

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.019>

УДК 539.3

**С.П. Орленко**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ

E-mail: orlenko\_sergey@ukr.net

## Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренко*

Постійний інтерес до широкого використання шаруватих конструкцій при створенні сучасних надзвукових літальних апаратів і багаторазових космічних транспортних систем з'явився в останні роки і ця тенденція триває і активізується в даний час. Ефективна несуча здатність тришарових оболонкових конструкцій при достатній легкості робить їх дуже корисними в різних інженерних додатках. Безперервна розробка нових конструкційних матеріалів призводить до все більш складних структурних конструкцій, що вимагають ретельного аналізу. Одним з поширених елементів зазначених оболонкових конструкцій є тришарові сферичні оболонки, які піддаються нестационарним навантаженням. Опублікована достатня кількість робіт з дослідження динаміки тришарових оболонок [1]. Однак останнім часом, створення об'єктів спеціального призначення тощо зумовлює необхідність розробки конструктивних тришарових оболонкових елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. Питання динамічної поведінки таких оболонок вивчені недостатньо. У даній роботі кінематичні і статичні гіпотези застосовуються до кожного шару оболонок, що підвищує загальний порядок системи рівнянь, але дозволяє детальніше вивчити динамічну поведінку тришарової структури. В основу рішення задачі покладена теорія оболонок і стрижнів, заснована на зсувній моделі С.П. Тимошенка. Для виведення рівнянь коливань тришарової неоднорідною по товщині структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона—Остроградського. Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем проводиться за допомогою явної скінчено-різницевої схеми інтегрування рівнянь. Наведено числові результати розв'язку конкретних задач.

**Ключові слова:** тришарова сферична оболонка, теорія оболонок і стрижнів С.П. Тимошенка, дискретний заповнювач, нестационарне навантаження, чисельні методи.

**Постановка задачі. Основні рівняння.** Пружна тришарова сферична оболонка являє собою систему, яка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких сферичних оболонок (внутрішня і зовнішня обшивки) з відповідними товщинами і радіусами серединних поверхонь. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами. Передбачається, що розгля-

---

Ц и т у в а н н я: Орленко С.П. Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3. С. 19–27. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.003>

ISSN 1025-6415. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3: 19–27

нута тришарова конструкція піддається дії зовнішнього нестационарно розподіленого нормального навантаження  $P_3(s, t)$ , де  $s, t$  — просторова і часова координати.

При виведенні рівнянь руху такої оболонки використовується геометрично нелінійна теорія тонких оболонок Тимошенко в квадратичному наближенні [2]. Деформований стан внутрішньої і зовнішньої сферичних оболонок визначається відповідними складовими узагальнених векторів переміщень  $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$  і  $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ . Внутрішній заповнювач моделюється системою дискретних ребер. При цьому вважається, що деформований стан  $j$ -го ребра визначається узагальненим вектором переміщення центра ваги його поперечного перерізу  $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{3j}, \varphi_{1j})^T$ . При жорсткому з'єднанні дискретних ребер зі сферичними обшивками, записуються умови контакту центрів тяжіння ребер з обшивками

$$\begin{aligned} u_{1j} &= u_1^i(s_j) \pm h_j^i \varphi_1^i(s_j), \\ u_{3j} &= u_3^i(s_j), \quad \varphi_{1j} = \varphi_1^i(s_j), \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, J}; \end{aligned} \quad (1)$$

де  $s_j$  — координата лінії сполучення центра ваги поперечного перерізу  $j$ -го ребра з відповідною серединною поверхнею;  $h_j^i = 0,5h_i + H_j$ ,  $h_i$  ( $i = 1, 2$ ) — товщини сферичних внутрішньої і зовнішньої оболонок;  $H_j$  — відстань від осі  $j$ -го ребра до поверхонь гладких оболонок.

Для виведення рівнянь коливань тришарової неоднорідною по товщині структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона—Остроградського, згідно з яким

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) - \delta A] dt = 0, \quad (2)$$

де  $\Pi$  — потенційна енергія пружної системи;  $K$  — кінетична енергія;  $A$  — робота зовнішніх сил.

Вирази для величин  $\delta\Pi$  і  $\delta K$  записуються наступним чином

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \sum_{i=1}^2 \delta\Pi_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta\Pi_j; \\ \delta K &= \sum_{i=1}^2 \delta K_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta K_j; \\ \delta\Pi_{0i} &= \int_{s_i} (T_{11}^i \delta\epsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta\epsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta\epsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta k_{11}^i + M_{22}^i \delta k_{22}^i) ds_i; \\ \delta\Pi_j &= T_{22j} \delta\epsilon_{22j}; \\ \delta K_{0i} &= \rho_i h_i \int_{s_i} \left[ \left( \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \right) \delta u_1^i + \left( \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \right) \delta u_3^i + \frac{h_i^2}{12} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_1^i \right] ds_i; \\ \delta K_j &= \rho_j F_j \left[ \left( \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{1j} + \left( \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{3j} + \frac{I}{F_j} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \right)^2 \varphi_{1j} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

де  $s_i = \alpha_1 R^i$ ;  $t$  – просторова (для кожної обшивки) та часова координати відповідно;  $R^i$  ( $i = 1, 2$ ) – радіуси серединних поверхонь внутрішньої та зовнішньої оболонок;  $\rho_i, \rho_j$  – щільності обшивок і ребра;  $F_j, I_{\text{кр}j}$  – геометричні параметри  $j$ -го ребра.

У співвідношеннях (3) вирази для зусиль – моментів вводяться наступним чином

$$\begin{aligned} T_{11}^i &= B_{11}^i(\epsilon_{11}^i + \nu_2^i \epsilon_{22}^i), \quad T_{22}^i = B_{11}^i(\epsilon_{22}^i + \nu_1^i \epsilon_{11}^i), \\ T_{13}^i &= B_{13}^i \epsilon_{13}^i, \quad M_{11}^i = D_{11}^i(\kappa_{11}^i + \nu_2^i \kappa_{22}^i), \\ M_{22}^i &= D_{22}^i(\kappa_{22}^i + \nu_1^i \kappa_{11}^i), \quad T_{22j} = B_{22j} \epsilon_{22j}; \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_1^i}{\partial s_i} + \frac{1}{2}[\theta_1^i]^2 + \frac{u_3^1}{R^i}, \quad \epsilon_{22}^i = \frac{u_1^i}{R^i} \text{ctg} \alpha_1 + \frac{u_3^i}{R^i}, \quad \epsilon_{13}^i = \Phi_1^i + \theta_1^i, \\ \theta_1^i &= \frac{\partial u_3^i}{\partial s_i} - \frac{u_1^i}{R^i}, \quad \kappa_{11}^i = \frac{\partial \Phi_1^i}{\partial s_i}, \quad \kappa_{22}^i = \frac{\Phi_1^i}{R_1^i} \text{ctg} \alpha_1, \quad \epsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}, \\ B_{11}^i &= \frac{E_1^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{13} = G_{13} K_i^2, \\ D_{11}^i &= \frac{E_1^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}, \quad D_{22}^i = \frac{E_2^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}, \quad B_{22j} = E_j F_j. \end{aligned} \quad (5)$$

У співвідношеннях (4) величини  $E_1^i, E_2^i, G_{13}^i, \nu_1^i, \nu_2^i, E_j$  – фізико-механічні характеристики матеріалів обшивок і відповідних ребер;  $K_i^2$  – коефіцієнт поперечного зсуву в теорії оболонок типу Тимошенка.

З урахуванням умов контакту (1), варіаційне рівняння (2) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{j+1} \sum_{i=1}^1 \left\{ \left[ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 T_{11}^i) - \frac{\text{ctg} \alpha_1}{R^i} T_{22}^i + \frac{\bar{T}_{13}^i}{R^i} - \rho_i h_i \frac{\partial u_1^i}{\partial t^2} \right] \delta u_1^i + \right. \\ & + \left[ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i) - \frac{T_{11}^i}{R^i} - \frac{T_{22}^i}{R^i} + P_3^i - \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \right] \delta u_3^i + \left[ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 M_{11}^i) - \right. \\ & - \left. \frac{\text{ctg} \alpha_1}{R^i} M_{22}^i - \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \Phi_1^i}{\partial t^2} \right] \delta \Phi_1^i \left. \right\} ds_{ij} + \sum_{j=1}^J \left\{ \left( \sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} - \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{1j} + \right. \\ & + \left. \left( \sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} - \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{3j} + \left[ \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) - \rho_j I_{\text{кр}j} \frac{\partial^2 \Phi_{1j}}{\partial t^2} \right] \delta \Phi_{1j} \right\} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{1j}} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

!!!!!!!!!!!!!!

У рівняннях (6) величини  $T_{11}^{i\pm}, T_{13}^{i\pm} = T_{11}^{i\pm} + \theta_{11}^{i\pm}, M_{11}^{i\pm}$  ( $i = 1, 2$ ) відповідають зусиллям – моментам, які діють на  $j$ -й дискретний елемент на лінії розриву  $\alpha_1 = \alpha_{1j}$ . З рівняння (6), в

силу довільності варіацій  $\delta u_1^i, \delta u_3^i, \delta \varphi_1^i, \delta u_{1j}, \delta u_{3j}, \delta \varphi_{1j}$  слідує рівняння руху тришарової оболонки:

в гладкій області між ребрами при  $s_{ij} < s_i < s_{ij+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 T_{11}^i) - \frac{\text{ctg} \alpha_1}{R^i} T_{22}^i + \frac{\bar{T}_{13}^i}{R^i} &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i) - \frac{T_{11}^i}{R^i} - \frac{T_{22}^i}{R^i} + P_3 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 M_{11}^i) - \frac{\text{ctg} \alpha_1}{R^i} M_{22}^i - T_{13}^i &= \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

на лінії розриву  $\alpha_1 = \alpha_{1j}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad \sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \\ \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) &= \rho_j I_{\text{кр}j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Рівняння руху (7), (8) доповнюються відповідними граничними і початковими умовами.

**Чисельний алгоритм вирішення задачі.** Чисельний алгоритм розв'язання рівнянь (7), (8) заснований на кінцево-різницевої апроксимації вихідних рівнянь із застосуванням явної кінцево-різницевої схеми типу "хрест" [3,4]. Розв'язок шукається в гладкій області – рівняння (7) і склеюються на лініях розривів – рівняння (8). При побудові чисельного рішення в гладкій області використовується інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих рівнянь [4]. При цьому компоненти узагальнених векторів переміщень співвідносять до цілих точок різницевої сітки, а відповідні величини деформацій і зусиль – до напівцілих точок. Різницеві рівняння, які апроксимують вихідні рівняння (7), записуються в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} [(\sin \alpha_1 T_{11}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \frac{\text{ctg} \alpha_{1k}}{R^i} (T_{22}^i)_k^n + \frac{1}{R^i} (\bar{T}_{13}^i)_k^n &= \rho_i h_i [(u_1^i)_k^n]_{\bar{u}}, \\ \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} [(\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \frac{1}{R^i} [(T_{11}^i)_k^n + (T_{22}^i)_k^n] + P_{3k}^n &= \rho_i h_i [(u_3^i)_k^n]_{\bar{u}}, \\ \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} [(\sin \alpha_1 M_{11}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \frac{\text{ctg} \alpha_{1k}}{R^i} (M_{22}^i)_k^n - (\bar{T}_{13}^i)_k^n &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} [(\varphi_3^i)_k^n]_{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Позначення різницевих похідних введено згідно з [3].

Різницеві вирази для зусиль-моментів і відповідних величин деформацій мають вигляд

$$(T_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n = B_{11}^i [(\epsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_2^i (\epsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n], \quad (10)$$

$$\begin{aligned}(T_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= B_{22}^i[(\epsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n + v_1^i(\epsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n], \\(T_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n &= B_{13}^i(\epsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n, \\(M_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n &= D_{11}^i[(\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n + v_2^i(\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n], \\(M_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= D_{22}^i[(\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n + v_1^i(\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n], \\(\bar{T}_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n &= (T_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n + (T_{11}^i\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n;\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}(\epsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n &= [(u_1^i)_k^n]_{s_i} + \frac{1}{2}(\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n + \frac{(u_3^i)_k^n + (u_3^i)_{k\pm 1/2}^n}{2R^i}, \\(\epsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= \frac{(u_1^i)_k^n + (u_1^i)_{k+1}^n}{2R^i} \operatorname{ctg} \alpha_{1k+1/2} + \frac{(u_3^i)_k^n + (u_3^i)_{k+1}^n}{2R^i}, \\(\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n &= [(u_3^i)_k^n]_{s_i} - \frac{(u_1^i)_k^n + (u_1^i)_{k+1}^n}{2R^i}, \\(\epsilon_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n &= \frac{(\varphi_1^i)_k^n + (\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2} + (\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n, \\(\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n &= [(\varphi_1^i)_k^n]_{s_i}, \\(\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= \frac{(\varphi_1^i)_k^n + (\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2R^i} \operatorname{ctg} \alpha_{1k+1/2}.\end{aligned}\tag{11}$$

У співвідношеннях (9) – (11) нижні індекси  $k, k\pm 1/2$  відповідають позначенням різницевої сітки по просторовій координаті  $s_i (i=1, 2)$ , а верхні індекси  $n$  визначають часовий шар. Позначення різницевих похідних за просторовою та часовою координатами у співвідношеннях (9), (11) введено згідно з [3]. Співвідношення для величин деформацій з індексом  $k-1/2$  записуються аналогічно формулам (11) з урахуванням зсуву на одиницю.

Різницеві співвідношення на лініях розривів  $\alpha = \alpha_j$  записуються наступним чином:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 (T_{11}^{i\pm})_j^n &= \rho_j F_j [(u_{1j})_j^n]_{\bar{\alpha}}, & \sum_{i=1}^2 (\bar{T}_{13}^{i\pm})_j^n &= \rho_j F_j [(u_{3j})_j^n]_{\bar{\alpha}}, \\ \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm})_j^n &= \rho_j I_{\kappa j} [(\varphi_{1j})_j^n]_{\bar{\alpha}}.\end{aligned}\tag{12}$$

Враховуючи, що застосовується явна кінцево-різницева схема, при розрахунках різницеві кроки вибиралися виходячи з умови  $\Delta t \leq K\Delta s / c_{11}$  де  $c_{11}^2 = E_1 / [\rho(1-v_1v_2)]$ ,  $K$  – число Куранта. При розрахунках вважалось  $K = 0,3\div 0,5$ , виходячи з практичної збіжності результатів.

У рівняннях (12) в квадратних дужках в позначення  $[\dots]_j^n$  входять величини згідно з рівняннями (10) відповідно до кожного шару.

!!!!!!!

Визначення величини компонент на лініях розриву для дискретних елементів, згідно з формулами (12), виконуємо перерахунок на внутрішню та зовнішню поверхні гладких обшивок

$$\begin{aligned} u_{1j}^n &= u_1^{kn}(s_j) \pm H_j^k \phi_1^{kn}(s_j), \\ u_{3j}^n &= u_3^{kn}(s_j), \quad \phi_{1j}^n = \phi_1^{kn}(s_j), \quad k=1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Виходячи з отриманих вище формул, чисельний алгоритм вирішення поставленого завдання полягає в послідовності виконання наступних формул:

на  $n$ -му часовому шарі в гладкій області по просторовій координаті обчислюються величини відповідних деформацій і зусиль-моментів за формулами (12);

за обчисленими величинами деформацій і зусиль-моментів обчислюються величини компонент узагальненого вектора переміщень обшивок у гладкій області на  $n + 1$  часовому шарі;

відповідно до формул (6) обчислюються величини компонент узагальненого вектора переміщень для  $j$ -го дискретного елемента на лініях розриву;

за формулами (7) виконується перерахунок величин узагальненого вектора переміщень центра ваги поперечного зрізу  $j$ -го дискретного елемента заповнювач на відповідні поверхні обшивок на лініях розриву.

Отримана різницева схема згідно з формулами (9) – (12) явна по часовій координаті, і виходячи з цього, є умовно стійкою по просторовій та часовій координатах. В подальшому при чисельному рішенні задач вісесиметричних коливань, будемо виходити з відповідних формул для величин різницевих кроків  $\Delta x$  і  $\tau$ .

**Чисельні результати.** Математичне моделювання напружено-деформованого стану тришарової півсфери з дискретним ребристим заповнювачем (паралелями) при падінні на неї ударної хвилі проводилося чисельними методами. Для вирішення наведених рівнянь використовувався інтегро-інтерполяційний метод побудови кінцево-різницевих схем по просторовій координаті  $\alpha_1$  і явна схема інтегрування по часовій координаті  $t$  – різницеві рівняння [4].

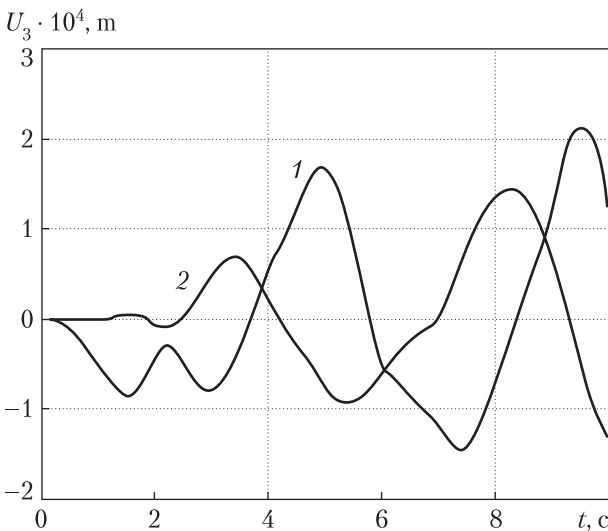


Рис. 1

Дискретно-неоднорідна по товщині пружна тришарова оболонка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких сферичних оболонок з відповідними товщинами і радіусами серединних поверхонь. Оболонки жорстко з'єднані між собою системою ребер (паралелей). Вважається, що на тришарову конструкцію на зовнішню обшивку падає ударна хвиля.

В роботі [5] розглянута півсфера з отвором у її вершині з вільними кромками при внутрішньому імпульсному навантаженні. У даному випадку, завдання вирішувалося на просторовому інтервалі  $[-\pi/2; \pi/2]$ . В силу симетрії щодо вершини сфери при  $\alpha_1 = 0$  розглядався інтервал

$[0; \pi/2]$ . Розрахунок проводився при кількості дискретних інтервалів  $N = 160$ , тобто  $\Delta\alpha_1 = (\pi/2)/N$ .

Дискретні підкріплюючі ребра (паралелі) перебували у точках

$$\alpha_k = [41 + 40(k-1)]\Delta\alpha_1, \quad k = \overline{1, 3}.$$

У вершині сфери є особливість, необхідність розкриття якої дозволила записати граничні умови при  $\alpha_1 = 0$  в наступному вигляді:

$$u_1^k = \varphi_1^k = 0, \quad 2 \frac{\partial T_{13}^k}{\partial s} - P_3(s_0, t) \delta_{2k} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \quad (14)$$

при  $\alpha_1 = \pi/2$  – жорстке защемлення:

$$u_1^k = u_3^k = \varphi_1^k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

У формулах (14)  $\delta_{2k}$  – символ Кронекера.

Зовнішнє навантаження  $P_3(s, t)$  задавалося у вигляді [6]

$$P_3(s, t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

де  $A = 10^6$  Па;  $T = R_1 / c$ ,  $c^2 = E_1 / [\rho(1 - \nu_1^2)]$ .

Розрахунки проводилися при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах:  $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $h_1 = h_2$ ;  $h_j = 2h$ ;  $R_1 = 0,3$  м;  $R_1 / h_1 = 60$ ;  $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>.

На рисунку показані результати розрахунків наведених нормальних переміщень  $u_3$  у вершині півсфери, отримані методом субмоделінга, в залежності від часу  $t$ . Крива 2 відповідає величині  $u_3$  внутрішньої оболонки, крива 1 – зовнішньої оболонки. З графіків бачимо, що за рахунок передачі зусиль через дискретний заповнювач (паралелі) несучі оболонки мають рівний порядок нормальних переміщень  $u_3$ .

Отримані чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану тришарової пружної структури сферичного виду в довільний момент часу (розрахунки проводилися на часовому інтервалі  $0 \leq t \leq 40T$ ) відповідно до наведеної постановки задачі.

**Висновок.** В роботі, виходячи з варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського, отримані рівняння коливань тришарових сферичних оболонок з неоднорідним дискретним заповнювачем. При описі елементів пружної структури використовуються моделі оболонок і стрижнів згідно з гіпотезами Тимошенка. Для розв'язання отриманих рівнянь розвинено ефективний чисельний метод, який заснований на використанні інтегро-інтерполяційних співвідношень по просторових координатах і явною кінцево-різницевої схеми по часовій координаті. Отримано рішення задачі з динамічної поведінки тришарової сферичної оболонки з неоднорідним дискретним заповнювачем при дії імпульсного навантаження. Наведено аналіз отриманих результатів.



Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы “Поддержка приоритетных направлений научных исследований” (КПКВК).

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamics of Inhomogeneous Shell System Under Non – Stationary Loading (Surveys). *Int. Appl. Mech.* 2017, **53**, №5, P. 481–537.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Ленинград-Москва:Гостехиздат, 1948. 212с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1977. 536с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656с.
5. Meish V.F., Shtantsel' S.É. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads. *Int. Appl. Mech.* 2002, **38**, № 12. P. 1501–1507.
6. Librescu L., Oh a S.-Yo., Hohe J. Dynamic response of anisotropic sandwich flat panels to underwater and in-air explosions. *Int. J. Solids and Structures.* 2006. **43**. P. 3794–3816.

Надійшло в редакцію 08.12.2019

#### REFERENCES

1. Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2017). Dynamics of Inhomogeneous Shell System Under Non-Stationary Loading (Surveys). *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 5, pp. 481-537.
2. Novozhilov, V. V. (1948). Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity. Leningrad–Moscow: Gostekhizdat (in Russian).
3. Marchuk, G. I. (1977). Methods of Computational Mathematics. Moscow: Nauka (in Russian).
4. Samarsky, A. A. (1977). Theory of difference schemes. Moscow: Nauka (in Russian).
5. Meish, V. F. & Shtantsel 'S. É. (2002). Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads. *Int. Appl. Mech.*, 38, No. 12, pp. 1501-1507.
6. Librescu, L., Oh a S.-Yo. & Hohe, J. (2006). Dynamic response of anisotropic sandwich flat panels to underwater and in-air explosions. *Int. J. Solids and Structures*, pp. 43 3794-3816.

Received 08.12.2019

С.П. Орленко

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: plugovyy@inmech.kiev.ua

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРЕХСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДИСКРЕТНО НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Постоянный интерес к широкому использованию слоистых конструкций при создании современных сверхзвуковых летательных аппаратов и многоразовых космических транспортных систем появился в последние годы и эта тенденция продолжается и активизируется в настоящее время. Эффективная несущая способность трехслойных оболочечных конструкций при достаточной легкости делает их очень полезными в различных инженерных приложениях. Непрерывная разработка новых конструкционных материалов приводит к все более сложным структурным конструкциям, требующим тщательного анализа. Одним из распространенных элементов указанных оболочечных конструкций являются трехслойные сферические оболочки, которые подвергаются нестационарным нагрузкам. Опубликовано достаточное количество работ по исследованию динамики трехслойных оболочек [1]. Однако в последнее время, создание объектов специального назначения и т.д. обуславливает необходимость разработки конструктивных трехслойных оболочечных элементов с наполнителем усложненной геометрической структуры. Вопросы динамического поведения таких оболочек изучены недостаточно. В данной работе кинематические и статические гипотезы применяются к каждому слою оболочек, что повышает общий порядок системы уравнений, но зато позволяет более детально изучить динамическое поведение трехслойной структуры. В основу решения задачи положена теория оболочек и стержней, основанная на сдвиговой модели



С.П. Тимошенко. Для вывода уравнений колебаний трехслойной неоднородной по толщине структуры используется вариационный принцип стационарности Гамильтона—Остроградского. Численное моделирование динамики трехслойной сферической оболочки с дискретно неоднородным заполнителем проводится с помощью явной конечно-разностной схемы интегрирования уравнений. Приведены числовые результаты решения конкретных задач.

**Ключевые слова:** *трехслойная сферическая оболочка, теория оболочек и стержней С.П. Тимошенко, дискретный заполнитель, нестационарная нагрузка, численный метод.*  
*Orlenko S.P.*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv  
E-mail: orlenko\_serгей@ukr.net

#### NUMERICAL SIMULATION OF THE DYNAMICS OF A THREE-LAYER SPHERICAL SHELL WITH A DISCRETELY INHOMOGENEOUS FILLER

A constant interest in the widespread use of layered structures in the creation of modern supersonic aircraft and reusable space transport systems has appeared in recent years, and this trend continues and is currently being activated. The effective bearing capacity of three-layer shell structures with sufficient lightness makes them very useful in various engineering applications. The continuous development of new structural materials leads to increasingly complex structural constructions that require careful analysis. One of the common elements of these shell structures are three-layer spherical shells that are subjected to unsteady loads. In the literature, there are a sufficient number of studies on the dynamics of three-layer shells [1]. However, recently, the creation of special-purpose facilities, etc. leads to the need to develop structural three-layer shell elements with a filler with complicated geometric structure. The dynamic behavior of such shells has not been studied enough. In this paper, the kinematic and static hypotheses are applied to each layer of shells, which increases the general order of the system of equations, but allows a more detailed study of the dynamic behavior of a three-layer structure. The solution to the problem is based on the theory of shells and rods based on Timoshenko the shear model. To derive the equations of oscillations of a three-layer structure non-uniform in thickness, the variational principle of Hamilton—Ostrogradsky stationarity is used. The numerical simulation of the dynamics of a three-layer spherical shell with a discrete inhomogeneous filler is carried out using an explicit finite-difference scheme for integrating the equations. Numerical results of solving some specific problems are presented.

**Keywords:** *three-layer spherical shell, Timoshenko theory of shells and rods, discrete filler, non-stationary load, numerical method.*