

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.036>  
УДК 538.9:539.215

**О.І. Герасимов, А.Я. Співак**

Одеський державний екологічний університет  
E-mail: gerasymovoleg@gmail.com, spivaka@ukr.net

## **Солітон в одновимірному силовому ланцюжку з герцівськими контактами**

*Представлено академіком НАН України А.Г. Загороднім*

*Детально вивчена нелінійна солітонна мода, яка може поширюватися в одновимірному ланцюжку однакових сферичних частинок, що взаємодіють за законом Герця. Отримані теоретичні результати порівняно з відповідними параметрами солітона Нестеренка. Встановлено розбіжності між амплітудами таких солітонів. Проаналізовано параметри, яким відповідає генерація солітонного режиму та арешту нелінійної моди в межах декорованого ланцюжка. Амплітуда відбитого від домішкової частинки солітона оцінена теоретично і узгоджується із експериментальними даними краще ніж отримані раніше теоретичні результати.*

**Ключові слова:** солітон, ланцюжок Герця, перенесення енергії, квазічастинка, ефективна маса, бінарні зіткнення.

Перенесення імпульсів збуджень (енергії) у одновимірних ланцюжках силових центрів є актуальною задачею [1–14]. Це пов'язано як з фундаментальним інтересом до таких задач (наприклад, про термалізацію системи) [1], так і з перспективами практичного застосування, зокрема при створенні елементів хвильової схемотехніки.

Вивчення реальних систем за допомогою їх одновимірних моделей приваблює можливістю отримання точних розв'язків, до того ж в деяких випадках існують, як штучно створені так і природні системи, які можна наближено вважати одновимірними. Наприклад, ниткоподібна кластеризація спостерігається в дискретних дисипативних матеріалах у вигляді мережі довгих ланцюжків контактуючих частинок. Низьковимірні структури, під дією зовнішнього навантаження породжують перерозподіл сил діючих у системі [3]. Сучасні технології 3D-друку дозволяють створювати такого роду конструкції довільної складності [15]. Таким чином, низьковимірні структури у мезомасштабі є реально існуючими об'єктами і вивчення їх властивостей створює предмет актуальної задачі.

---

Цитування: Герасимов О.І., Співак А.Я. Солітон в одновимірному силовому ланцюжку з герцівськими контактами *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3. С. 36–46. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.036>

**Рівняння руху імпульсу збудження у континуальній границі.** Розглянемо одновимірний обмежений силовий ланцюжок, який складається з  $N$  однакових макроскопічних частинок, що взаємодіють лише з найближчими сусідами за певним нелінійним законом. Наприклад, у випадку частинок сферичної форми така взаємодія може бути змодельована за законом Герця (тобто коли сила пружної взаємодії 2-х сферичних частинок, пропорційна дробовій степені  $\delta = 3/2$  від їх взаємної деформації  $\epsilon$ ).

Рівняння руху частинок (зауважимо, що воно не змінює форму також у випадку початкової прекомпресії, яка існує наприклад, у горизонтально розташованому ланцюжку, стиснутому зовнішньою силою, або у розташованому вертикально у полі сил тяжіння), у континуальній границі має вигляд:

$$\frac{d^2\epsilon}{d\tau^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2}(\epsilon^{3/2}) + \frac{a^4}{12} \cdot \frac{\partial^4}{\partial h^4}(\epsilon^{3/2}), \quad (1)$$

де  $\epsilon$  – величина перекриття (взаємна деформація) частинок в межах  $n$ -го контакту, яка у дискретному випадку визначається як  $\epsilon_n = d - (x_{n+1} - x_n)$ ;  $x_n$  – координата центра  $n$ -ї гранули;  $\tau = \sqrt{\gamma} \cdot t$  – перенормований час;  $\gamma = C / m = E\sqrt{d} / [3m(1-v^2)]$  – силова стала;  $E$  – модуль пружності Юнга;  $v$  – коефіцієнт Пуасона;  $d$  та  $m$  – діаметр та маса частинки-гранули відповідно;  $a$  – параметр континуального переходу, який можна прийняти співпадаючим із розміром частинки ( $a \equiv d$ ).

**Солітонний розв’язок.** Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що рівняння (1) має точний (частковий) розв’язок солітонного типу:

$$\epsilon = \epsilon_{\max} \cos^4 \left( \frac{x - vt}{\sqrt{3}a} \right), \quad (2)$$

де  $\epsilon_{\max} = 36v^4 / [25a^4\gamma^2]$  – перекриття частинок, яке відповідає максимальному зближенню сусідніх частинок;  $v = \sqrt{5 / (\pi\rho)} \cdot (E / [3a(1-v^2)])^{1/3} F_{\max}^{1/6}$  – швидкість переміщення (солітонного) збудження вздовж ланцюжка;  $\rho$  – густина матеріалу частинок;  $F_{\max}$  – амплітуда збудження. Зазначимо, що значення  $\epsilon_{\max}$  перекриття частинок ланцюжка реалізується в тому випадку, коли його центр розташований в центрі солітона.

Розв’язок (2) задовольняє умову відсутності початкової прекомпресії, тобто відповідає найпростішим однорідним умовам у рівнянні (1). Схожий розв’язок (солітон Нестеренка [2]) отримано для рівняння, яке сформульовано у наближенні “звукового вакууму” (і також за відсутності початкової прекомпресії).

Порівнюючи отриманий нами вираз для швидкості розповсюдження солітонного збудження  $v$  (див.(2)) із її визначенням (див.[7]) для солітона Нестеренка:  $v = 0,6802 \times (2E / [\rho r^{3/2}(1-v^2)])^{1/3} (F_{\max})^{1/6}$ , бачимо, що вони майже повністю збігаються (розбіжність складає ~2 %).

Визначимо тепер зміщення частинок в ланцюжку відносно їх рівноважного положення за допомогою співвідношення:  $\phi_n = x_n - x_n(0)$ , з якого з урахуванням (1), отримуємо зв’язок із перекриттям:  $\epsilon_n = \epsilon_n(0) + \phi_n - \phi_{n+1}$ . У довгохвильовому наближенні остання формула отримує наступний вигляд:  $\epsilon \approx \epsilon(0) - a \cdot \partial\phi / \partial h$ . Звідси із урахуванням розв’язку (2)

(який відповідає початковій умові  $\epsilon(0) = 0$ ), зміщення  $\phi$  будемо шукати у вигляді інтегралу виду:  $\phi = -\frac{\epsilon_{\max}}{a} \int \cos^4 \left( \frac{h-vt}{\sqrt{3}a} \right) dh$ . Виконуючи інтегрування у попередньому співвідношенні отримуємо:

$$\phi = -\frac{\sqrt{3}\epsilon_{\max}}{8} \left( \frac{\sin 4\vartheta}{4} + 2\sin 2\vartheta + 3\vartheta \right), \quad (3)$$

де  $\vartheta = (h-vt)/(\sqrt{3}a)$ . Розв'язок (3) в термінах зміщення  $\phi$  частинок, в інтервалі  $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$  має профіль, який з часом не змінюється та рухається уздовж ланцюжка із сталою швидкістю  $v$  і таким чином, має необхідні ознаки кінку.

Знайдемо швидкість зміщення частинок у збудженому ланцюжку. Виконуючи диференціювання в (3) за часом  $t$ , отримуємо:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_{\max} \cos^4 \left( \frac{h-vt}{\sqrt{3}a} \right), \quad (4)$$

де  $\dot{\phi}_{\max} = 36v^5/[25a^5\gamma^2]$ . Зауважимо, що саме таку швидкість ( $\dot{\phi}_{\max}$ ) частинка ланцюжка має у тому випадку, коли вона розташована точно в центрі солітона.

Завдяки умові  $\epsilon_{\max} \ll a$ , з виразів (2) та (4) випливають наступні обмеження:  $\epsilon_{\max}/a = \dot{\phi}_{\max}/v = 36v^4/[25a^5\gamma^2] \ll 1$ ,  $v/a = \dot{\phi}_{\max}/\epsilon_{\max} \gg 1$ , звідси маємо  $\dot{\phi}_{\max} \ll v$ . Таким чином, частинки у збудженому ланцюжку рухаються значно повільніше у порівнянні із швидкістю розповсюдження самого збудження ( $v$ ).

Підсумовуючи зауважимо, що розв'язки (2), (3) та (4) описують нелінійну локалізовану моду, яка описує розповсюдження імпульсу збудження. Як було відмічено вище, отриманий розв'язок якісно збігається із отриманим іншим шляхом в [2] для  $v$  та  $\dot{\phi}$ , але відрізняється від нього кількісно.

**Дисперсія солітона.** В отриманому солітонному розв'язку в термінах перекриття (деформації) частинок (2) (як і в термінах швидкостей зміщення частинок (4)) солітон описується функцією  $\cos^4 \vartheta$ . Тому, параметри, які характеризують дисперсію солітона в термінах  $\epsilon$  (2) (а також і  $\dot{\phi}$  у (4)) будуть близькими один до одного. Так, аргумент у виразах (2) та (4) змінюється в межах  $[-\pi/2; \pi/2]$ . Тому повна ширина солітона  $\Delta h$  та його дисперсія  $\Delta$  визначаються як:

$$\Delta h = \pi\sqrt{3}a \approx 5,441a, \quad \Delta = 2\sqrt{3}a \cdot \arccos(2^{-1/4}) \approx 1,981a. \quad (5)$$

Відповідні параметри солітона Нестеренка ([2]) складають:  $\Delta h_N = \pi\sqrt{10}a/2 \approx 4,969a$ ,  $\Delta_N = \sqrt{10}a \cdot \arccos(2^{-1/4}) \approx 1,808a$ . Розбіжності у наведених характеристиках обох розв'язків, як бачимо, складають приблизно 10 %.

**Енергія солітона.** В разі лінійних наближень в силових ланцюжках повна енергія ( $E$ ) збуджень розподіляється рівномірно, в сенсі співвідношення між кінетичною ( $E_k$ ) та потенціальною ( $E_p$ ) енергіями. Розподіл енергії в разі ланцюжка із нелінійними взаємодіями, в якому, скажімо розповсюджується солітонна мода (із виразу (4) для швидкості зміщення частинок), набуває очевидних змін.

Розглянемо найбільш загальну конфігурацію дискретного силового ланцюжка із герцівськими контактами. Припустимо, що в деякий визначений момент часу реалізується таке розташування частинок, при якому екстремуму швидкості солітона  $\phi$  відповідає положення центра мас однієї з них, тоді

$$E_k / E_p = \sum_{j=1}^5 E_{kj} / \sum_{i=1}^6 E_{pi}, \quad (6)$$

де відповідно до (5) повна ширина солітона охоплює 5 частинок (і 6 їх контактів, тобто — перекриттів).

За законом Герця  $F = C\epsilon^{3/2}$ , тому потенціальна енергія, яку умовно приписуємо  $i$ -му контакту може бути записана у наступному вигляді:  $E_{pi} = 2/5 \cdot C\epsilon_i^{5/2}$ . Відповідно потенціальна енергія, яка зосереджена в межах всіх контактів у масштабі солітона, з урахуванням  $E_{pi}$  та (2), дорівнює

$$E_p = \sum_{i=1}^6 \frac{2}{5} C\epsilon_i^{5/2} = \frac{2}{5} C\epsilon_{\max}^{5/2} \sum_{i=1}^6 \cos^{10} \frac{h_i - vt}{\sqrt{3}a}. \quad (7)$$

Користуючись виразом для кінетичної енергії частинок в солітонному пакеті (4), отримуємо

$$E_k = \sum_{j=1}^5 \frac{m\dot{\phi}_j^2}{2} = \frac{m}{2} \dot{\phi}_{\max}^2 \sum_{j=1}^5 \cos^8 \frac{h_j - vt}{\sqrt{3}a}. \quad (8)$$

Із урахуванням (7), (8), (6) отримуємо наступне співвідношення:

$$E_k / E_p = 25C_8 / [24C_{10}], \quad (9)$$

де  $C_8 = 1 + 2\cos^8 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cos^8 \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,4874$ ;

$$C_{10} = 2\cos^{10} \frac{1}{2\sqrt{3}} + 2\cos^{10} \frac{3}{2\sqrt{3}} + 2\cos^{10} \frac{5}{2\sqrt{3}} = 1,33675.$$

З (9) впливає оцінка вкладу кінетичної енергії:

$$\tilde{E}_k = E_k / E \approx 0,5368. \quad (10)$$

Отримані результати (9)–(10) демонструють нерівномірний розподіл енергії в нелінійному ланцюжку в режимі солітонної моди (4): 53,68 % припадає на кінетичну енергію руху частинок ланцюжка, а 46,32 % — на потенціальну енергію їх пружної взаємодії.

**Збудження ланцюжка ідентичною частинкою (стрікером).** Розглянемо процес передачі ланцюжку енергії від крайньої (ідентичної до частинок ланцюжка) частинки-стрікера за допомогою центрального удару зі швидкістю  $v_s$ . Завдяки закону збереження імпульсу та енергії маємо

$$mv_s = m \sum_{j=1}^5 \dot{\phi}_j + mv'_s, \quad E_s = (E_k + E_p) + E'_s, \quad (11)$$

де  $v'_s$  — швидкість збуджуючої частинки стрікера після удару;  $E_s$  та  $E'_s$  — кінетична енергія частинки-стрікера, яка збуджує ланцюжок до та після взаємодії з ланцюжком (ударом) відповідно.

Сумісне розв'язання системи рівнянь (11), яка впливає із законів збереження імпульсу і енергії, відповідно, дає наступні розв'язки для швидкостей частинки-стрікера до та після зіткнення:

$$v_s = \frac{\dot{\phi}_{\max}}{2} \left( \frac{C_8}{C_4 \tilde{E}_k} + C_4 \right), \quad v'_s = \frac{\dot{\phi}_{\max}}{2} \left( \frac{C_8}{C_4 \tilde{E}_k} - C_4 \right), \quad (12)$$

де  $C_4 = 1 + 2 \cos^4 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cos^4 \frac{2}{\sqrt{3}} = 2,03926$  — коефіцієнт, який визначається підстановкою солітонного розв'язку (4) до закону збереження імпульсу (11), звідки маємо:

$$\sum_{j=1}^5 \dot{\phi}_j = \dot{\phi}_{\max} \sum_{j=1}^5 \cos^4 \frac{h_j - vt}{\sqrt{3}a} = C_4 \dot{\phi}_{\max}.$$

Використовуючи в (12) чисельні значення сталих  $C_8$ ,  $\tilde{E}_k$  та  $C_4$ , які були визначені в (9)–(10) і (12), після елементарних маніпуляцій, отримуємо:

$$\dot{\phi}_{\max} \approx 0,5886 v_s, \quad v'_s \approx -0,2003 v_s. \quad (13)$$

Знак мінус у виразі (13) вказує на зміну напрямку руху частинки-стрікера після її взаємодії з ланцюжком. Отримані характеристики  $v'_s$  добре узгоджуються із результатами чисельних розрахунків, проведених в [6].

Відзначимо також, що згідно з результатами чисельних розрахунків [6], зв'язок між  $v_s$  та  $\dot{\phi}_{\max}$  має вигляд

$$\dot{\phi}_{\max} = 0,682 v_s. \quad (14)$$

Теоретичний аналіз, проведений для солітона Нестеренка у [8], показав для цієї ж величини наступний результат:  $\dot{\phi}_{\max} = 0,616 v_s$ . Порівнявши (13) та (14), одержуємо висновок, що у випадку знайденої нами моди максимальна швидкість зміщення частинок у ланцюжку за однакових умов збудження є помітно меншою і відрізняється приблизно на 15 %.

Якщо врахувати вирази (13) та  $\dot{\phi}_{\max}$  (4), швидкість збурення ланцюжка ( $v_s$ ) можна пов'язати із швидкістю поширення солітона ( $v$ ), а саме:  $v = (25/36 \cdot a^5 \gamma^2 0,5886 v_s)^{1/5} = 0,8362 (\gamma^2 v_s)^{1/5} a$ . Тобто, швидкість солітона  $v$  є пропорційною до діаметра частинок ланцюжка  $a$ , а також залежить від матеріальних сталих  $\sim \gamma^{2/5}$  та початкової швидкості “стрікера”  $\sim v_s^{1/5}$ .

**Квазідисипативний сценарій опису збудження ланцюжка.** Так як частина початкової енергії  $E_s$  стрікера переходить (після взаємодії його з ланцюжком) в потенціальну енергію сил пружності (в області міжчастинкових контактів), таку взаємодію можна умовно розглядати, як непружну (квазідисипативну), тобто таку, при якій повна кінетична енергія (солітона) фактично не зберігається, а передається іншій системі (контакту). У загальному випадку характеристикою дисипативних витрат у бінарних зіткненнях виступає коефіцієнт відновлення (restitution coefficient)  $\alpha$ . У випадку, коли  $\alpha = 0$  маємо абсолютно непружний

удар, а для  $\alpha = 1$ , відповідно, абсолютно пружне зіткнення). Покладемо, що роль величини дисипації  $D$  виконує частка загальної кількості (кінетичної) енергії  $E_s$  стрікера, яка переходить у потенціальну енергію на контактах:  $D = E_p$ .

Будемо вважати, що частинки ланцюжка, які охоплені солітонним збудженням, утворюють своєрідну солітонну квазічастинку. Розглянемо взаємодію збуджуючої ланцюжок частинки-стрікера масою  $m_s$  із солітонною квазічастинкою у рамках відомої моделі непружного центрального удару. Розв'язком такої моделі є наступні характеристики квазічастинки:

$$v_{eff} = \dot{\phi}_{max} C_8 / C_4, \quad m_{eff} = m \times C_4^2 / C_8, \quad (15)$$

де  $v_{eff}$  та  $m_{eff}$  — ефективні швидкість та маса квазічастинки (солітона) відповідно. Співвідношення, які визначають  $v_{eff}$  та  $\dot{\phi}_{max}$  в залежності від  $v_s$ , мають наступний вигляд:

$$v_{eff} = 2v_s / \left( 1 + \frac{m_{eff}}{m_s} + \frac{E_p}{E_k} \right), \quad \dot{\phi}_{max} = 2C_4 v_s / \left( C_8 + \frac{m}{m_s} C_4^2 + \frac{24}{25} C_{10} \right). \quad (16)$$

Для коефіцієнта непружних втрат  $\alpha$  отримуємо:

$$\alpha = \left( C_8 + \frac{m}{m_s} C_4^2 - \frac{24}{25} C_{10} \right) / \left( C_8 + \frac{m}{m_s} C_4^2 + \frac{24}{25} C_{10} \right). \quad (17)$$

З (17) випливає, що коефіцієнт  $\alpha$  залежить від співвідношення маси частинки в ланцюжку ( $m$ ) та маси частинки-стрікера ( $m_s$ ). За умови  $m_s = m$ , з (17) отримуємо  $\alpha \approx 0,63$ .

У випадку коли зворотній імпульс частинки-стрікера (після взаємодії з ланцюжком) обертається на нуль ( $v_s' = 0$ ), запропонована модель дозволяє знайти наступні співвідношення:  $\alpha = m_s / m_{eff} = \tilde{E}_k$ . З урахуванням (15) для відносної маси збуджуючої частинки отримуємо

$$m_s / m = \tilde{E}_k C_4^2 / C_8 \approx 1,50. \quad (18)$$

При цьому  $\alpha = \tilde{E}_k \approx 0,54$ .

**Енергія децентрованого солітона.** Приймемо, що в деякий момент реалізується таке положення частинок (в межах солітонного пакету в термінах  $\phi$  (4)), що в його центрі розташований не центр однієї з частинок ланцюжка, а один із контактів між ними.

Перепишемо (6) в цьому разі наступним чином:  $E_k / E_p = \sum_{j=1}^6 E_{kj} / \sum_{i=1}^5 E_{pi}$ , де у відповідності

до виразу (5) повна ширина солітона охоплює 6 центрів мас частинок і 5 їх контактів (перекриттів). З урахуванням записаного тут виразу для відношення енергій  $E_k / E_p$ , отри-

муємо  $E_p = \sum_{i=1}^5 \frac{2}{5} C \epsilon_i^{5/2} = \frac{2}{5} C \epsilon_{max}^{5/2} \sum_{i=1}^5 \cos^{10} \vartheta_i$ ,  $E_k = \sum_{j=1}^6 \frac{m \dot{\phi}_j^2}{2} = \frac{m}{2} \dot{\phi}_{max}^2 \sum_{j=1}^6 \cos^8 \vartheta_j$ , які замінюють

(7) та (8) відповідно. Відношення кінетичної енергії до потенціальної у новій конфігурації має вигляд:

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{25}{24} \cdot \frac{2\cos^8 \frac{1}{2\sqrt{3}} + 2\cos^8 \frac{3}{2\sqrt{3}} + 2\cos^8 \frac{5}{2\sqrt{3}}}{1 + 2\cos^{10} \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cos^{10} \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{25}{24} \cdot \frac{\tilde{C}_8}{\tilde{C}_{10}} \approx 1,1558, \quad (19)$$

де  $\tilde{C}_8 = 1,4884$ ,  $\tilde{C}_{10} = 1,3414$ . Із (19) отримуємо величини відносних внесків кінетичної та потенціальної енергії:

$$\tilde{E}_k = E_k / E \approx 0,5361, \quad \tilde{E}_p = 1 - \tilde{E}_k \approx 0,4639. \quad (20)$$

**Пружний сценарій збудження ланцюжка.** У розглянутій моделі взаємодії частинки-стрікера із ланцюжком були враховані відповідні умовні витрати енергії. Роль дисипації при цьому відігравав частковий перехід кінетичної в потенціальну енергію пружної деформації на міжчастинкових контактах (інтерфейсах).

Розглянемо тепер передачу енергії від стрікера маси  $m_s$  (яка може бути, як ідентичною до частинок ланцюжка, так і відмінною від неї) до ланцюжку складеного із ідентичних сферичних частинок масою  $m$ . Будемо використовувати у подальшому наближення абсолютно пружного удару. На цьому шляху отримуємо:

$$\tilde{v}_{eff} = \frac{v_{eff}}{\tilde{E}_k} = \frac{1}{\tilde{E}_k} \frac{C_8}{C_4} \phi_{max}, \quad \tilde{m}_{eff} = m_{eff} \tilde{E}_k = m \frac{C_4^2}{C_8} \tilde{E}_k, \quad (21)$$

де  $\tilde{v}_{eff}$  та  $\tilde{m}_{eff}$  – відповідно, ефективна швидкість та ефективна маса квазічастинки (солітона).

Із (21) випливає, що ефективна маса  $\tilde{m}_{eff}$  солітонної квазічастинки, яка задовольняє умові абсолютно пружного удару має вигляд

$$\tilde{m}_{eff} = 2,796m \cdot 0,5368 = 1,5009m, \text{ 5 частинок, 6 контактів,}$$

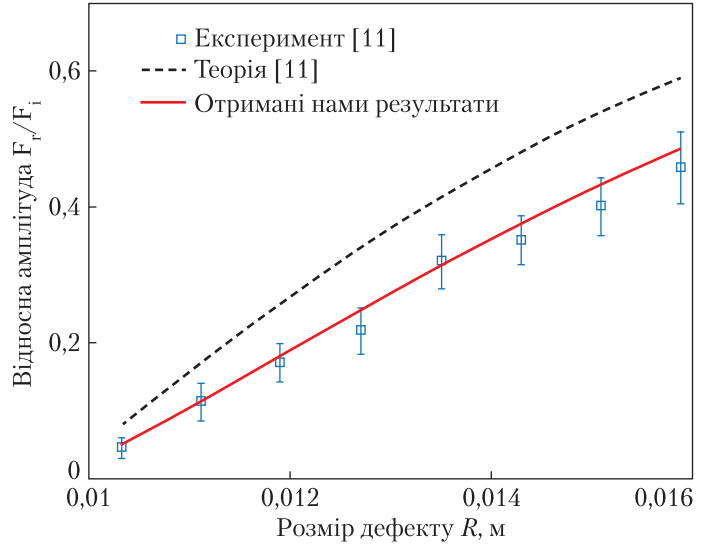
$$\tilde{m}_{eff} = 2,801m \cdot 0,5361 = 1,5016m, \text{ 6 частинок, 5 контактів,}$$

$$\tilde{m}_{eff} = \langle \tilde{m}_{eff} \rangle \pm \Delta \tilde{m}_{eff} = (1,50125 \pm 0,00035)m.$$

Таким чином, ефективна маса солітонної квазічастинки складає приблизно понад півтори маси ( $m$ ) частинки, яка входить до складу ланцюжка. Якщо стрікер взаємодіє із солітонною квазічастинкою у ланцюжку як із частинкою ідентичної маси тоді внаслідок пружного сценарію вони обмінюються швидкостями. В такому підході стрікер фактично налітає на квазічастинку, яка знаходиться у стані спокою. Згідно зі сценарієм пружного зіткнення, після контакту стрікер має зупинитися. Подібну ситуацію можна очікувати і при зворотному процесі, тобто коли солітонна квазічастинка проходячи по ланцюжку досягає його краю і взаємодіє з крайньої частинкою, яка має півтори маси в термінах окремої частинки ланцюжка. У такому випадку відбиття солітонного імпульсу спостерігатися не буде, так як при ударі солітонна квазічастинка передасть енергію граничній і так би мовити “зупиниться” (тобто солітон у початковому сенсі перестане існувати).

Розглянута в попередньому абзаці ситуація може бути використана у відомій моделі колиски (ланцюжка) Ньютона (Newton's cradle). Відомо, що запущений в ланцюжку Ньютона імпульс з часом починає розгойдувати всю систему, як ціле, що пов'язано в свою чергу з тим, що система містить частинки однакової маси і після кожного зіткнення стріке-

Відносна амплітуда  $F_r / F_i = |v_r / v_i|^{6/5}$  відбиття солітонного збудження від “важкого” ізотопічного дефекту у герцівському ланцюжку. Отримані нами теоретичні результати для  $F_r / F_i = [(M - m) / (M + 2m)]^{6/5}$  (див. (25)) — зображені суцільною червоною лінією. Експериментальні дані і модельні розрахунки виконані в [11] — зображені синіми квадратами (із зазначенням похибок вимірювань) та чорним пунктиром, відповідно.



ра із ланцюжком, стрікер не зупиняється, а відбивається у протилежному напрямку (хоча й із швидкістю, що поступово, із кожним циклом, зменшується).

Таким чином, якщо на границях ланцюжка Ньютона розмістити кулі з масою в  $1,5 m$ , введений в систему імпульс збудження буде циркулювати всередині із загасанням внаслідок дії дисипативних сил (тертя).

**Солітон в декорованому “дефектами” ланцюжку.** Розглянемо взаємодію запропонованої вище солітонної квазічастинки із найпростішим — ізотопічним дефектом довільно розташованим всередині ланцюжка із масою  $M \geq m$ . При центральному пружному зіткненні двох частинок, одна з яких знаходилася у стані спокою, швидкості налітаючої частинки до та після зіткнення задовільняють співвідношенню

$$-v_1' / v_1 = (m_2 - m_1) / (m_2 + m_1). \quad (22)$$

Користуючись ефективними швидкостями та масами, з урахуванням (22), отримуємо

$$-\tilde{v}'_{eff} / \tilde{v}_{eff} = (\tilde{M} - \tilde{m}_{eff}) / (\tilde{M} + \tilde{m}_{eff}), \quad (23)$$

де  $\tilde{M}$  — ефективна маса дефекту (вона може відрізнятись від істинної маси  $M$  на величину  $\Delta M = \tilde{M} - M$ ). За відсутності дефектів ( $M = m$ ) солітонне збудження поширюється без відбиття (тобто  $-\tilde{v}'_{eff} / \tilde{v}_{eff} = 0$ ). У випадку однорідного ланцюжка за допомогою (23) маємо:  $\tilde{M} = \tilde{m}_{eff} \approx 1,5m$ , тобто  $\Delta M = \tilde{M} - M = 1,5m - m = 0,5m$  — маса, яку треба додати до чистої маси дефекту (таким чином і буде сформована його ефективна маса). Припустимо, що  $\Delta M = 0,5m$  не тільки в разі  $M = m$ , але й (приблизно) для  $M > m$ . Тоді для ефективної маси дефекта отримуємо

$$\tilde{M} = M + 0,5m. \quad (24)$$

Підставляючи (24) у співвідношення (23) і враховуючи  $\tilde{v}'_{eff} / \tilde{v}_{eff} = \Phi'_{max} / \Phi_{max}$ , знаходимо



$$-\dot{\phi}'_{\max} / \dot{\phi}_{\max} = (M - m) / (M + 2m). \quad (25)$$

Отриманий результат (25) добре узгоджується з даними безпосереднього фізичного експерименту [11] (див. рис.). Тут враховано, що  $F_r / F_i = |v_r / v_i|^{6/5}$ , де  $F_r$  та  $F_i$  – амплітуди відбитого (від дефекту) та налітаючого (на дефект) солітона відповідно; а  $v_r$  та  $v_i$  – максимальні швидкості зміщення частинок у зазначених модах (див.(2) та (4)).

**Висновки.** Солітонна мода, отримана у одновимірному нелінійному силовому ланцюжку із герцівськими контактами за допомогою використання пробного розв'язку виду  $A \cos^4 \vartheta$  (де  $\vartheta = (h - ct) / \lambda$  – автохвильовий аргумент) до нелінійного континуального рівняння (1), яке описує рух збудження у довгохвильовому наближенні. Порівняння її параметрів, зокрема швидкості розповсюдження солітона  $v$  та дисперсії  $\Delta$  із відповідними характеристиками відомого солітона Нестеренка показало їх розбіжність приблизно у 2 % та 10 % відповідно. Наявність розбіжностей пов'язана із задіяними підходами при отриманні керуючих рівнянь, які дещо розрізняються. А саме, стартуючи з найбільш загального дискретного рівняння руху збудження для герцівського ланцюжка без прекомпресії в нашій роботі ми отримуємо керуюче рівняння (1) в термінах перекриттів використовуючи лише довгохвильове наближення. Натомість, при отриманні рівняння для солітона Нестеренка в термінах зміщень, після континуального наближення, додатково виконується розкладання в ряд за від'ємними градієнтами зміщення (фактично по перекриттям).

Запропонована модель солітонної квазічастинки у застосуванні до задачі про ударне збудження та динаміку знайденої нелінійної моди за допомогою якої знайдені критерій генерації самого солітона, його параметри та умови і характеристики його відбиття від ізотопічних дефектів (чи декоруючих домішок). Теоретична оцінка для амплітуди відбитого від домішкової частинки солітона узгоджується із експериментальними даними краще за відомі результати.

Показано, що нерівномірність розподілу енергії в ланцюжку в солітонному режимі складає  $E_k / E \approx 54\%$ . Знайдено швидкість поширення солітона  $v$  та максимальну швидкість руху частинок у ньому  $\dot{\phi}_{\max}$ , як функцію швидкості збуджуючої частинки  $v_s$ ; співвідношення для коефіцієнта непружних витрат  $\alpha$ ; співвідношення для ефективних мас  $m_{eff}$  і  $\tilde{m}_{eff}$  та швидкостей квазічастинки  $v_{eff}$  і  $\tilde{v}_{eff}$ , відносну амплітуду відбитого від дефекту солітонного збудження. Проаналізовані як дисипативний так і пружний сценарії взаємодії. Знайдено критерій в термінах маси збуджуючої частинки-стрікера ( $m_s / m \approx 1,50$ ) за умов виконання якого надана ланцюжку енергія запирається в його межах (і не витрачається хоча б і частково суто на його відбиття).

*Автори висловлюють подяку акад. НАН України А.Г. Загородніму за стимулюючий інтерес до роботи та корисні зауваження.*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Fermi E., Pasta J.R., Ulam S.M. Studies of Nonlinear Problems. Technical Report LA-1940, Los Alamos Sci. Lab. 1955. P. 978–988. <https://doi.org/10.2172/4376203>
2. Нестеренко В.Ф. Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах. *Журн. прикл. мех. техн. физ.* 1983. № 5. С. 136–148.

3. Goldhirsch I.S.A.A.C., Zanetti G. Clustering instability in dissipative gases. *Physical Review Letters*. 1993. **70**, № 11. P. 1619–1622. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1619>
4. Coste C., Falcon E., Fauve S. Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact. *Phys. Rev. E*. 1997. **56**, № 5. P. 6104–6117. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.6104>
5. Hascoët E., Herrmann H.J. Shocks in non-loaded bead chains with impurities. *The Eur. Phys. J. B*. 2000. **14**. P. 183–190. <https://doi.org/10.1007/s100510050119>
6. Chatterjee A. Asymptotic solution for solitary waves in a chain of elastic spheres. *Phys. Rev. E*. 1999. **59**, № 5. P. 5912–5919. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.5912>
7. Daraio C., Nesterenko V.F., Herbold E.B., Jin S. Tunability of solitary wave properties in one-dimensional strongly nonlinear photonic crystals. *Phys. Rev. E*. 2006. **73**, No. 2. P. 026610/1–10. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.026610>
8. Job S., Melo F., Sokolow A., Sen S. Solitary wave trains in granular chains: experiments, theory and simulations. *Granular Matter*. 2007. **10**, № 1. P. 13–20. <https://doi.org/10.1007/s10035-007-0054-2>
9. Герасимов О.І., Ванделвалле Н. Щодо точних розв'язків задачі про перенесення імпульсу у неоднорідному гранульованому ланцюжку. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2012. № 8. С. 67–72.
10. Stefanov A., Kevrekidis P. On the Existence of Solitary Traveling Waves for Generalized Hertzian Chains. *J. Nonl. Sci.* 2012. **22**, № 3. P. 327–349. <https://doi.org/10.1007/s00332-011-9119-9>
11. Li F., Zhao L., Tian Zh., Yu L., Yang J. Visualization of solitary waves via laser Doppler vibrometry for heavy impurity identification in a granular chain. *Smart Mater. Struct.* 2013. **22**, № 3. P. 035016/1–10. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/3/035016>
12. Lumay G., Dorbolo S., Gerasymov O., Vandewalle N. Experimental study of a vertical column of grains submitted to a series of impulses. *European Phys. J. E*. 2013. **36**, № 2. P. 16/1–6. <https://doi.org/10.1140/epje/i2013-13016-1>
13. Герасимов О.І. Фізика гранульованих матеріалів. Одеса: ТЕС, 2015. 264 с.
14. Yasuda H., Chong C., Yang J., Kevrekidis P.G. Emergence of dispersive shocks and rarefaction waves in power-law contact models. *Phys. Rev. E*. 2017. **95**, № 6. P. 062216/1–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.062216>
15. Donovan K.J. Microfluidic Investigations of Capillary Flow and Surface Phenomena in Porous Polymeric Media for 3D Printing. Thesis PhD in Materials Science. Oregon State Univ., Corvallis, USA, 2019. 132 p.

Надійшло до редакції 14.01.2020

## REFERENCES

1. Fermi, E., Pasta, J. R. & Ulam, S. M. (1955). Studies of Nonlinear Problems. Technical Report LA-1940, Los Alamos Sci. Lab., pp. 978-988. <https://doi.org/10.2172/4376203>
2. Nesterenko, V. F. (1983). Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *J. Appl. Mech. Tech. Phys. (Engl. Trans.)*, 24, No. 5, pp. 733-743. <https://doi.org/10.1007/BF00905892>
3. Goldhirsch, I. S. A. A. C. & Zanetti, G. (1993). Clustering instability in dissipative gases. *Physical review letters*, 70, No. 11, pp. 1619-1622. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1619>
4. Coste, C., Falcon, E. & Fauve, S. (1997). Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact. *Phys. Rev. E*, 56, No. 5, pp. 6104-6117. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.6104>
5. Hascoët, E. & Herrmann, H. J. (2000). Shocks in non-loaded bead chains with impurities. *The Eur. Phys. J. B*, 14, pp. 183-190. <https://doi.org/10.1007/s100510050119>
6. Chatterjee, A. (1999). Asymptotic solution for solitary waves in a chain of elastic spheres. *Phys. Rev. E*, 59, No. 5, pp. 5912-5919. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.5912>
7. Daraio, C., Nesterenko, V. F., Herbold, E. B. & Jin S. (2006). Tunability of solitary wave properties in one-dimensional strongly nonlinear photonic crystals. *Phys. Rev. E*, 73, No. 2, pp. 026610/1-10. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.026610>
8. Job, S., Melo, F., Sokolow, A. & Sen, S. (2007). Solitary wave trains in granular chains: experiments, theory and simulations. *Granular Matter*, 10, No. 1, pp. 13-20. <https://doi.org/10.1007/s10035-007-0054-2>
9. Gerasymov, O. I. & Vandewalle, N. (2012). On the exact solutions of the problem of impulsive propagation in an inhomogeneous granular chain. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 8, pp. 67-72 (in Ukrainian).

10. Stefanov, A. & Kevrekidis, P. (2012). On the Existence of Solitary Traveling Waves for Generalized Hertzian Chains. *J. Nonl. Sci.*, 22, No. 3, pp. 327-349. <https://doi.org/10.1007/s00332-011-9119-9>
11. Li, F., Zhao, L., Tian, Zh., Yu, L. & Yang, J. (2013). Visualization of solitary waves via laser Doppler vibrometry for heavy impurity identification in a granular chain. *Smart Mater. Struct.*, 22, No. 3, pp. 035016/1-10. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/3/035016>
12. Lumay, G., Dorbolo, S., Gerasymov, O. & Vandewalle, N. (2013). Experimental study of a vertical column of grains submitted to a series of impulses. *Eur. Phys. J. E*, 36, No. 2, pp. 16/1-6. <https://doi.org/10.1140/epje/i2013-13016-1>
13. Gerasymov, O. I. (2015). *Physics of granular materials*. Odesa: TES (in Ukrainian).
14. Yasuda, H., Chong, C., Yang, J. & Kevrekidis, P. G. (2017). Emergence of dispersive shocks and rarefaction waves in power-law contact models. *Phys. Rev. E*, 95, No. 6, pp. 062216/1-5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.062216>
15. Donovan, K. J. (2019). *Microfluidic Investigations of Capillary Flow and Surface Phenomena in Porous Polymeric Media for 3D Printing*. (Thesis PhD in Materials Science). Oregon State Univ., Corvallis, USA.

Received 14.01.2020

О.І. Герасимов, А.Я. Спивак

Одесский государственный экологический университет

E-mail: gerasymovoleg@gmail.com, spivaka@ukr.net

#### СОЛИТОН В ОДНОМЕРНОЙ СИЛОВОЙ ЦЕПОЧКЕ С ГЕРЦЕВСКИМИ КОНТАКТАМИ

Детально изучена солитонная мода, распространяющаяся в одномерной нелинейной цепочке одинаковых сферических частиц, взаимодействующих по закону Герца. Полученные теоретические результаты сравниваются с соответствующими параметрами солитона Нестеренко. Отмечены небольшие расхождения в терминах амплитуд и дисперсий обеих нелинейных мод. Особое внимание уделяется параметрам, которые описывают такие условия возбуждения, которым соответствуют генерация солитонного режима и арест энергии нелинейной моды в декорированной цепочке. Амплитуда отраженного от примесной частицы солитонного пакета найдена теоретически и согласуется с экспериментальными данными лучше чем в ряде аналогичных исследований.

**Ключевые слова:** солитон, цепочка Герца, перенос энергии, квазичастица, эффективная масса, бинарные столкновения.

О.І. Герасимов, А.Я. Спивак

Odesa State Environmental University

E-mail: gerasymovoleg@gmail.com, spivaka@ukr.net

#### SOLITON IN A ONE-DIMENSIONAL FORCE CHAIN WITH HERTZ CONTACTS

We study comprehensively a nonlinear solitonic mode which propagates in the long-wave limit in a 1D chain of identical spherical particles interacting with each other by the Hertz law. The obtained theoretical results have been compared with relevant parameters of familiar Nesterenko's soliton. Quantitative discrepancies between parameters of both results are outlined. Particular attention has been paid to the study of parameters which describe the impact conditions for a discrete chain and correspond to the solitonic mode generation, non-homogeneous energy distribution, and the arrest of the solitonic energy within a particularly decorated (defected) chain. The amplitude of the soliton mode reflected from an impurity particle is estimated theoretically and found to be in a good agreement with the experimental data (much better than in analogous works).

**Keywords:** soliton, Hertz chain, energy transmission, quasiparticle, effective mass, binary collisions.