

---

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.028>

УДК 539.421

**М.Ф. Селіванов, В.В. Процан**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка, Київ

E-mail: mfs@ukr.net, overfiled@gmail.com

## **Вплив неврахування умови плавності змикання берегів тріщини при визначенні критичного навантаження**

*Представлено академіком НАН України Я.М. Григоренком*

*Умова скінченності напружень є вимогою коректності, що накладається на розв'язок задачі механіки тріщин, який отримується в рамках моделі зони зчеплення. Ця умова еквівалентна умові плавності змикання берегів розрізу, що моделює тріщину із зоною передруйнування біля її фронту. Умова задовольняється точним визначенням довжини зони зчеплення — ділянки розрізу на продовженні тріщини з прикладеними до берегів силами зчеплення, інтенсивність яких пов'язана з відповідним розкриттям берегів нерівномірним законом зчеплення—відриву. Довжину зчеплення можна знайти аналітично лише в невеликій кількості базових задач механіки тріщин, наприклад, в задачі про тріщину у нескінченній площині з рівномірно розподіленим навантаженням, прикладеним на значній відстані від тріщини. При використанні числових методів довжину зчеплення знаходять наближено ітеративними методами. В роботі проаналізовано вплив точності наближення на величину критичного навантаження, за якого ініціюється руйнування. Для цього розглянуто крайову тріщину в пластині скінченних розмірів. Метод скінченних елементів використано для отримання розв'язку, який проаналізовано з точки зору впливу неточного визначення довжини зчеплення на критичний рівень навантаження. Проведено порівняння числового розв'язку з отриманим авторами числово-аналітичним розв'язком аналогічної задачі для напівнескінченної площини. Встановлено, що використання меншого значення довжини зчеплення, ніж те, що дає умова плавності змикання берегів, призводить до завищеного прогнозу щодо граничного навантаження при збереженні критерію руйнування. Проілюстровано простий ітеративний метод знаходження довжини зчеплення, що задовольняє умову плавності змикання берегів.*

**Ключові слова:** *крайова тріщина, граничний рівень навантаження, модель зони зчеплення, умова плавності змикання берегів тріщини.*

Механіка руйнування використовує різноманітні моделі вершини тріщини та критерії руйнування, що забезпечує її гнучкість у прогнозуванні зародження та поширення тріщин [1]. Одною з основних моделей є модель зони зчеплення (МЗЗ), яка моделює зону передруйнування біля фронту тріщини. В моделі вводяться нерівномірно розподілені напруження

---

Цитування: Селіванов М.Ф., Процан В.В. Вплив неврахування умови плавності змикання берегів тріщини при визначенні критичного навантаження. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3. С. 28–35. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.003>

зчеплення, що змикають береги тріщини та залежать від розкриття вдовж зони змінюючись від нуля для характерної довжини  $\Delta_{\max}$  до міцності зчеплення матеріалу  $\sigma_{\max}$  за нульового розкриття, яке відповідає фронту зони зчеплення. Окрім  $\sigma_{\max}$ , головним параметром тріщиностійкості є енергія руйнування  $\phi$ , яка інтерпретується як площа під графіком залежності напруження зчеплення від розкриття. Параметр форми закону,  $c = \Delta_{\max} \sigma_{\max} / \phi$  ( $0 < c < 1$ ), показує наскільки цей закон відрізняється від рівномірного, для якого  $c = 1$ . Параметра  $c$  значною мірою впливає на довжину зони зчеплення [2]. Зі зменшенням цього параметра довжина зчеплення збільшується.

Покладається, що напруження зчеплення змикають береги тріщини плавно. Ця умова забезпечує скінченність напружень навіть коли неушкоджений матеріал вважається лінійно пружним. Довжину зони зчеплення не можна обчислити до розв'язання задачі теорії тріщин, тобто немає зв'язку між рівнем зовнішнього навантаження, параметрами тріщиностійкості та пружності. Довжина зчеплення залежить від геометрії навантаженого тіла з тріщиною і може бути визначеною аналітично лише для найбільш простих схем навантаження, таких як рівномірно розподілене навантаження, прикладене до нескінченної площини на значному віддаленні від тріщини.

Критерієм зародження тріщини, згідно з МЗЗ, є досягнення в точці тіла напруження  $\sigma_{\max}$ . За наявності тріщини необхідно обчислити рівень граничного навантаження, який витримає елемент конструкції. Процедура пошуку ускладнюється коли  $c$  не є близьким до одиниці (наприклад, для лінійного закону, коли  $c = 0,5$ ). У цьому випадку максимально можлива інтенсивність зовнішнього навантаження  $\sigma_{\infty}^{\circ}$  може відповідати значенням  $\bar{\Delta} < 1$  ( $\bar{\Delta} = \Delta / \Delta_{\max}$ , залежність  $\sigma_{\infty}^{\circ}(\bar{\Delta})$  має в цьому випадку максимум в точці  $\bar{\Delta}^{\circ}$ ) [3]. Для близьких до одиниці значень  $c$  параметри граничного стану можна визначити включенням у визначальну систему для параметрів напружено-деформованого стану рівняння  $\bar{\Delta}(\lambda) = 1$ . ( $\lambda$  відповідає положенню вершини фізичної тріщини). Цей випадок і розглянуто в роботі. Таким чином, знаходитиме відносний (до  $\sigma_{\max}$ ) параметр граничного навантаження  $\sigma_{\infty}^*$ , який відповідає максимально можливому розкриттю у вершині фізичної тріщини. При  $\sigma_{\infty}^{\circ} > \sigma_{\infty}^*$  збільшенням рівня зовнішнього навантаження неможливо забезпечити виконання критерію  $\bar{\Delta}(\lambda) = 1$  у задачі теорії пружності, але можливо у задачі теорії в'язкопружності [4].

МЗЗ імплементована у більшість комерційних інженерно-орієнтованих середовищ для розрахунків методом скінченних елементів (МСЕ). ЗЗВ задається параметрами наявних в пакеті форм (наприклад, для лінійного закону треба задати лише міцність зчеплення та енергію руйнування) або самою формою. Розв'язок отримується ітеративним методом, який забезпечує виконання ЗЗВ і неперервність напружень при переході із зони зчеплення у неушкоджений матеріал. Таким чином, умова плавності змикання берегів виконується автоматично [5]. При розв'язанні крайової задачі для нелінійно пружного матеріалу, окрім умови неперервності напружень при переході із зони зчеплення в неушкоджений матеріал, може вимагатися виконання критерію міцності в точці переходу [6].

В даній роботі дослідження проведемо за допомогою МСЕ без використання спеціалізованих пакетів. З'ясуємо як впливає на розв'язок задачі невиконання умови плавності змикання берегів тріщини. Програмний код реалізуємо в програмному середовищі Matlab.

З метою порівняння з числово-аналітичним розв'язком аналогічної задачі, отриманого в [7, 8] для напівнескінченної пластини, проведемо МСЕ-аналіз в рамках МЗЗ для скін-

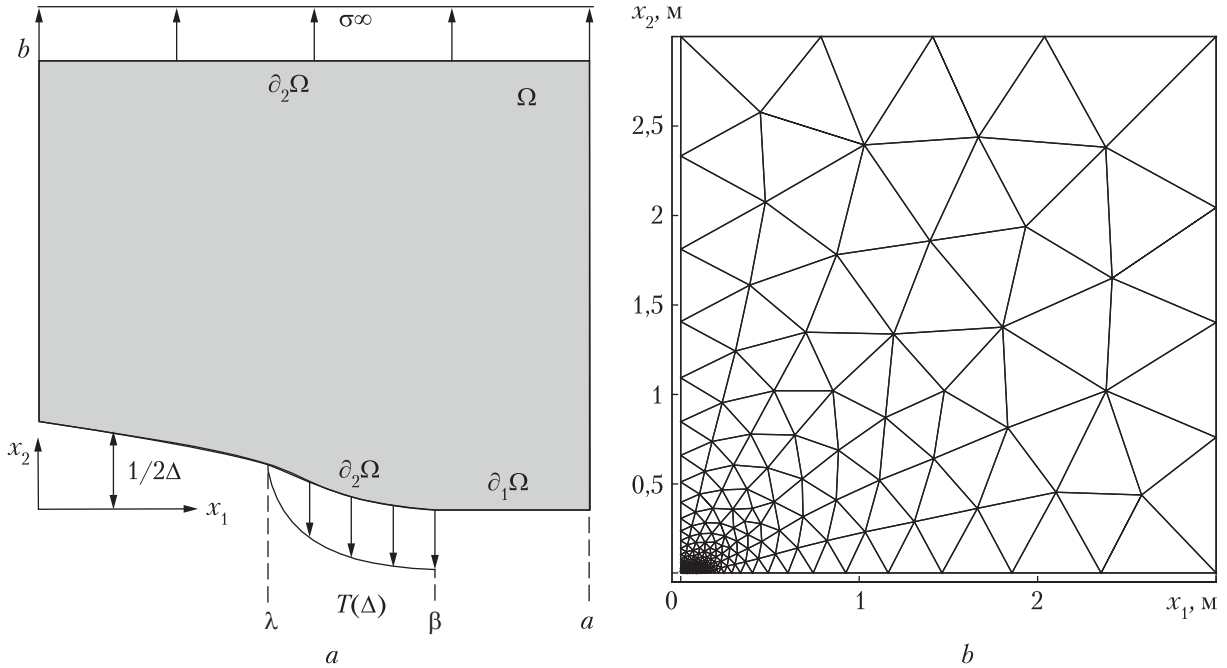


Рис. 1

ченної пластини. Розглянемо пластину шириною  $a$  і довжиною  $2b$  з крайовою тріщиною довжини  $\lambda$ , розташованою по нормалі до напрямку прикладання навантаження. Пластину в умовах плоского напруженого стану (з одиничною товщиною) навантажено розтягувальним навантаженням  $\sigma_\infty$ . Об'ємні сили відсутні. Неушкоджений матеріал вважаємо лінійним пружним з модулем Юнга  $E$ . Тіло знаходиться в однорідному температурному полі, переміщення є малими. На рис. 1 а зображена верхня половина області,  $\Omega$ , яку можна розглядати в силу симетрії. Прийнемо, що на частині поверхні тіла  $\partial_1\Omega$  задано переміщення  $\hat{u}_i$ , а на частині  $\partial_2\Omega$  прикладені поверхневі сили  $t_i$ . Система рівнянь для визначення напружено-деформованого стану тіла:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, & \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), & x_i &\in \Omega, \\ u_i &= \hat{u}_i, & x_i &\in \partial_1\Omega, \\ \sigma_{ij,j}n_j &= t_i, & x_i &\in \partial_2\Omega, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \end{aligned}$$

де  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  і  $C_{ijkl}$  — компоненти тензорів напружень, деформацій та пружних сталих;  $u_i$  і  $n_i$  — компоненти векторів переміщень та одиничного вектора нормалі до поверхні тіла,

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 &= 0, & x_1 &\in [\beta, a], & x_2 &= 0 \\ t_2 &= -T(2u_2 / \Delta_{\max}), & x_1 &\in [\lambda, \beta], & x_2 &= 0 \\ t_2 &= \sigma_\infty, & x_1 &\in [0, \lambda], & x_2 &= b. \end{aligned}$$

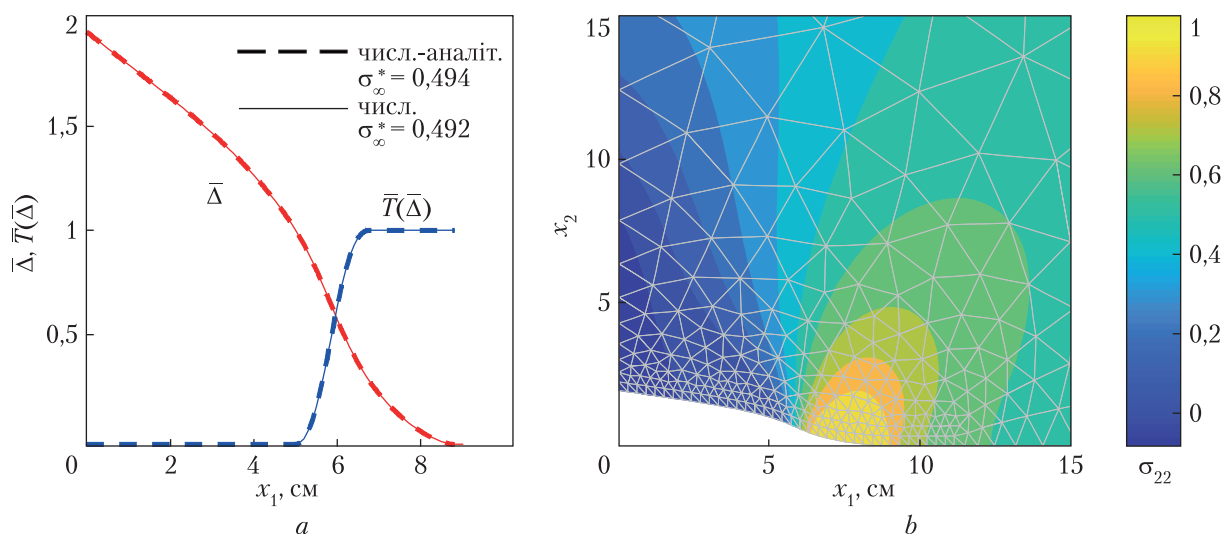


Рис. 2

Разом із критерієм критичного розкриття використаємо трапеціодальний когезійний закон

$$T(\bar{\Delta}) = \sigma_{\max} \bar{T}(\bar{\Delta}),$$

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = \begin{cases} 1, & \bar{\Delta} \in [0, \delta] \\ \frac{(1-\bar{\Delta})^2(1+2\bar{\Delta}-3\delta)}{(1-\delta)^3}, & \bar{\Delta} \in (\delta, 1] \end{cases}$$

(для числових розв'язків буде прийнято  $\delta = 0,3$ ).

Сітка, що містить 706 десятивузлових трикутних елементів (див. рис. 1, б) із загальною кількістю вузлів 3313, згенерована зі згущенням вздовж лінії розташування тріщини за результатами [9, 10]. Вузли сітки розташовані з кроком 0,1 см вздовж цієї лінії. Проведено аналіз збіжності, що гарантує достатність обраної кількості вузлів. Зроблено перевірку незалежності розв'язку від границі тіла; встановлено, що розміри  $a = b = 3$  м дозволяють розглядати тріщину як дефект в напівнескінченній пластині.

Порівняння розв'язків двома методами проведено в умовах граничного стану. Результати порівняння проілюстровано на рис. 2, а. Довжина фізичної тріщини  $\lambda = 5$  см, вершина зчеплення  $\beta = 8,8$  см, відношення модуля Юнга до міцності зчеплення  $E / \sigma_{\max} = 10^3$ , критичне розкриття  $\Delta_{\max} = 10^{-4}$  м. Числово-аналітичний розв'язок отриманий розв'язанням сингулярних інтегральних рівнянь з узагальненим ядром Коші для представлення функції щільності розкриття у формі добутку кусково-лінійної функції форми та вагової функції [7]. Процедура розв'язання числово-аналітичним методом побудована для сітки вздовж лінії тріщини з кроком 0,05 см. Положення фронту зчеплення  $\beta^* = 8,75$  см визначено з точністю до кроку сітки з умови плавності змикання берегів тріщини. Розкриття та відповідне напруження зчеплення, отримані двома методами, збігаються з графічною точністю, також спостерігається незначна відмінність за рівнями граничного навантаження.

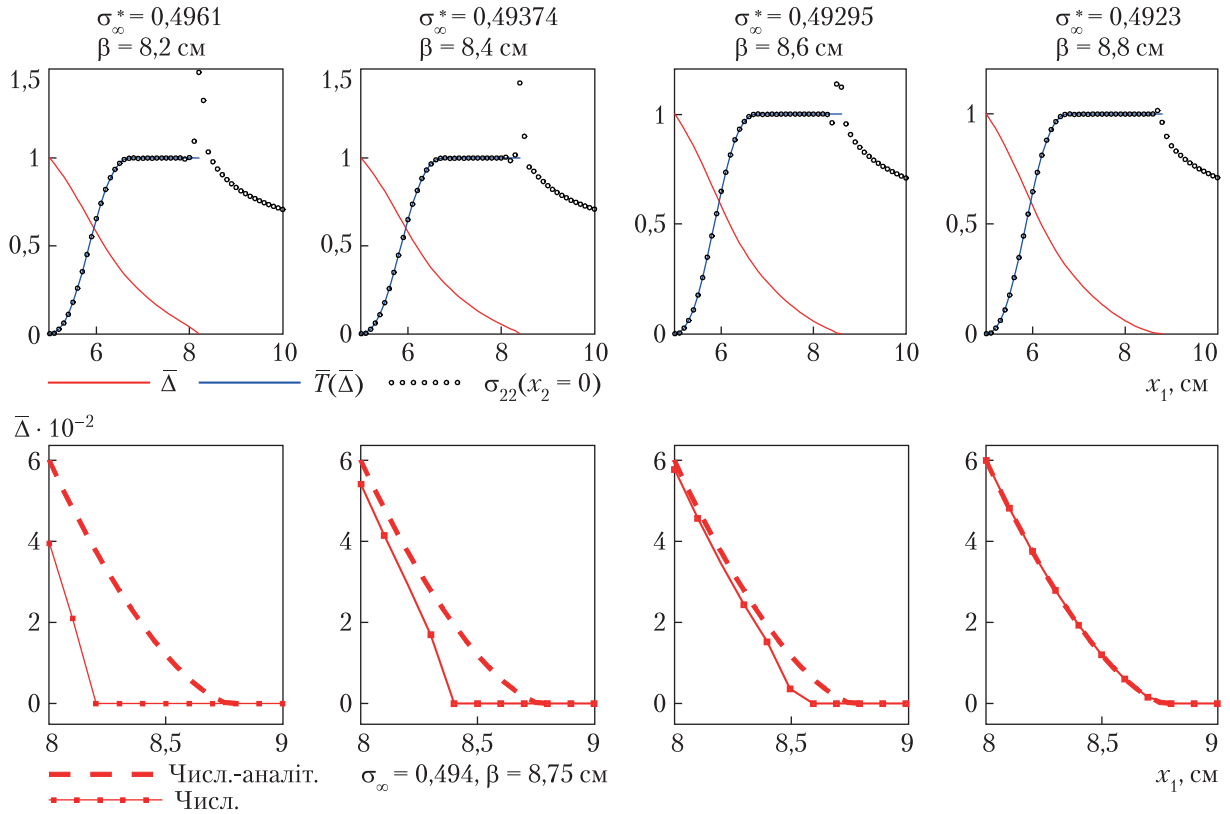


Рис. 3

На рис. 2, б, на деформованій сітці з фактором 200 вздовж осі  $x_2$  проілюстроване відносне напруження  $\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22} / \sigma_{\max}$  в околі тріщини.

Наведемо відносні рівні зовнішнього навантаження для деяких значень відносного розкриття у вершині фізичної тріщини  $\bar{\Delta}(\lambda)$ :

$\bar{\Delta}$	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
$\bar{\sigma}_{\infty}$	0,4924	0,4979	0,5027	0,5061	0,5079	0,5077	0,5052	0,5001	0,4923

Максимальне можливе навантаження  $\sigma_{\infty}^{\circ} = 0,508$  досягається за  $\bar{\Delta}^{\circ} = 0,82$ .

На рис. 3 для чотирьох значень  $\beta$ , близьких до  $\beta^* = 8,75$  см, за якого задовольняється умова плавності змикання берегів, проілюстровано відносні розкриття ( $\bar{\Delta}$ ), відповідні сили зчеплення ( $\bar{T}(\bar{\Delta})$ ), а також відносні напруження ( $\bar{\sigma}_{22}$ ), обчислені у вузлах елементів, розташованих вздовж лінії тріщини. Результати отримано в умовах граничного стану (на рисунку наведені значення відповідного цьому стану навантаження  $\sigma^*$ , використана зірочка підкреслює, що розв'язок отримано без задоволення умови плавності змикання). У другому рядку блоків проведено порівняння з відносним розкриттям біля фронту зчеплення, отриманим числово-аналітичним методом з урахуванням умови плавності змикання.

Без накладання умови неперервності напружень  $\sigma_{22}$  матиме дві можливі ситуації при реалізації числового методу. Якщо довжина зчеплення  $\beta - \lambda$  більша за довжину  $\beta^* - \lambda$ , що

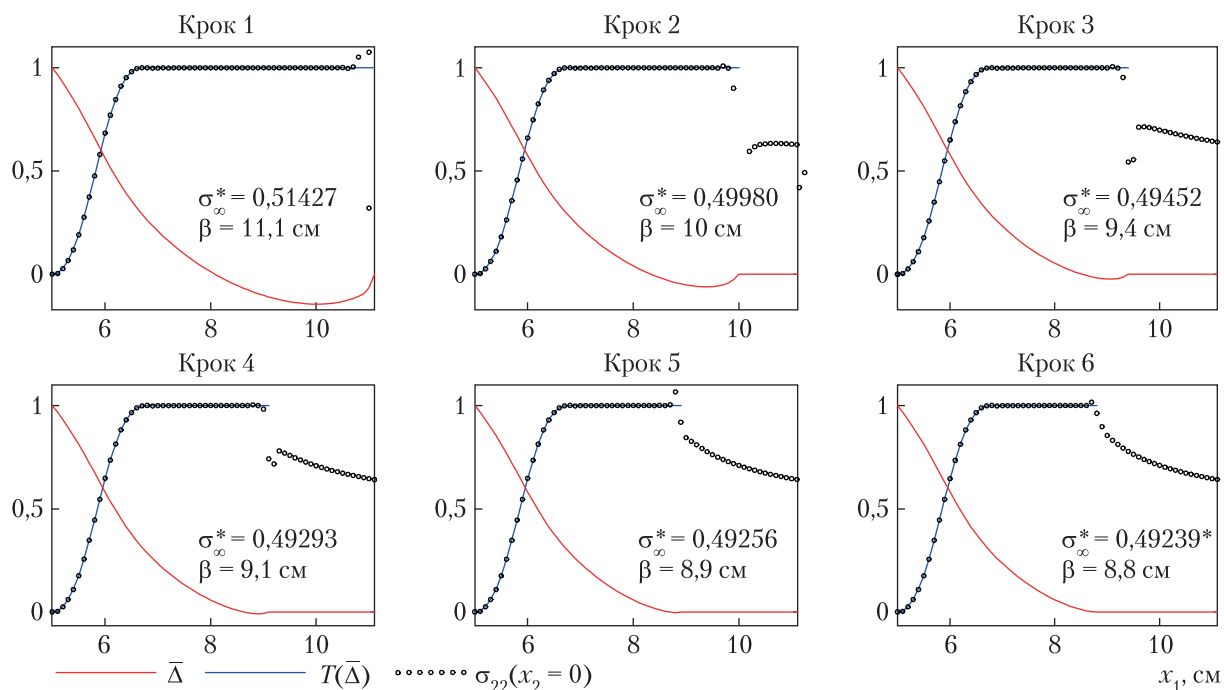


Рис. 4

забезпечує плавність змикання берегів, то розв'язок задачі не існує і процедура розв'язання нелінійних рівнянь для задоволення ЗЗВ зазнає невдачі. Якщо  $\beta < \beta^*$ , то числовий розв'язок матиме осциляцію в точці стрибка напружень при переході із зони зчеплення у неушкоджений матеріал (точний аналітичний розв'язок матиме сингулярність при  $x_1 = \beta +$ ).

Наведемо критичні рівні навантаження для довжин зчеплення значно менших за довжини, що забезпечує плавність змикання берегів:

$\beta$ , см	6	6,5	7	7,5	8
$\sigma_{\infty}^*$	0,7206	0,6090	0,5469	0,5137	0,4997

Таким чином, ненакладання умови при збереженні критерію руйнування призводить до значного завищення прогнозу критичного рівня зовнішнього навантаження.

На рис. 4 проілюстровано кроки простої ітеративної процедури для задоволення умови плавності змикання берегів. В основу процедури покладено продовження ЗЗВ на від'ємний відрив ( $T(\bar{\Delta}) = 1$  при  $\bar{\Delta} < 0$ ) [7]. Початкову ітерацію для  $\beta$  необхідно обрати так, щоб вона напевне була більшою за ту, що відповідає умові плавності змикання. Точка мінімуму величини  $\bar{\Delta}$  обирається в якості наступного наближення для  $\beta$ .

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Каминский А.А. О моделировании зоны предразрушения у фронта трещины. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 2. С. 44–49. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.02.044>
2. Selivanov M.F. Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.* 2019. **72**. P. 104–128. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013>

3. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.* 2018. **212**. P. 113–21. <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0295-6>
4. Kaminsky A.A., Selivanov M.F. Modeling subcritical crack growth in a viscoelastic body under concentrated forces. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**. № 4, P. 1–7. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0834-2>
5. Stang H., Olesen J.F., Poulsen P.N., Dick-Nielsen L. On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. *Mater. Struct.* 2007. **40**. P. 365–374. <https://doi.org/10.1617/s11527-006-9179-8>
6. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Fracture process zone at the tip of a mode I crack in a nonlinear elastic orthotropic material. *Int. Appl. Mech.* 2019. **55**. № 1. P. 23–40. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00931-9>
7. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 3. С. 46–54. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.046>
8. Селіванов М.Ф. Розв'язання задачі про крайову тріщину з зоною зчеплення шляхом регуляризації сингулярного інтегрального рівняння. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 5. С. 34–43. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.034>
9. Engwirda D. Locally-optimal Delaunay-refinement and optimisation-based mesh generation. Ph.D. Thesis School of Mathematics and Statistics, Univ. of Sydney. 2014. <http://hdl.handle.net/2123/13148>
10. Engwirda D., Ivers D. Off-centre Steiner points for Delaunay-refinement on curved surfaces. *Computer-Aided Design*, 2016. **72**. P. 157–171. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2015.10.007>

Надійшло до редакції 17.12.2019

#### REFERENCES

1. Kaminsky, A. A. (2015). On the modeling of a prefracture zone near the crack front. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 2, pp. 44-49 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.02.044>
2. Selivanov, M. F. (2019) Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.*, 72, pp. 104-128. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013>
3. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2018) A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.*, 212, pp. 113-21. <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0295-6>
4. Kaminsky, A. A. & Selivanov, M. F. (2017) Modeling subcritical crack growth in a viscoelastic body under concentrated forces. *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 4, pp. 1-7. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0834-2>
5. Stang, H., Olesen, J. F., Poulsen, P. N. & Dick-Nielsen, L. (2007) On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. *Mater. Struct.*, 40, pp. 365-374. <https://doi.org/10.1617/s11527-006-9179-8>
6. Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2019) Fracture process zone at the tip of a mode I crack in a nonlinear elastic orthotropic material. *Int. Appl. Mech.*, 55, No. 1, pp. 23-40. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00931-9>
7. Selivanov, M. F. (2019) An edge crack with cohesive zone. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 46-54 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.046>
8. Selivanov, M. F. (2019) Solving a problem on an edge crack with cohesive zone by the regularization of a singular integral equation. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 34-43 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.034>
9. Engwirda, D. (2014) Locally-optimal Delaunay-refinement and optimisation-based mesh generation. Ph.D. Thesis School of Mathematics and Statistics, Univ. of Sydney. <http://hdl.handle.net/2123/13148>
10. Engwirda, D. & Ivers, D. (2016) Off-centre Steiner points for Delaunay-refinement on curved surfaces. *Computer-Aided Design*, 72, pp. 157-171. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2015.10.007>

Received 17.12.2019

М.Ф. Селіванов, В.В. Процан

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев  
E-mail: mfs@ukr.net, overfiled@gmail.com

#### ВЛИЯНИЕ НЕУЧТЕННОСТИ УСЛОВИЯ ПЛАВНОСТИ СМЫКАНИЯ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Условие конечности напряжений является требованием корректности, налагаемым на решение задачи механики трещин, получаемое в рамках модели зоны сцепления. Это условие эквивалентно условию плавности смыкания берегов разреза, моделирующего трещину с зоной предразрушения у ее фронта. Условие

удовлетворяется точным определением длины зоны сцепления — участки разреза на продолжении трещины с приложенными к берегам силами сцепления, интенсивность которых связана с соответствующим раскрытием берегов неравномерным законом сцепления—отрыва. Длину сцепления можно найти аналитически только в небольшом количестве базовых задач механики трещин, например, в задаче о трещине в бесконечной плоскости с равномерно распределенной нагрузкой, приложенной на значительном расстоянии от трещины. При использовании численных методов длину сцепления находят приближенно итеративными методами. В работе проанализировано влияние точности приближения на величину критической нагрузки, при которой инициируется разрушение. Для этого рассмотрена краевая трещина в пластине конечных размеров. Метод конечных элементов использован для получения решения, которое проанализировано с точки зрения влияния неточного определения длины сцепления на критический уровень нагрузки. Проведено сравнение численного решения с полученным авторами численно-аналитическим решением аналогичной задачи для полубесконечной плоскости. Установлено, что использование меньшего значения длины сцепления, чем та, что дает условие плавности смыкания берегов, приводит к завышенному прогнозу по предельной нагрузке при сохранении критерия разрушения. Проиллюстрировано простой итеративный метод нахождения длины сцепления, удовлетворяющей условию плавности смыкания берегов.

**Ключевые слова:** *краевая трещина, предельный уровень нагружения, модель зоны сцепления, условие плавности смыкания берегов трещины.*

*M.F. Selivanov, V.V. Protsan*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv  
E-mail: mfs@ukr.net, overfiled@gmail.com

#### THE IMPACT OF NEGLECTING THE SMOOTH CRACK CLOSURE CONDITION WHEN DETERMINING THE CRITICAL LOAD

The finite stress condition is a correctness requirement that has to be met, when the problem of crack mechanics is solved using the cohesive zone model. This condition is equivalent to the one of smooth closure of crack faces, which models a crack with a fracture zone near its front. The condition is satisfied by the accurate estimation of the length of the cohesive zone, which is a part of the modelling cut along the continuation of a crack with a cohesive stress applied to its faces; the intensity of the stress is connected with the corresponding crack opening displacements by the non-uniform traction—separation law. The cohesive length can be found analytically only for a small number of problems of fracture mechanics, for example, for the problem of a crack in an infinite plane with uniformly distributed load applied at a considerable distance from the crack. When using numerical methods, the cohesive length is found approximately by an iterative procedure. In this paper, we analyze how the precision of determination of the cohesive length influences the critical load at which fracture begins. For this purpose, an edge crack in a finite-size plate is considered. The finite element method was used to obtain the solution, which was analyzed in terms of the effect of inaccurate determination of the cohesive length on the critical load value. A comparison of the numerical solution with the semi-analytical one of a similar problem for a semi-infinite plane is illustrated. It is established that the use of a smaller cohesive length value compared with one which satisfies the smooth crack closure leads to an overestimation of the critical load value, when the fracture criterion stays the same. A simple iterative method of finding the cohesive length that satisfies the condition of smooth crack closure is illustrated.

**Keywords:** *edge crack, critical load, cohesive zone model, smooth crack closure.*