ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.04.003
УДК 517.98

В.В. Городецький, О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, alfaolga1@gmail.com

Властивість локалізації для згорток узагальнених періодичних функцій

Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком

Відомий принцип локалізації Рімана для рядів Фур'є сумовних функцій переформульовано для згорток узагальнених періодичних функцій із сім'ями функцій, які, як правило, збігаються з ядрами певних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є (наприклад, методів підсумовування типу Гаусса—Вейєрштрасса). Сім'ї функцій, для яких виконується принцип локалізації Рімана, називаємо сім'ями функцій класу $\mathcal{L}(X)$. Знайдені необхідні й достатні умови належності сім'ї функцій до класу $\mathcal{L}(X)$ у випадку, коли X — досить широкий неквазіаналітичний клас періодичних функцій або X — клас аналітичних періодичних функцій (зокрема, $X = G_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$ і $X = G_{\{\beta\}}$, якщо $0 < \beta \leqslant 1$). Обґрунтовано також означення "аналітичний функціонал рівний нулю на відкритій множині"; наведено конкретний приклад аналітичного функціонала, який рівний нулю на $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. Використання одержаного результату в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними дає можливість знайти нову властивість (властивість локалізації, властивість локального покращення збіжності) розв'язків багатьох задач математичної фізики, оскільки такі розв'язки часто зображуються у вигляді згортки деякої сім'ї основних функцій з простору X з функцією F, заданою на межі області, при цьому F може бути узагальненою функцією з простору X'.

Ключові слова: *властивість локалізації, узагальнена функція, згортка, ряди Фур'є.*

Для рядів Фур'є сумовних на $[0, 2\pi]$ функцій добре відомий принцип локалізації Рімана [1]: збіжність або розбіжність ряду Фур'є функції $f \in L_1[0, 2\pi]$ у точці залежить лише від поведінки f в околі цієї точки (самий же ряд Фур'є визначається "глобальними" властивостями функції f). Точніше, якщо функції $\{f_1, f_2\} \subset L_1[0, 2\pi]$ збігаються на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, то на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a, b)$ різниця їхніх рядів Фур'є рівномірно збігається до нуля. Добре відомо також, що якщо $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$ — ряд Фур'є сумовної функції f, то частинні суми цього ряду зображуються у вигляді

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}} dx = (\mathcal{D}_n * f)(t),$$

Цитування: Городецький В.В., Мартинюк О.В. Властивість локалізації для згорток узагальнених періодичних функцій. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 4. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.04.003

де $\mathcal{D}_n(x) = \sin(n+1/2)x/(2\sin x/2)$ — ядра Діріхле. Тому принцип локалізації Рімана можна переформулювати таким чином: якщо функція $f \in L_1[0, 2\pi]$ рівна нулю на інтервалі (a, b), то згортка $(\mathcal{D}_n * f)(t)$ рівномірно збігається до нуля на кожному відрізку $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a, b)$.

Якщо розглядати згортки з ядрами Діріхле не звичайних, а узагальнених 2π-періодичних функцій, то принцип локалізації не буде виконуватися вже в класі розподілів Л. Шварца [2, 3].

У вигляді згортки деякої функції з сім'єю ядер, подібних ядрам Діріхле, зображуються також розв'язки багатьох крайових задач. Такі розв'язки мають вигляд $u(t, x) = (K_t * F)(x)$, де параметри t та x змінюються в деякій області з межею $\Gamma = \{(t, x) : t = t_0\}$, функція F задана на межі, а $\{K_t\}$ – деяка сім'я функцій (ядер). Так, наприклад, розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у крузі збігається з перетворенням Абеля—Пуассона ряду Фур'є функції F, заданої на межі круга, і подається у вигляді згортки ядер Фур'є методу підсумовування Абеля—Пуассона з функцією F. При цьому F може бути узагальненою функцією з деякого простору X', а $\{K_t, t \in T\}$ — сім'я основних функцій з простору X, $u(t, x)$ при $t \to t_0$ збігається до F, взагалі кажучи, в слабкій топології простору X'; сильніша збіжність (рівномірна) має місце у випадку, коли F – неперервна або гладка функція.

Припустимо, що для згортки узагальнених функцій з X' з ядрами $K_t(x)$ справджується принцип локалізації, аналогічний принципу локалізації Рімана для рядів Фур'є. Тоді, якщо узагальнена функція $F \in X'$ збігається на деякій частині межі області з гладкою функцією, то розв'язок $u(t, x)$ прямує до F рівномірно з наближенням до цієї частини межі.

Із сказаного вище випливає, що природно поставити таку задачу: які умови повинна задовольняти сім'я функцій $\{K_t(x)\}$ (параметр t перебігає деяку множину T з граничною точкою t_0), щоб для згорток вигляду $K_t * F$ виконувався принцип локалізації Рімана (у цьому випадку сім'ю функцій $\{K_t, t \in T\}$ називатимемо сім'єю функцій класу $\mathcal{L}(X)$). І.Г. Ізвєков [4] вивчав необхідні й достатні умови належності сукупності основних функцій $\{K_t, t \in T\}$ до класу $\mathcal{L}(X)$ у випадку, коли $X = G_{\{\beta\}}, \beta \geqslant 1$, — добре відомий клас Жеврe порядку β періодичних функцій [2]. При цьому клас Жеврe $G_{\{1\}}$, який складається з аналітичних 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій, не містить фінітних функцій. Використовуючи аналітичне зображення гіперфункції $F \in G'_{\{1\}}$, І.Г. Ізвєков встановив необхідні й достатні умови характеристики класу $\mathcal{L}(G_{\{1\}})$. Аналітичні зображення узагальнених функцій досліджувались також Г. Тільманом [5] і М. Сато [6—8]. Особливу увагу зображенню розподілів за допомогою аналітичних функцій і вивченню їхніх властивостей приділяв у своїх працях Г. Бремерман [9]. Теорема Бремермана про аналітичне зображення узагальнених функцій з простору $\mathcal{E}'$ перенесена Т.І. Готинчан на випадок класу $(S^1_\alpha)'$, $\alpha > 0$ [10]. За допомогою цієї теореми та безпосередніх наслідків з неї Т.І. Готинчан з В.В. Городецьким [11] обґрунтували поняття "аналітичний функціонал рівний нулю на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$" у випадку неперіодичних класів квазіаналітичних функцій з просторів типу S.

У цій роботі знайдені необхідні й достатні умови належності сім'ї функцій $\{K_t\}$ до класу $\mathcal{L}(X)$ у випадку, коли X — досить широкий неквазіаналітичний клас періодичних функцій або X — клас аналітичних періодичних функцій (зокрема, $X = G_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$ і $X = G_{\{\beta\}}$, якщо $0 < \beta \leqslant 1$).

1. Нехай X — локально опуклий лінійний топологічний простір числових функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$. Такий простір назвемо основним, а його елементи — основними функціями. Припустимо, що X замкнений відносно операцій зсуву та дзеркального відбиття, тобто якщо $\varphi \in X$, то $T_t\varphi$, $\breve{\varphi}$ також є елементами простору X, де

$$(T_t\varphi)(x) := \varphi(x+t),\, t \in \mathbb{R}^n; \quad \breve{\varphi}(x) := \varphi(-x).$$

У цьому випадку для довільних елементів $\varphi \in X$ та $F \in X'$ визначена функція $F * \varphi$, яка задається формулою $(F*\varphi)(t) = \langle F, T_t\breve{\varphi}\rangle,\ t \in \mathbb{R}^n$. Ця функція називається згорткою узагальненої функції F та основної функції φ (елементи простору X', топологічно спряженого з X, називатимемо узагальненими функціями).

Мультиплікатором у просторі X називається функція ψ, задана на $\mathbb{R}^n$ така, що множення на цю функцію є неперервною операцією в X. Це означає, що для будь-якої функції $\varphi \in X$ поточковий добуток — функція $\varphi\psi$ знову належить до X і для кожного околу нуля $U \subset X$ існує окіл нуля $V \subset X$ такий, що $\{\varphi\psi \in V\} \subset U$.

Надалі будемо припускати, що основний простір X задовольняє додатково умови $\alpha)$ і $\beta)$, сформульовані в [4].

$\alpha)$ операція зсуву T_t в просторі X є "рівномірно неперервною на компактах", тобто для довільного околу нуля $U \subset X$ і довільного компакта $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^n$ повинен існувати окіл нуля $V \subset X$ такий, що сукупність функцій $\{\varphi(x+t),\, \varphi \in V, t \in \mathbb{K}\}$ попадає в U; $\beta)$ для довільної відкритої множини $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і компакта $\mathbb{K} \subset \Omega$ існує мультиплікатор ψ у просторі X такий, що $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega$ і $\psi(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{K}$.

Умова $\beta)$ забезпечує наявність у просторі X достатньо великий запас фінітних функцій і дає змогу ввести означення рівності нулю узагальненої функції на відкритій множині.

Означення 1. Узагальнена функція $F \in X'$ рівна нулю на відкритій множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in X$ такої, що $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, виконується рівність $\langle \mathrm{F}, \varphi\rangle = 0$. Дві узагальнені функції $\{F_1, F_2\} \subset X'$ збігаються на множині Ω, якщо їх різниця рівна нулю на цій множині.

Означення 2. Нехай $\boldsymbol{A}$ — деяка множина параметрів із єдиною граничною точкою a_0, $\{\varphi_a, a \in A\}$ – сукупність основних функцій. Назвемо її сім'єю класу $\mathcal{L}(X)$ у просторі X, якщо для довільної узагальненої функції $F \in X'$, яка рівна нулю на Ω, виконується граничне співвідношення $F * \varphi_a \rightrightarrows 0$, $a \to a_0$, на довільному компакті $\mathbb{K} \subset \Omega$. Якщо $\boldsymbol{A} = \mathbb{N}$, то така сім'я називається послідовністю класу $\mathcal{L}(X)$ (тут і далі знак $\rightrightarrows$ означає рівномірну збіжність).

І.Г. Ізвєковим [4] доведено таке твердження.

Теорема 1. *Якщо сім'я основних функцій* $\{\varphi_a, a \in A\}$ *така, що*

$$\psi \cdot \varphi_a \xrightarrow{X} 0, \quad a \to a_0, \tag{1}$$

для довільного мультииплікатора ψ *з носієм, який не містить точку* 0, *то ця сім'я належить до класу* $\mathcal{L}(X)$.

2. Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ 2π-періодичних функцій. Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка має властивості [3]:

1) $\forall\alpha>0\,\exists c_\alpha>0\,\forall k\in\mathbb{Z}_+: m_k\geqslant c_\alpha\cdot\alpha^k$;

2) $\exists M>0\,\exists h>0\,\forall k\in\mathbb{Z}_+: m_{k+1}\leqslant Mh^k m_k$;

3) $\exists A>0\,\exists L>0\,\forall\{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+: m_k\cdot m_l\leqslant AL^{k+l}m_{k+l}$;

4) $\exists B>0\,\exists s>0\,\forall k\in\mathbb{Z}_+: m_k\leqslant Bs^k\min\limits_{0\leqslant l\leqslant k} m_{k-l}\cdot m_l$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_k=(k!)^\beta$, $m_k=k^{k\beta}$, $\beta>0$. Позначимо

$$H_B\langle m_k\rangle:=\{\varphi\in C^\infty_{2\pi}\,|\,\exists c>0:|\varphi^{(k)}(x)\leqslant cB^k m_k,\, k\in\mathbb{Z}_+,\, B>0\}.$$

Простір $H_B\langle m_k\rangle$ банаховий відносно норми $\|\varphi\|_B=\sup\limits_{x\in[0,\,2\pi]}(|\,\varphi^{(k)}(x)\,|\,/(B^k m_k))$. Покладемо $H\langle m_k\rangle=\lim\limits_{B\to\infty}\operatorname{ind}H_B\langle m_k\rangle$. При цьому $H\langle m_k\rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір. Внаслідок властивостей 2—4 послідовності $\{m_k\}$ цей простір інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$ [3]. Відносно операцій множення та згортки цей простір утворює також топологічні алгебри [3]. Якщо $m_k=k^k$, то простір $H\langle k^k\rangle:=G_{\{1\}}$ складається з аналітичних 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій.

3. Припустимо, що послідовність $\{m_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$, крім умов 1—4, додатково задовольняє умову неквазіаналітичності [3]: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{m_{k-1}}{m_k}<\infty$. У разі виконання цієї умови простори $H\langle m_k\rangle$ утворюють неквазіаналітичні класи функцій, тобто в таких просторах є вже фінітні функції. Отже, в цьому випадку в просторах $H\langle m_k\rangle$ умова $\beta)$ виконується. Зазначимо, що в просторах $H\langle m_k\rangle$ умова (1) допускає формулювання, не залежне від мультиплікаторів.

Теорема 2. *Умова* (1) *для сім'ї функцій* $\{\varphi_a,\, a\in A\}$ *у просторі* $H\langle m_k\rangle$ *еквівалентна умові: для кожного* $\sigma\in(0,\pi)$ *існує стала* $B=B(\sigma)>0$ *така, що*

$$\lim_{a\to a_0}\sup_{\substack{x\in[\sigma,\,2\pi-\sigma]\\ k\in\mathbb{Z}_+}}\frac{|\varphi_a^{(k)}(x)|}{B^k m_k}=0. \tag{2}$$

У просторах $H\langle m_k\rangle$ умова (1) є й необхідною умовою належності сім'ї функцій $\{\varphi_a,\, a\in A\}$ до класу $\mathcal{L}(H\langle m_k\rangle)$.

Теорема 3. *Якщо сім'я функцій* $\{\varphi_a,\, a\in A\}\subset H\langle m_k\rangle$ *належить до класу* $\mathcal{L}(H\langle m_k\rangle)$, *то вона задовольняє умову* (2).

Доведення цієї теореми здійснюється за такою схемою. Вважаємо, що задана сім'я $\{\varphi_a,\, a\in A\}$ класу $\mathcal{L}(H\langle m_k\rangle)$ умову (2) не задовольняє. Тоді будуємо функціонал $F\in H'\langle m_k\rangle$, рівний нулю на деякому інтервалі, що містить точку 0 і для якого $(F*\varphi_a)(0)$ не збігається до нуля при $a\to a_0$ (що неможливо для сім'ї функцій $\{\varphi_a\}$ класу $\mathcal{L}(H\langle m_k\rangle)$). Існування такого функціонала показує, що зроблене припущення приводить до протиріччя, а отже, умова (2) для будь-якої сім'ї функцій $\{\varphi_a,\, a\in A\}$ класу $\mathcal{L}(H\langle m_k\rangle)$ виконується.

Отже, сім'я $\{\varphi_a, a \in A\} \subset H\langle m_k \rangle$ належить до класу $\mathcal{L}(H\langle m_k \rangle)$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову (2).

4. Вище ми розглядали сім'ї функцій класу $\mathcal{L}(H\langle m_k \rangle)$ у просторі $H\langle m_k \rangle$, в якому виконувались умови $\alpha)$ і $\beta)$ з п.1. Як вже відзначалося, умова $\beta)$ дає можливість визначити в такому просторі поняття "функціонал f рівний нулю на відкритій множині Q" (означення 1). Якщо простір $H\langle m_k \rangle$ складається з усіх 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину, то такий простір умову $\beta)$ не задовольняє. Прикладом такого простору є простір $H\langle k!\rho_k \rangle$ [12, с. 286], де $\{\rho_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ — монотонно спадна послідовність додатних чисел така, що $\rho_0 = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\rho_k} = 0$.

Введемо тепер поняття "функціонал $f \in H'\langle k!\rho_k \rangle \supset G'_{\{1\}}$ рівний нулю на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$". Символом $H(a, b)$ позначимо сукупність нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ 2π-періодичних функцій, які на $[0, 2\pi] \setminus (a, b)$ збігаються з функціями з простору $H\langle k!\rho_k \rangle$. Топологію в $H(a, b)$ задамо так: нехай $\{\varphi, \varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset H(a, b)$; $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$, якщо для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}}{B^k k!\rho_k} \rightrightarrows 0,\ n \to \infty,\ \text{на}\ [0, 2\pi] \setminus (a, b)$$

при деякому $B > 0$ і $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}$, $n \to \infty$, на (a, b).

Очевидно, що: 1) $H\langle k!\rho_k \rangle \subset H(a, b)$; 2) $K(a, b) \subset H(a, b)$, де $K(a, b)$ — сукупність нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ 2π-періодичних функцій, носії яких містяться в (a, b).

Сформулюємо тепер означення.

Означення 3. Узагальнена функція $f \in H'\langle k!\rho_k \rangle$ рівна нулю на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, якщо існує продовження $F \in H'(a, b)$ функціонала f на $H(a, b)$, що дорівнює нулю на (a, b). Дві узагальнені функції $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle k!\rho_k \rangle$ збігаються на (a, b), якщо їхня різниця $f_1 - f_2$ рівна нулю на цій множині.

Теорема 4. *Якщо $f \in H'\langle m_k \rangle$, де $H\langle m_k \rangle$ — неквазіаналітичний клас функцій, то $f = 0$ на (a, b) за означенням* 1 *тоді і лише тоді, коли $f = 0$ на (a, b) за означенням* 3.

Наведемо тепер приклад функціонала $F \in H'\langle k!\rho_k \rangle$, який рівний нулю на $(a, b) \subset [0, 2\pi]$.

Лема 1. *Функціонал $F : H\langle k!\rho_k \rangle \to \mathbb{R}$ вигляду*

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_x^{n_i} \varphi(x_i)}{b_i^{n_i} n!\rho_{n_i}},\ \varphi \in H\langle k!\rho_k \rangle,$$

де $\{b_i, i \in \mathbb{N}\}$ — монотонно зростаюча необмежена послідовність додатних чисел, $\{n_i, i \in \mathbb{N}\}$ — підпослідовність натуральних чисел, $\{x_i, i \in \mathbb{N}\} \subset [0, 2\pi] \setminus (a, b)$, є лінійним і неперервним на $H\langle k!\rho_k \rangle$ і $F = 0$ на $(a, b) \subset [0, 2\pi]$.

Теорема 5. *Для того щоб сім'я функцій $\{\varphi_a, a \in A\} \subset H\langle k!\rho_k \rangle$ належала до класу $\mathcal{L}(H\langle k!\rho_k \rangle)$ необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall \sigma \in (0, \pi) \exists B = B(\sigma) > 0 : \sup_{\substack{x \in [\sigma, 2\pi - \sigma] \\ k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{\left|\varphi_a^{(k)}(x)\right|}{B^k k!\rho_k} \to 0, \quad a \to a_0.$$

Зауваження. До класу $H\langle k!\rho_k\rangle$ належить клас $G_{\{\beta\}} = H\langle k^{k\beta}\rangle$, де $0<\beta<1$. Із наведених результатів випливає, що для ультрарозподілів класу $G'_{\{\beta\}} \supset G'_{\{1\}}$, $0<\beta<1$, введено поняття “функціонал рівний нулю на інтервалі $(a, b)\subset[0, 2\pi]$”, знайдено необхідні й достатні умови, у разі виконання яких сім’я функцій $\{\varphi_a, a\in A\}\subset G_{\{\beta\}}$, $0<\beta<1$, належить до класу $\mathcal{L}(G_{\{\beta\}})$, $0<\beta<1$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Риман Б. Сочинения. Москва: Гостехиздат, 1948. 542 с.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции. *Докл. АН СССР*. 1981. **257**, № 4. С. 799—803.
3. Горбачук В.И. О рядах Фурье периодических ультрараспределений. *Укр. мат. журн.* 1982. **34**, № 2. С. 144—150.
4. Извеков И.Г. Принцип локализации Римана для рядов Фурье в пространствах обобщенных функций. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1986. № 2. С. 5—8.
5. Tillmann H.-G. Die Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. *Math. Zeit*. 1953. **59**. S. 61—83.
6. Sato M. Theory of hyperfunctions, I. *J. Fac. Sci. Univ*. Tokyo. Sect. I. 1959. **8**. P. 139—193.
7. Sato M. Theory of hyperfunctions, II. *J. Fac. Sci. Univ*. Tokyo. Sect. II. 1960. **8**. P. 387—437.
8. Sato M. On a generalization of the concept of functions. *Proc. Japan. Acad*. 1958. **34**. P. 126—130.
9. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. Москва: Мир, 1968. 276 с.
10. Готинчан Т.І. Про аналітичне зображення ультрарозподілів типу S'. *Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук*. 1998. Вип. 1. С. 37—41.
11. Городецький В.В., Готинчан Т.І. Про нульові множини узагальнених функцій з простору $(S^1_{1/\alpha})'$. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь*: Зб. наук. праць. Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. Вип. 1. С. 79—89.
12. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Еволюційні псевдодиференціальні рівняння в зліченно нормованих просторах. Чернівці: Технодрук, 2016. 340 с.

Надійшло до редакції 21.01.2020

REFERENCES

1. Riemann, B. (1948). Collected Works. Moscow: Gostehizdat (in Russian).
2. Gorbachuk, V. I. & Gorbachuk, M. L. (1981). Trigonometric series and generalized periodic functions. Dokl. AN SSSR, 257, No. 4, pp. 799-803 (in Russian).
3. Gorbachuk, V. I. (1982). On the Fourier series of periodic ultra-distributions. Ukr. Math. J., 34, No. 2, pp. 118-123 (in Russian).
4. Izvekov, I. G. (1986). The Riemann localization principle for Fourier series in spaces of generalized functions. Dokl. AN SSSR. Ser. A, No. 2, pp. 5-8 (in Russian).
5. Tillmann, H. G. (1953). Die Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z., 59, pp. 61-83.
6. Sato, M. (1959). Theory of hyperfunctions, I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 8, pp. 139-193.
7. Sato, M. (1960). Theory of hyperfunctions, II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. II, 8, pp. 387-437.
8. Sato, M. (1958). On a generalization of the concept of functions. Proc. Japan. Acad., 34, pp. 126-130.
9. Bremerman, G. (1968). Distributions, complex variables and Fourier transforms. Moscow: Mir (in Russian).
10. Gotynchan, T. I. (1998). On analytical image of ultra-distributions of S' type. Bulletin of the University of Kiev, Ser. Phys.-Math. Sci., Iss. 1, pp. 37-41 (in Ukrainian).

11. Gorodetskii, V. V. & Gotynchan, T. I. (1998). On zero sets of generalized functions from space $(S^1_{1/\alpha})'$, Boundary value problems for differential equations: Collection of scientific works, Iss. 1 (pp. 79-89). Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine (in Ukrainian).
12. Gorodetskii, V. V. & Martynyuk, O. V. (2016). Evolutionary pseudodifferential equations in numerically normalized spaces. Chernivtsi: Tehnodruk (in Ukrainian).

Received 21.01.2020

В.В. Городецкий, О.В. Мартынюк

Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича
E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, alfaolga1@gmail.com

СВОЙСТВО ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СВЕРТОК
ОБОБЩЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Известный принцип локализации Римана для рядов Фурье суммируемых функций переформулирован для сверток обобщенных периодических функций с семьями функций, которые, как правило, совпадают с ядрами определенных линейных методов суммирования рядов Фурье (например, методов суммирования типа Гаусса—Вейерштрасса). Семьи функций, для которых выполняется принцип локализации Римана, называем семьями функций класса $\mathcal{L}(X)$. Найдены необходимые и достаточные условия принадлежности семьи функций к классу $\mathcal{L}(X)$ в случае, когда X — достаточно широкий неквазианалитический класс периодических функций или X — класс аналитических периодических функций (в частности, $X = G_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$ и $X = G_{\{\beta\}}$, если $0 < \beta \leqslant 1$). Обоснованно также определение “аналитический функционал равен нулю на открытом множестве”; приведен конкретный пример аналитического функционала, который равен нулю на $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. Использование полученного результата в теории дифференциальных уравнений в частных производных позволяет найти новое свойство (свойство локализации, свойство локального улучшения сходимости) решений многих задач математической физики, поскольку такие решения часто изображаются в виде свертки некоторой семьи основных функций из пространства X с функцией F, заданной на границе области, при этом F может быть обобщенной функцией из пространства X'.

Ключевые слова: *свойство локализации, обобщенная функция, свертка, ряды Фурье.*

V.V. Horodets'kyi, O.V. Martynyuk

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, alfaolga1@gmail.com

LOCALIZATION PROPERTY FOR THE CONVOLUTION
OF GENERALIZED PERIODIC FUNCTIONS

The well-known Riemann localization principle for the Fourier series of summable functions is reformulated for the convolution of generalized periodic functions with families of functions, which usually coincide with kernels of certain linear methods of summation of Fourier series (for example, summation methods such as the Gauss—Weierstrass one). We call the families of functions, for which the Riemann localization holds, the families of functions of a class $\mathcal{L}(X)$. The necessary and sufficient conditions of belonging the family of functions to the class $\mathcal{L}(X)$ are found in the case where X is a sufficiently broad non-quasi-analytic class of periodic functions or X is a class of analytic periodic functions (in particular, $X = G_{\{\beta\}}$ for $\beta > 1$ and $X = G_{\{\beta\}}$ if $0 < \beta \leqslant 1$). The definition of “analytic functional equal to zero on an open set” is also substantiated; a specific example of analytic functional is given, which is 0 on $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. The use of the obtained result in partial differential equation theory allows us to obtain a new property (localization property, the property of local convergence improvement) of many problems of mathematical physics, since such solutions are often depicted as a convolution of some family of basic functions from the space X with a function F defined at the boundary of the domain, F may be a generalized function from a space X'.

Keywords: *localization property, generalized function, convolution, Fourier series.*