетипова еволюція поодинокі хвилі, що поширюється в нелінійно пружному середовищі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 12. С. 28–37. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.028>

ність. Таке рівняння досліджене досить докладно для випадку плоских хвиль [2–4]. Саме плоскі хвилі при поширенні виявляють типову еволюцію початкового профіля.

2. Два приклади типової еволюції початкового профіля хвилі – гармонічний та дзвіно-подібний профілі. Розглянемо поширення плоскої поздовжно поляризованої хвилі за умови, що лише ця хвиля початково збуджується і рухається в напрямку осі абсцис у вигляді хвилі зміщення $u_1(x_1, t)$. Тоді вона описується квадратично нелінійним хвильовим рівнянням [2–4]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (1)$$

де ρ – густина; λ, μ, A, B, C – пружні сталі моделі Мурнагана і $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – швидкість хвилі в лінійному наближенні; $N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]$.

Приклад 1. Гармонічний профіль. Початковий профіль хвилі визначається формулою $u_1(x_1, t = 0) = u_{10} \cos k_L x_1$ (u_{10} – початкова амплітуда хвилі, k_L – хвильове число). Тоді відповідна хвиля у лінійній теорії має вигляд

$$u_1(x_1, t) = u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t) \quad (\omega \text{ – частота хвилі}). \quad (2)$$

Класичний підхід до аналізу хвилі з початковим профілем (2) в рамках опису рівнянням (1) полягає у застосуванні методу послідовних наближень. Нульове наближення є розв’язком лінійного хвильового рівняння, яке відповідає (1) і він збігається з (2). Перше наближення знаходиться як розв’язок неоднорідного лінійного хвильового рівняння $u_{1,tt}^{(1)} - (c_L)^2 u_{1,11}^{(1)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(0)} u_{1,1}^{(0)}$ і складається з суми двох перших гармонік

$$\begin{aligned} u_1^{(0+1)}(x_1, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) = \\ &= u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{10})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

Розв’язок (3) зручно представити у коротшому вигляді

$$\begin{aligned} u_1^{(0+1)}(x, t) &= u_{10} \cos \sigma + u_{10} M x_1 \cos 2\sigma, \\ M &= \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} u_{10} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{10} \frac{k_L^2}{c_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{10} \frac{\omega^2}{c_L^4}, \quad \sigma = k_L x_1 - \omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Друге наближення знаходиться як розв’язок неоднорідного лінійного хвильового рівняння $u_{1,tt}^{(2)} - (c_L)^2 u_{1,11}^{(2)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(1)} u_{1,1}^{(1)}$ і складається з суми першої, другої і четвертої гармонік [2–4]

$$\begin{aligned} u_2^{(0+1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = u_{10} \cos \sigma + u_{10} M_L x_1 \cos 2\sigma + \\ &+ u_{10} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L)^2 (x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

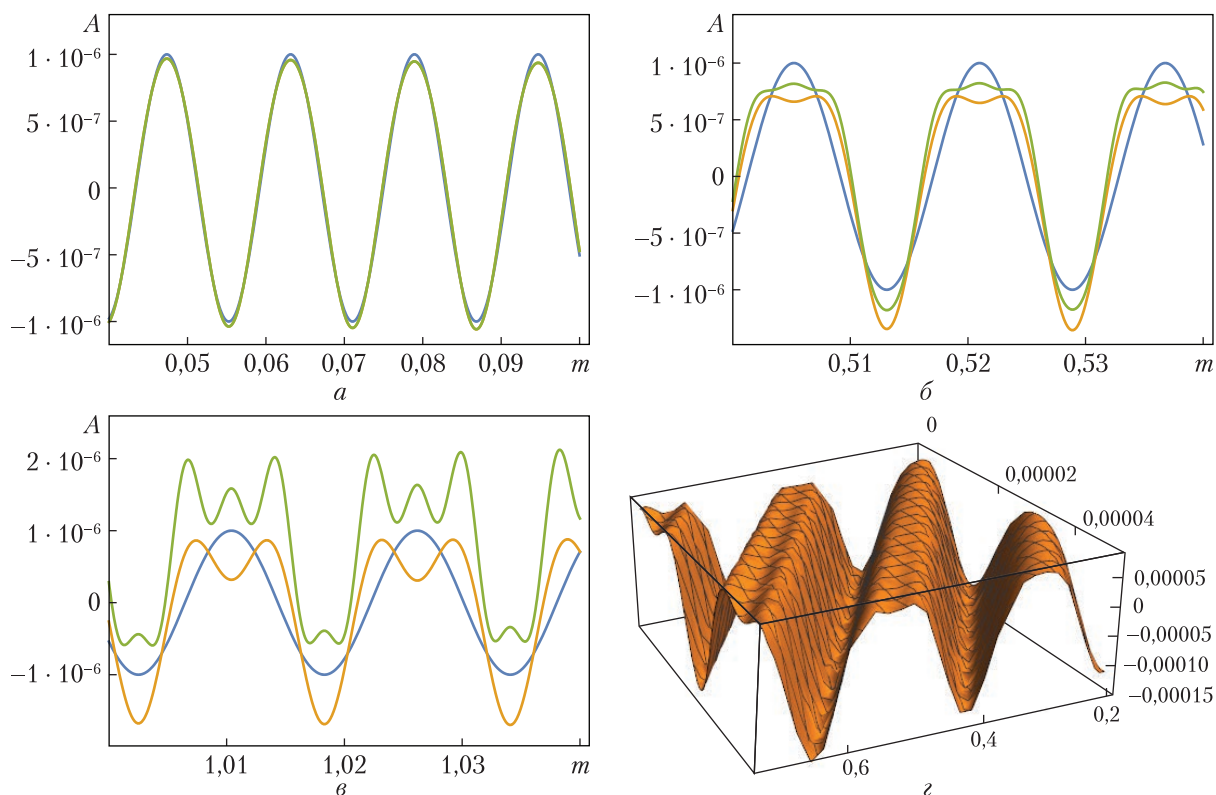


Рис. 1

На рис. 1 показана залежність амплітуди хвилі від часу і відстані поширення хвилі — три стадії еволюції хвилі, отримані при числовому моделюванні за формулами (4) та (5) для гранульованого композитного матеріалу “гранули — вольфрам, матриця — алюміній”. Рис. 1, *a* відповідає початковій стадії хвильового руху для всіх трьох наближень, рис. 1, *б* — більш тривалому руху хвилі (приблизно 10 довжин хвилі) і першому наближенню (верхня лінія для додатних значень амплітуди), першому + другому (нижня лінія для додатних значень амплітуди), і першому + другому + третьому (середня лінія для додатних значень амплітуди). Рис. 1, *в* відповідає вдвічі більшій тривалості руху хвилі (приблизно 20 довжин хвилі) і першому наближенню (середня лінія для додатних значень амплітуди), першому + другому (верхня лінія для додатних значень амплітуди) і першому + другому + третьому (нижня лінія для додатних значень амплітуди). Рис. 1, *г* показує тривимірне зображення еволюції в координатах “час поширення — відстань поширення — зміщення”.

Рис. 1 ілюструє також ряд нелінійних хвильових ефектів. Відзначимо тут два ефекти, які свідчать про типовість еволюції. Перший ефект полягає у тому, що хвиля з періодичною системою горбів на кожному періоді перетворює в процесі руху один горб на два, а згодом і на три. Другий ефект пов’язаний зі сталістю періоду — він не змінюється впродовж еволюції хвилі.

Приклад 2. Дзвіноподібний профіль. Початковий профіль хвилі визначається формулою $u_1(x_1, t = 0) = u_{10} e^{-[(ax_1)^2/2]}$, де a — параметр, що задає довжину підосви хвилі.

Тоді відповідна хвиля у лінійній теорії має вигляд

$$u_1(x_1, t) = u_{10} e^{-\sigma^2/2}, \quad (6)$$

де фаза задається виразом $\sigma = a(x_1 - c_L t)$.

Далі нелінійне хвильове рівняння (1) трансформується до вигляду лінійного рівняння зі змінною швидкістю поширення хвилі

$$u_{1,tt} - v^2 u_{1,11} = 0, \quad v = v_L \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}, \quad \alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]. \quad (7)$$

Рівняння (7) розв'язується методом обмеження на градієнт зміщення [4, 5].

Згідно з методом, нульове наближення відповідає лінійному хвильовому рівнянню $u_{1,tt} - c_L^2 u_{1,11} = 0$ і має вигляд $u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{10} e^{-a^2(x_1 - v_L t)^2/2}$. Розв'язок, що відповідає двом першим наближенням (нульовому та першому), складається з двох доданків

$$u_1^{(0+1)}(x_1, t) = A^0 e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]} - (1/2)t\alpha c_L a^2 (x_1 - c_L t)^2 (A^0)^2 e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}. \quad (8)$$

Розв'язок, що відповідає трьом першим наближенням (нульовому, першому та другому) складається з трьох доданків

$$u(x_1, t) = A^0 e^{-\sigma^2/2} - (1/2)\alpha v_L a^2 t (A^0)^2 \sigma^2 e^{-\sigma^2} - (1/8)\alpha^2 v_L a^3 t (A^0)^3 \sigma^3 e^{-3\sigma^2/2}. \quad (9)$$

Слід зазначити, що у вираз для амплітуди хвилі (9) входить явно квадрат фази σ у другому доданку і куб — у третьому. Цей факт є характерним для поодиноких хвиль і не присутній у вказаному вище нелінійному описі еволюції гармонічної хвилі.

Характерну залежність амплітуди хвилі u_1 від відстані поширення хвилі x_1 показано на рис. 2. Усі графіки побудовані за формулою (9). На рис. 2, а нижній графік показує початковий профіль $u_1^{(0)}$, верхній відповідає профілю $u_1^{(0+1)}$ (два перші наближення) і початковій стадії еволюції. Рис. 2, б відповідає розвиненій стадії еволюції і відрізняється від попереднього лише верхнім профілем $u_1^{(0+1+2)}$, який тут вже побудовано з врахуванням перших трьох наближень. Рис. 2, в і рис. 2, г ілюструють два профілі ($u_1^{(0+1)}$ і $u_1^{(0+1+2)}$) і кожен утворений з двох горбів, але рисунки відрізняються шляхом, який пройшла хвиля (другий відповідає досить сформованій еволюції). Еволюція правого та лівого горбів є різною — врахування перших двох наближень показує підвищення лівого горба і зниження правого горба. Цей ефект є неочікуваним як і ряд інших нелінійних хвильових ефектів. Рис. 2, д показує тривимірне зображення еволюції в координатах “час поширення — відстань поширення — зміщення”.

Порівняння зі зміною профіля гармонічної хвилі показує, що дзвіноподібна хвиля змінює свій профіль дещо по-іншому. “Друга гармоніка” завжди дає від’ємну добавку. Отже “дзвін” в своїй верхній частині стає тоншим, тобто схили “дзвона” стають крутішими. Верхня частина “дзвона” западається і утворюються два “дзвони”. У проведеному дослідженні важливими є два ефекти, які свідчать про типовість еволюції гармонічної і дзвіноподібної хвиль. Перший ефект полягає у тому, що поодинокі хвиля з заданою підшвою горба перетворює в процесі руху один горб на два, а згодом і на три. Другий ефект пов’язаний зі сталістю підшви — вона не змінюється впродовж еволюції хвилі.

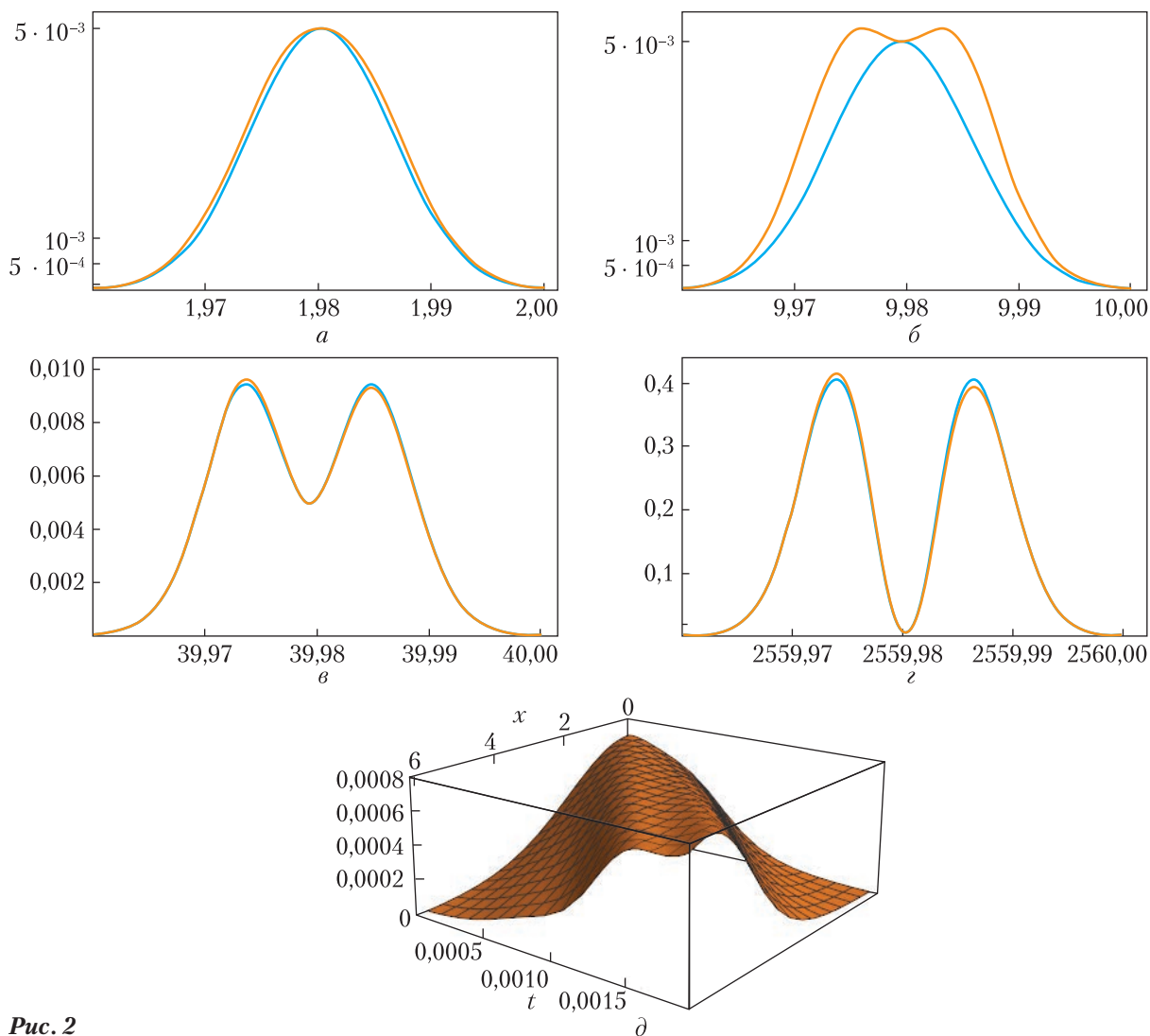


Рис. 2

3. Нетипова еволюція початкового профіля поодинокіої циліндричної хвилі у вигляді функції Макдональда. Розглянемо випадок циліндричної радіальної хвилі зміщення, яка описується нелінійним хвильовим рівнянням, близьким до того, яке описує плоскі хвилі. У лінійній теорії пружності така хвиля поширюється в нескінченному просторі з циліндричною круговою порожниною. Рух цієї хвилі в радіальному напрямку збуджується імпульсом, прикладеним до поверхні порожнини. Циліндрична система координат $Or\vartheta z$ вибирається таким чином, щоб вісь Oz збігалася з віссю порожнини. Тоді проблема є осесиметричною і залежить від двох змінних – радіуса r та часу t . Ненульовими є радіальне зміщення u_r і три компоненти тензора напружень $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}$. Лінійне рівняння руху має вигляд

$$\mu \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \left[\frac{1}{r} (ru_r)_{,r} \right]_{,r} - \rho u_{r,tt} = 0. \quad (10)$$

Відповідне нелінійне рівняння в рамках моделі Мернагана є таким:

$$(c_L)^{-2} u_{r,tt} - \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = -\alpha_1 u_{r,r} u_{r,r} - \alpha_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \alpha_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \alpha_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \alpha_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2, \quad (11)$$

$$\alpha_1 = 3 + \frac{2(A+3B+C)}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda+2B+2C}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_3 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu},$$

$$\alpha_4 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+2C}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_5 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+C}{\lambda+2\mu}.$$

Існує певне обґрунтування спрощення рівняння (11) до вигляду

$$(c_L)^2 (1 - \alpha_1 u_{r,r}) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (12)$$

Отже, рівняння (12), яке описує циліндричну радіальну хвилю, має структуру, ідентичну відповідному рівнянню для плоскої поздовжньої хвилі — однорідному лінійному хвильовому рівнянню (1) зі швидкістю хвилі, нелінійно залежною від розв'язку. Це дає можливість застосувати до аналізу рівняння (12) метод обмеження на градієнт зміщення. Однак тут нова ситуація порівняно з плоскими хвилями — оператор хвильового рівняння інший, градієнт зміщення інший, сама хвиля і її фаза інші тощо. Початковий профіль хвилі треба приймати у вигляді функції $u_r(r, t=0) = F(r)$. Тоді хвиля матиме представлення

$$u_r(r, t) = u_r^0 F[a(r - vt)], \quad (13)$$

де невідома швидкість хвилі задається виразом $v = \sqrt{1 - \alpha_1 u_{r,r}} c_L$ і u_r^0 є відомим постійним початковим амплітудним множником.

Якщо далі перетворити вираз для швидкості за умови малості добутку $|\alpha_1 u_{r,r}| < 1$ до вигляду $\sqrt{1 - \alpha_1 u_{r,r}} \approx 1 - (1/2)\alpha_1 u_{r,r} + (1/8)(\alpha_1)^2 (u_{r,r})^2$ (тут збережено перші три члени у розкладі в ряд), то хвилю (13) можна наближено представити у вигляді

$$u_r(r, t) \cong u_r^0 F[a(r - c_L t) - (1/2)ac_L \alpha_1 u_{r,r} t + (1/8)ac_L (\alpha_1)^2 (u_{r,r})^2 t]. \quad (14)$$

Введення нового малого параметра

$$|\delta^* = -(1/2)ac_L \alpha_1 u_{r,r} [1 - (1/4)\alpha_1 u_{r,r}] t| < 1, \quad (15)$$

який включає три відомі величини — одна визначає довжину підшови поодинокї хвилі a , друга є швидкістю хвилі c_L у лінійному наближенні, третя α_1 пов'язана з властивостями матеріалу і невідомим градієнтом зміщення $u_{r,r}(r, t)$, уможливорює коротке представлення формули (15)

$$u_r(r, t) = u_r^0 F[a(r - vt)] = u_r^0 F[a(r - c_L t) + \delta^*] = u_r^0 F(\sigma + \delta^*). \quad (16)$$

Обмеження на градієнт зміщення (15) створює можливість наближеного представлення хвилі (16) у вигляді ряду Тейлора в околі лінійного значення фази хвилі $\sigma = a(r - c_L t)$ і збереження лише перших двох членів ряду. Тоді хвилю (16) можна представити наближено формулою

$$u_r(r, t) \approx u_r^0 F(\sigma) - (1/2) u_r^0 F'(\sigma) a c_L \alpha_1 u_{r,r} [1 - (1/4) \alpha_1 u_{r,r}] t. \quad (17)$$

Підстановка наближеного виразу для градієнта деформації $u_{r,r}(r, t) \cong u_r^0 a F'(\sigma)$ в представлення (17) дає формулу для обчислення профіля хвилі

$$u_r(r, t) \approx u_r^0 F(\sigma) - (1/2) a^2 (u_r^0)^2 c_L \alpha_1 t [F'(\sigma)]^2 [1 - (1/4) u_r^0 a \alpha_1 F'(\sigma)]. \quad (18)$$

Ця формула включає три доданки, які можна розглядати як перші три наближення — перший відповідає лінійному підходу, другий вводить квадратичну нелінійну добавку до лінійного підходу, третій вводить кубічну добавку. Така ж ситуація була помічена у відповідній формулі для плоских хвиль.

Зауважимо, що при застосуванні методу послідовних наближень третє наближення вводиться як добавка четвертого порядку, хоча числове моделювання показує третю гармоніку замість четвертої.

Розглянемо зараз випадок, коли функція $F[a(r - vt)]$ описує поодинокую і не гармонічну в часі хвилю. Почнемо з лінійного підходу. Відповідне нелінійному хвильовому рівнянню (12) лінійне рівняння (10) має розв'язок у вигляді циліндричної функції уявного аргумента — функції Макдональда $K_\lambda(r)$.

Отже, функція $F(\sigma) = K_0(\sigma)$ може бути вибрана для опису початкового профіля хвилі (18). Тоді еволюція хвилі описується формулою (18)

$$u_r(r, t) \approx u_r^0 a K_0(\sigma) - (1/2) a^3 (u_r^0)^2 c_L \alpha_1 t [K_0'(\sigma)]^2 [1 - (1/2) u_r^0 \alpha_1 a K_0'(\sigma)]. \quad (19)$$

Оскільки $K_0'(\sigma) = -K_1(\sigma)$, то формулу (19) можна записати у вигляді, зручному для числового моделювання

$$u_r(r, t) \approx K_0(a(r - c_L t)) - (1/2) a^3 (u_r^0)^2 \alpha_1 a c_L t \times \\ \times [K_1(a(r - c_L t))]^2 [1 + (1/4) u_r^0 \alpha_1 a K_1(a(r - c_L t))] \quad (20)$$

Формула (20) описує зміну початкового профіля хвилі через пряму залежність нелінійних доданків від часу. Особливістю функції Макдональда є відсутність горба. Її графік нагадує графік гіперболи

Характерну залежність амплітуди хвилі u_r від відстані поширення хвилі r ілюструє рис. 3. Усі графіки побудовані за формулою (20). Рис. 3, a відповідає стадії, коли нелінійність має невеликий вплив на еволюцію. Ліва лінія відповідає лінійному наближенню (неспотворений профіль), а права — двом першим наближенням. Отже, спотворений профіль стає злегка крутішим і зміщується вправо від початкового профілю. Підосва спотвореного профілю скорочується.

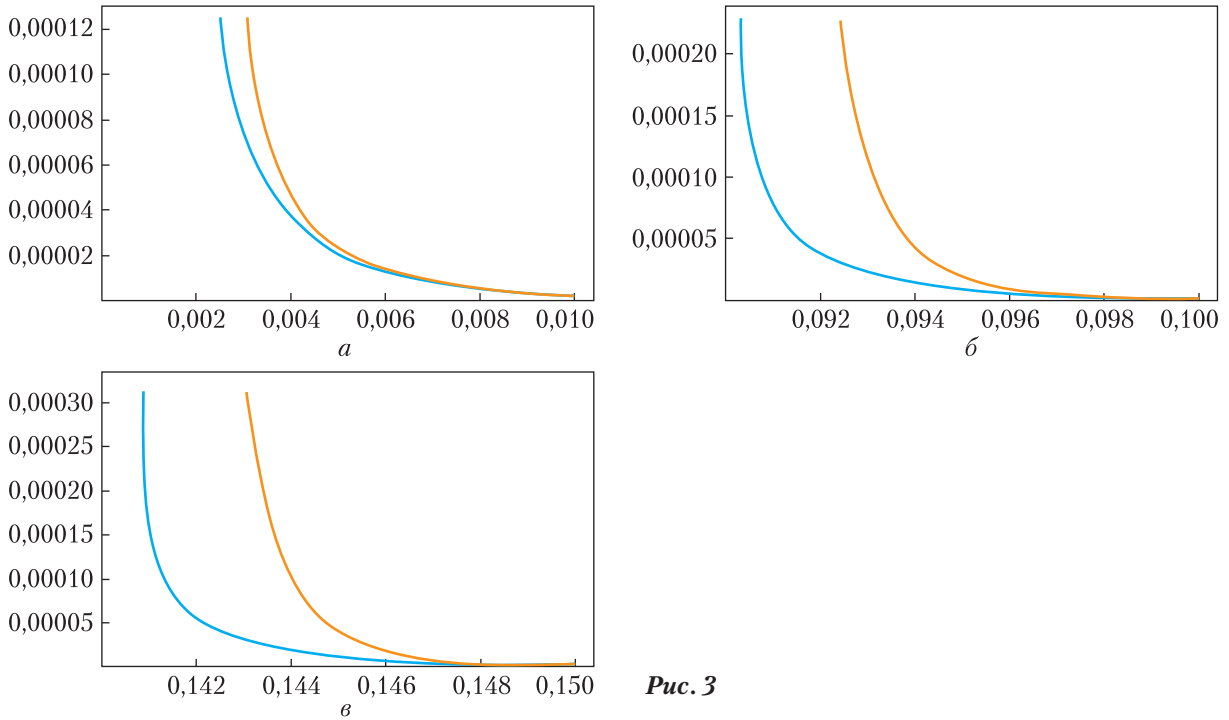


Рис. 3

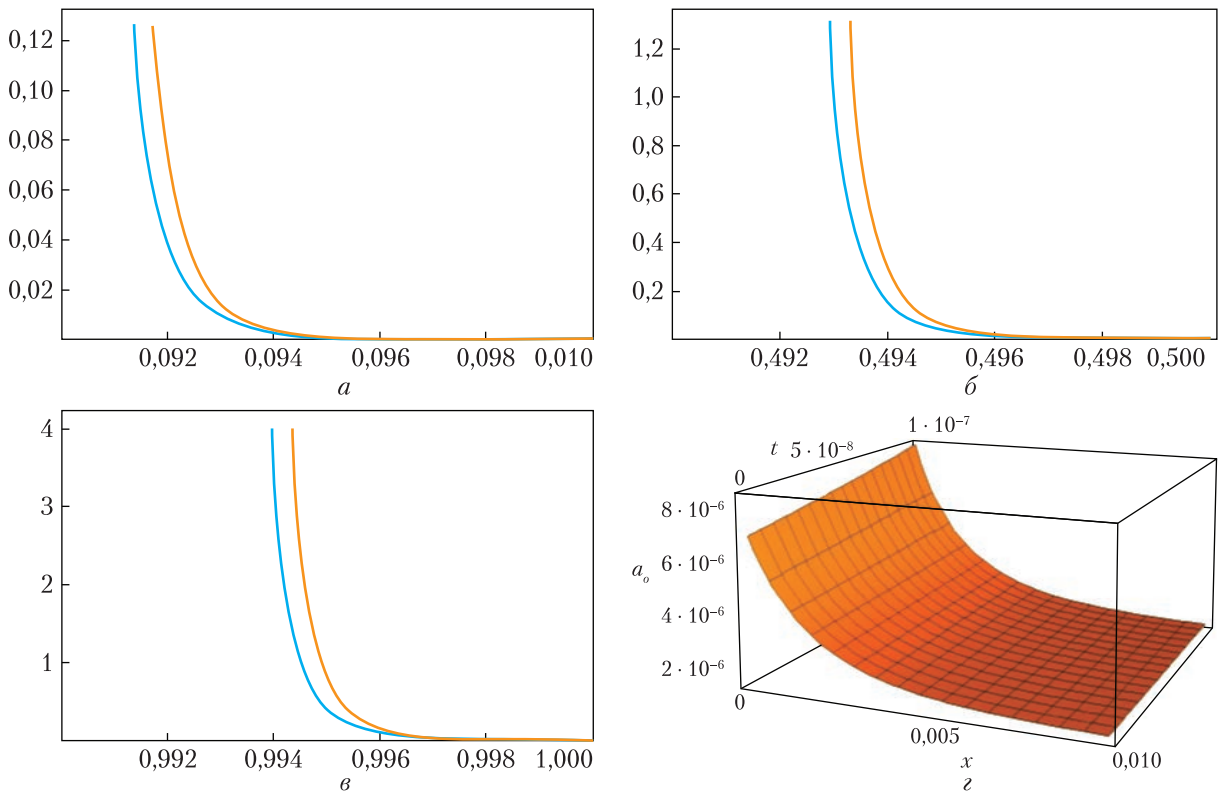


Рис. 4

Рис. 3, б показує більш розвинену еволюцію початкового профілю (у 45 разів довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередній стадії особливості. Спотворений профіль стає ще більш крутим і ще більш зміщується вправо від початкового профіля. Підшва спотвореного профіля стає ще коротшою.

На рис. 3, в показано більш розвинену еволюцію початкового профіля (в 70 разів довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередніх стадіях особливості. Спотворений профіль стає ще більш крутим і продовжує зміщуватися вправо від початкового профіля. Підшва спотвореного профіля продовжує скорочуватися і стає практично вдвічі меншою.

На рис. 4 порівнюються перші два наближення та перші три наближення. Він показує дві лінії. Ліва лінія відповідає першим двом наближенням, а права лінія — першим трьом. Рис. 3, а-в порівнюють профілі для випадків довших відстаней поширення хвилі. Це порівняння свідчить, що для стандартного набору параметрів третє наближення вводить невеликий порівняно з другим внесок. Таким чином, збільшення відстані поширення хвилі збільшує ефект, показаний на попередніх стадіях еволюції. Рис. 3, г показує тривимірне зображення еволюції в координатах “час поширення — відстань поширення — зміщення”.

Таким чином, проведене числове моделювання показало, що нетиповий початковий профіль (профіль без звичного горба) еволюціонує нетипово — профіль стає значно більш крутим, залишаючись опуклим вниз, і підшва профіля зменшується майже вдвічі.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Murnaghan F. Finite Deformation in an Elastic Solid. 3rd ed. Gloucester, MA, USA: Peter Smith Publisher Inc. 1985. 140 p.
2. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of Engineering Mechanics. Heidelberg: Springer. 2014. 454 p.
3. Rushchitsky J.J. Theory of Waves in Materials. Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2012. 270 p.
4. Rushchitsky J.J. Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution, Chapter 3 in the book “Understanding Plane Waves”. Ed. William A.Cooper. London: Nova Science Publishers, 2019. 320 p. P.58–80.
5. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles. *Int. App. Mech.* 2017. **53**. № 1. P.104-110. doi: 10.1007/s10778-017-0794-6

Надійшло до редакції 20.10.2020

REFERENCES

1. Murnaghan, F. (1985). Finite Deformation in an Elastic Solid. Gloucester, MA, Peter Smith Publisher Inc., 3th ed., pp. 140.
2. Rushchitsky, J. J. (2014). Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of Engineering Mechanics. Heidelberg: Springer.
3. Rushchitsky, J. J. (2012). Theory of Waves in Materials. Copenhagen: Ventus Publishing ApS.
4. Rushchitsky, J. J. (2019). Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution, Chap. 3 in the book “Understanding Plane Waves”. Ed. William A.Cooper. London: Nova Science Publishers.
5. Yurchuk, V. N. & Rushchitsky, J. J. (2017). Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles. *Int. App. Mech.*, 53, No. 1, pp. 104-110. doi: 10.1007/s10778-017-0794-6

Received 20.10.2020

J.J. Rushchitsky, V.M. Yurchuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

ATYPICAL EVOLUTION OF A SOLITARY WAVE PROPAGATING IN THE NONLINEAR ELASTIC MEDIUM

The atypical evolution of a solitary cylindrical wave that propagates in the nonlinear elastic medium and has the initial profile in the form of the Macdonald function is described and commented. In the analysis, the approximate method of restriction on the gradient of a deformation is used, and three first approximations are taken into account. Two examples of typical wave evolution – harmonic and bell-shaped waves – are shown and commented, where the first three approximations are also taken into account. The numerical modeling showed that the atypical initial profile (profile without a hump) evolves atypically – the profile becomes essentially steeper, saving the concavity, and the wave bottom decreases almost two times.

Keywords: *solitary nonlinear elastic wave, evolution of a wave initial profile, Macdonald functions, method of restriction on the gradient of a deformation, three first approximations.*