ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.003
УДК 517.9

С.М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
E-mail: chujko-slav@ukr.net

Обобщение метода Ньютона—Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И.И. Скрыпником

Найдены конструктивные условия разрешимости и итерационная схема построения решений систем нелинейных вещественных уравнений в случае якобиана постоянного ранга. Полученные результаты являются обобщением метода Ньютона—Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений, число компонент которых не совпадает с числом неизвестных.

Ключевые слова: *нелинейные вещественные уравнения, модификация метода Ньютона-Канторовича, полуобратная матрица, псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица.*

1. **Постановка задачи.** Исследована задача о нахождении решений $z \in \mathbb{R}^n$ нелинейного вещественного уравнения [1]

$$f(z) = 0. \quad (1)$$

Здесь $f(z)$ — нелинейная вектор-функция, дважды непрерывно дифференцируемая по неизвестной $z \in \mathbb{R}^n$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, при этом оператор $f(z): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является нетеровым [2, 3]. Для построения итерационной схемы, сходящейся к решению $z^* \in \Omega$, воспользуемся методом Ньютона [1, 4, 5].

Интерес к использованию метода Ньютона связан с его эффективным применением при решении нелинейных уравнений, а также в теории нелинейных колебаний [2, 3], в том числе в теории нелинейных нетеровых краевых задач [2, 3, 6—8]. Пусть найдено приближение z_k, достаточно близкое к точному решению z^* уравнения (1).

Пусть найдено приближение z_k, достаточно близкое к точному решению z^* уравнения (1). Запишем разложение нелинейной вектор-функции $f(z)$ окрестности точного решения:

$$f(z^*) = f(z_k) + f'(z_k)\,(z^* - z_k) + R(\xi_k, z^* - z_k)\,,$$

Цитування: Чуйко С.М. Обобщение метода Ньютона—Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi 2020.03.003

где

$$R(\xi_k, z^*-z_k) := \int_0^1 (1-s)\, d^2 f(\xi_k, z^*-z_k)\, ds, \quad \xi_k := z^* + s(z^*-z_k);$$

здесь ξ_k — точка, расположенная между точками z^* и z_k, f' — производная по Фреше. В малой окрестности точного решения $z^* \in \Omega$ имеет место приближенное равенство

$$f(z_k) + J_k(z^*-z_k) = 0, \quad J_k := f'(z_k),$$

поэтому для нахождения следующего приближения z_{k+1} к точному решению естественно положить

$$f(z_k) + J_k(z_{k+1}-z_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

здесь

$$J_k := f'(z_k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

— якобиан преобразования $f(z): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Традиционным требованием для нахождения следующего приближения z_{k+1} к точному решению являлось условие фредгольмовости задачи о нахождении решений линейного уравнения (2), а именно [1, 2]: $m = n$, при этом якобиан J_k предполагался невырожденным. Условие фредгольмовости задачи о нахождении решений линейного уравнения (2) было ослаблено в статье [9], таким образом была исследована нетерова задача: $m \neq n$, при этом было построено псевдорешение уравнения (2). В статье [10] для уравнения (2) в случае $m \neq n$ были получены достаточные условия разрешимости: $P_{J_k^*} = 0$, а также предложена итерационная схема для нахождения решения уравнения (1) и доказана ее квадратичная сходимость. Здесь $P_{J_k^*}$ — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор [2, 10]:

$$P_{J_k^*}: \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$$

Заметим, что условие $P_{J_k^*} = 0$ равносильно требованию полноты ранга матрицы J_k и возможно лишь в случае $m \leqslant n$. Поставим задачу о нахождении достаточных условий разрешимости и построении решения уравнения (1) при условии $P_{J_k^*} \neq 0$.

2. **Основной результат.** Предположим, что якобиан J_k имеет постоянный ранг: $\operatorname{rank} J_k := \sigma_k := \sigma, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$ при этом линейный непрерывный оператор

$$f'(z): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

нетеров [1, с. 636]:

$$\dim N(f') - \dim N(f'^*) = m - n < \infty.$$

Как известно [11, 12], любая $(m\times n)$- матрица J_k в определенном базисе может быть представлена в виде $J_k = R_k J_{\sigma_k} S_k$; здесь R_k и S_k — невырожденные матрицы,

$$J_{\sigma_k} := \begin{pmatrix} I_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Обозначим вектора

$$y_k := S_k z_k := \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad R_k^{-1} f(z_k) := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix}, \quad u_k, \varphi_k \in \mathbb{R}^{\sigma}, \quad v_k, \psi_k \in \mathbb{R}^{n-\sigma}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

При условии постоянства ранга якобиана J_k, в случае $\psi_k = 0$, задача о нахождения следующего приближения z_{k+1} к точному решению z^* уравнения (1) разрешима:

$$S_k^{-1} J_{\sigma_k}^{+} R_k^{-1} f(z_k) + z_{k+1} - z_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

здесь $J_{\sigma_k}^{+} = J_{\sigma_k}^{*}$ — псевдообратная (по Муру—Пенроузу) матрица [2, 13],

$$J_k^{-} = S_k^{-1} J_{\sigma_k}^{+} R_k^{-1}$$

— полуобратная матрица для якобиана J_k, по определению удовлетворяющая двум условиям [13, с. 51]:

$$J_k^{-} J_k J_k^{-} = J_k^{-}, \quad J_k J_k^{-} J_k = J_k .$$

Справедливость последнего утверждения легко проверить непосредственной подстановкой предложенного представления полуобратной матрицы в последние равенства. Покажем, что итерационная схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^{-} f(z_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

сходится к точному решению z^* уравнения (1). Предположим, что в окрестности точного решения z^* имеют место неравенства $\| J_k^{+} \| \leqslant \sigma_1(k)$ и

$$\| d^2 f(\xi_k, z^* - z_k) \| \leqslant \sigma_2(k) \| z^* - z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Используя разложение нелинейной вектор-функции $f(z)$ окрестности точного решения и равенство (3), получаем

$$f'(z_k)(z^* - z_k) = -R(\xi_k, z^* - z_k) .$$

следовательно,

$$\| \tilde{z} - z_{k+1} \| \leqslant \frac{1}{2} \sigma_1(k) \sigma_2(k) \| z^* - z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Предположим, что существует константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left(\frac{1}{2} \sigma_1(k) \sigma_2(k) \right).$$

В этом случае имеет место оценка

$$\| z^* - z_{k+1} \| \leqslant \theta \| z^* - z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

которая означает, что в случае сходимости итерационной схемы (3) к точному решению уравнения (1), эта сходимость квадратичная. Найдем условие сходимости итерационной схемы (3) к точному решению уравнения (1); для этого используем следующие оценки:

$$\| z^*-z_1 \| \leqslant \theta \| z^*-z_0 \|^2, \quad \| z^*-z_2 \| \leqslant \theta^{1+2} \| z^*-z_0 \|^{2^2}, \ldots\ ,$$

$$\| z^*-z_k \| \leqslant \theta^{1+2+\ \ldots\ +2^{k-1}} \| z^*-z_0 \|^{2^k}, \ldots\ .$$

Таким образом, имеет место неравенство, аналогичное [4]:

$$\| z^*-z_k \| \leqslant \frac{1}{\theta} \left(\theta \| z^*-z_0 \|\right)^{2^k}, \ldots,$$

которое свидетельствует о сходимости итерационной схемы (3) к точному решению уравнения (1) при условии

$$\theta \| z^*-z_0 \| < 1. \tag{4}$$

На практике последнее неравенство можно заменить таким:

$$\theta_k \| z_k - z_0 \| < 1, \quad \theta_k := \frac{1}{2}\sigma_1(k)\sigma_2(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что для уравнения* (1) *выполнены следующие требования:*

1) нелинейная вектор-функция $f(z): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *дважды непрерывно-дифференцируема по неизвестной* $z \in \mathbb{R}^n$ *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;

2) в окрестности нулевого приближения $z_0 \in \Omega$ *имеют место неравенства*

$$f(z) \| J_k^+ \| \leqslant \sigma_1(k) \| d^2 f(\xi_k, z^*-z_k) \| \leqslant \sigma_2(k) \| z^*-z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

3) существует константа θ.

Тогда для якобиана J_k *постоянного ранга:* $\operatorname{rank} J_k := \sigma_k := \sigma, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, *при условии* (4), *в случае* $\psi_k = 0$, *для нахождения решения уравнения* (1) *применима итерационная схема* (3), *при этом скорость сходимости последовательности* (3) *к решению уравнения* (1) *квадратичная.*

Доказанная теорема обобщает соответствующие результаты [1, 10] на случай прямоугольного якобиана постоянного ранга. С другой стороны, доказанная теорема позволяет обобщить соответствующие результаты теории в нелинейных нетеровых краевых задачах [1—3, 8, 14, 15] на случай прямоугольного якобиана постоянного ранга.

Пример. Итерационная схема (3) применима для нахождении решения нелинейного уравнения (1), где вектор-функции

$$f(z) := \begin{pmatrix} u + \sin v + \cos u \\ v + \sin u + \cos v \\ u + \sin u + \cos v \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Данная вектор-функция $f(z):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ определена в любой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и дважды непрерывно дифференцируема по z в этой области, при этом

$$J(z) := \begin{pmatrix} 1-\sin u & \cos v \\ \cos u & 1-\sin v \\ 1+\cos u & -\sin v \end{pmatrix}, \quad df(z) := J(z)\, dz, \quad dz := \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

кроме того,

$$d^2 f(z) := -\begin{pmatrix} \cos u\, du & \sin v\, dv \\ \sin u\, du & \cos v\, dv \\ \sin u\, du & \cos v\, dv \end{pmatrix} dz.$$

Положим

$$z_0 := -\begin{pmatrix} 0,455 \\ 0,455 \end{pmatrix}$$

при этом $\psi_0 \approx 0$, кроме того, $\operatorname{rank} J_0 = 2$. Таким образом, для первого шага итерационной схемы (3)

$$z_1 \approx -\begin{pmatrix} 0,456\,624\,963\,187\,254 \\ 0,456\,624\,963\,187\,254 \end{pmatrix},$$

при этом $\psi_1 \approx 0$, кроме того $\operatorname{rank} J_1 = 2$. Для первого шага итерационной схемы (3) выполнено ослабленное условие (4):

$$\theta_1 \| z_1 - z_0 \|_\infty \approx 0,000\ 956\ 996 \ll 1.$$

Для второго шага итерационной схемы (3) $\psi_2 \approx 0$, кроме того $\operatorname{rank} J_2 = 2$ при этом невязка полученного приближения

$$f(z)\ z_2 \approx -\begin{pmatrix} 0,456\,624\,704\,567\,637 \\ 0,456\,624\,704\,567\,637 \end{pmatrix}$$

составляет $\| f(z_2) \|_\infty \approx -1{,}54\,321 \cdot 10^{-14}$. Для второго шага итерационной схемы (3) выполнено ослабленное условие (4):

$$\theta_2 \| z_2 - z_0 \|_\infty \approx 0,000\ 956\ 844 \ll 1.$$

Для третьего шага итерационной схемы (3) $\psi_2 \approx 0$, кроме того, $\operatorname{rank} J_3 = 2$ при этом невязка полученного приближения

$$z_3 \approx -\begin{pmatrix} 0,456\,624\,704\,567\,631 \\ 0,456\,624\,704\,567\,631 \end{pmatrix}$$

составляет $\| f(z_3)\|_\infty \approx 2{,}22\,045\cdot 10^{-16}$, поэтому естественно ограничиться этим приближением. Заметим, что для третьего шага итерационной схемы (3) также выполнено ослабленное условие (4):

$$\theta_3 \| z_3 - z_0 \|_\infty \approx 0{,}000\ 956\ 844 \ll 1 .$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1977. 744 с.
2. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2th ed. Berlin, Boston: De Gruyter, 2016. 298 p.
3. Чуйко С.М. Про узагальнення теореми Ньютона-Канторовича у банаховому просторі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 6. С. 22—31. https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.022
4. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. Москва: Мир, 1988. 440 с.
5. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. *Труды ИСА РАН.* 2006. **28**. С. 48—66.
6. Chuiko S.M., Boichuk I.A. Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations.* 2009. **12**, № 3. P. 417—428. https://doi.org/10.1007/s11072-010-0085-1
7. Chuiko S.M., Boichuk I.A., Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem bythe Newton—Kantorovich method. *J. Math. Sci.* 2013. **189**, № 5. P. 867—881. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1225-9
8. Chuiko S.M., Pirus O.E. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method.*J. Math. Sci.* 2013. **191**, № 3. P. 449—463. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1329-2
9. Ben-Israel A. A Newton—Raphson method for the solution of systems of equations.*J. Math. Anal. Appl.* 1966. **15**. P. 243—252.
10. Chuiko S.M. To the generalization of the Newton—Kantorovich theorem. Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. матем., прикл. матем. і механіка. 2017. **85**, № 1. С. 62—68.
11. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. 3-е изд. Москва: Изд. МЦНМО, 2009. 672 с.
12. Chuiko S.M. On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *J. Math. Sci.* 2018. **235**, № 1. P. 2—14. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4054-z
13. Ben-Israel A., Greville Th.N.E. Generalized inverses : theory and applications. 2nd ed. New York: Springer. 2003. 420 p.
14. Chuiko S.M., Chuiko O.S., Chechetenko V.O. On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton—Kantorovich method. Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. 2018. № 1. С. 147—158.

Поступило в редакцию 21.01.2020

REFERENCES

1. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1977). Functional analysis. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2th ed. Berlin, Boston: De Gruyter.
3. Chuiko, S. M. (2018). A generalization of the Newton—Kantorovich theorem in a Banakh space. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 6, pp. 22-31 (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.022
4. Dennis, J. E. & Schnabel, R. B. (1996). Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Colorado: Society for Industrial and Applied Mathematics.

5. Polyak, B. T. (2006). Newton's method and its role in optimization and computational mathematics. Trudy ISA RAN, 28, pp. 48-66 (in Russian).
6. Chuiko, S. M. & Boichuk, I. A. (2009). Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case. Nonlinear Oscillations, 12, No. 3, pp. 417-428. https://doi.org/10.1007/s11072-010-0085-1
7. Chuiko, S. M., Boichuk, I. A. & Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton—Kantorovich method. J. Math. Sci., 189, No. 5, pp. 867-881. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1225-9
8. Chuiko, S. M. & Pirus O. E. (2013). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. J. Math. Sci., 191, No. 3, pp. 449-463. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1329-2
9. Ben-Israel, A. (1966). A Newton—Raphson method for the solution of systems of equations. J. Math. Anal. Appl., 15. pp. 243-252.
10. Chuiko, S. M. (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics And Mechanics. 85, No. 1, pp. 62-68.
11. Arnold, V. I., Gusein-Zade, S. M. & Varchenko, A. N. (2012). Singularities of differentiable maps. Boston: Birkhauser. Vols. 1, 2.
12. Chuiko, S. M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. J. Math. Sci., No. 1, pp. 2-14. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4054-z
13. Ben-Israel, A. & Greville, Th.N.E. (2003). Generalized inverses : theory and applications. 2nd ed. New York: Springer.
14. Chuiko, S. M., Chuiko, A. S. & Chechetenko, V. O. (2018). On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton—Kantorovich method. Nauk. Visnyk Uzhgorod Univ. Ser. Matematyka i Informatyka, No. 1, pp. 147-158.

Received 21.01.2020

S.M. Chuiko

Donbas State Pedagogical University, Slov'yansk
E-mail: chujko-slav@ukr.net

A GENERALIZATION OF THE NEWTON—KANTOROVICH METHOD
FOR SYSTEMS OF NONLINEAR REAL EQUATIONS

Constructive conditions for the solvability and an iterative scheme of finding solutions of systems of nonlinear real equations in the case of a Jacobian with constant rank are obtained. The results are a generalization of the Newton-Kantorovich method for systems of nonlinear real equations, the number of components of which does not coincide with the number of the unknowns.

Keywords: *nonlinear real equations, modification of Newton—Kantorovich method, half-inverse matrix, matrix pseudoinverse by Moore—Penrose*.

С.М. Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
E-mail: chujko-slav@ukr.net

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА—КАНТОРОВИЧА
ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ДІЙСНИХ РІВНЯНЬ

Знайдено конструктивні умови розв'язності та ітераційну схему для побудови розв'язків систем нелінійних дійсних рівнянь у випадку якобіана сталого рангу. Отримані результати є узагальненням методу Ньютона—Канторовича для систем нелінійних дійсних рівнянь, розмірність яких не збігається з кількістю невідомих.

Ключові слова: *нелінійні дійсні рівняння, модифікація методу Ньютона—Канторовича, напівобернена матриця, псевдообернена (за Муром—Пенроузом) матриця.*