ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.003
УДК 519.63+517.98

В.Л. Макаров [1], **Н.В. Майко** [2]

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: : makarovimath@gmail.com, mayko@knu.ua

Вагові оцінки точності методу перетворення Келі для абстрактних крайових задач у банаховому просторі

Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим

Досліджено першу крайову задачу для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сильно позитивним операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. Одержано зображення точних розв'язків відповідних крайових задач у вигляді рядів, для чого було використано перетворення Келі операторного коефіцієнта, поліноми Майкснера від незалежної змінної та розклад у ряд Фур'є правої частини рівняння. За наближений метод узято N-ту частинну суму кожного ряду (N — параметри дискретизації). Одержано вагові апріорні оцінки точності методу, які враховують крайовий ефект. Ці оцінки свідчать про те, що залежно від гладкості вхідних даних метод має або степеневу, або експоненціальну швидкість збіжності.

Ключові слова: *крайова задача, банахів простір, перетворення Келі, крайовий ефект, метод без насичення точності, експоненціальна швидкість збіжності.*

Точність наближених методів розв'язування крайових задач традиційно оцінюють за допомогою певного параметра дискретизації. Однак і з теоретичних, і з практичних міркувань важливим є також урахування впливу інших факторів. Наприклад, таким фактором є *крайовий ефект* у сенсі [1]. Це означає, що внаслідок крайової умови Діріхле для канонічної області точність наближеного розв'язку поблизу межі області є вищою порівняно з точністю всередені області. Тому в апріорних оцінках похибки методу природно використовувати відповідні вагові функції. Окрім того, актуальним завданням є побудова *методів без насичення точності* в сенсі [2], що означає автоматичну залежність точності методу від гладкості вхідних даних. Зокрема, нескінченній (у певному сенсі) гладкості вхідних даних повинна відповідати експоненціальна швидкість збіжності методу.

Обидва ці аспекти враховані в роботі [3] (див. також посилання в ній), де побудовано і досліджено метод перетворення Келі розв'язування першої крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку із самоспряженим, додатно визначеним операторним

Цитування: Макаров В.Л., Майко Н.В. Вагові оцінки точності методу перетворення Келі для абстрактних крайових задач у банаховому просторі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 5. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.003

коефіцієнтом у гільбертовому просторі. У даній роботі розвиваються і узагальнюються згадані результати на випадок банахового простору.

1. Крайова задача для однорідного рівняння. У банаховому просторі E розглянемо крайову задачу

$$u''(x) - Au(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = u_1, \tag{1}$$

де $u(x):[0,1] \to E$ — невідома векторнозначна функція, $u_1 \in E$ — заданий вектор, $A: E \to E$ — замкнутий лінійний оператор із щільною в E областю визначення $D(A)$ і резольвентною множиною $\rho(A)$. Припустимо [4, с. 69], що існують сталі $\varphi \in (0, \pi/2)$, $\gamma > 0$, $L > 0$ такі, що

$$\begin{aligned} &\|(zI - A)^{-1}\| \leqslant \frac{L}{1+|z|} \quad \forall z \in \Sigma, \\ &\Sigma \equiv \{z \in \mathbb{C} : \varphi \leqslant |\arg z| \leqslant \pi\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \gamma\} \subset \rho(A). \end{aligned} \tag{2}$$

Щільно заданий замкнутий оператор A, який задовольняє умови (2) називається *сильно позитивним* оператором [5]. В [4] показано, що важливими прикладами таких операторів є сильно еліптичні оператори порядку $2m$ в $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$.

Відомо [5], що при $u_1 \in A^{\sigma}, \sigma > 1$, розв'язок $u(x)$ можна подати у вигляді ряду

$$u(x) = \mathrm{sh}^{-1}(\sqrt{A})\,\mathrm{sh}\,(x\sqrt{A})u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) y_k, \tag{3}$$

де $y_k = (I+A)^{-1}Ay_{k-1} = [(I+A)^{-1}A]^k u_1$, $(I+A)^{-1}A$ — дробово-лінійне перетворення оператора A, а функції $v_k(x)$ визначаються з рекурентної послідовності інтегральних рівнянь

$$v_k(x) = v_{k-1}(x) - \int_0^1 G_0(x,\xi) v_{k-1}(\xi) d\xi, \ x \in [0,1], \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$$v_0(x) = x, \quad v_1(x) = -\frac{1}{3!} x(1-x^2),$$

де $G_0(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \leqslant \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \leqslant x, \end{cases}$ — функція Гріна диференціального оператора

$$Lv(x) = -v''(x), \quad x \in (0,1), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0.$$

Зазначимо, що поліноми $v_k(x)$ тісно пов'язані з поліномами Майкснера і нещодавно досліджені в [6]. Поліноми Майкснера відіграють таку саму роль, що й поліноми Лагерра в методі перетворення Келі для розв'язування задачі Коші для абстрактного диференціального рівняння першого порядку із сильно позитивним операторним коефіцієнтом [7].

Нагадаємо відомості про деякі класи векторів із E [8]. Нехай $C^{\infty}(A) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ — множина всіх нескінченно диференційовних векторів оператора A, $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ — неспадна послідовність додатних чисел, $\nu > 0$. Позначимо $C(A,(m_n),\nu)$ банахів простір векторів $f \in C^\infty(A)$ з нормою

$$\| f \|_{C(A,(m_n),\nu)} = \sup_n \frac{\| A^n f \|}{\nu^n m_n}.$$

Клас $C(A,(m_n)) \equiv \bigcup_{\nu>0} C(A,(m_n),\nu)$ для різних послідовностей (m_n) розглянуто в [8]. Якщо $m_n \equiv 1$, то вектори з класу $C(A,(1))$ називаються *векторами експоненціального типу* [9].

У наступних трьох лемах сформульовано властивості поліномів $v_k(x)$ і векторів y_k, які потрібні надалі для доведення основних теорем.

Лема 1. Для поліномів $v_k(x)$ справджуються такі вагові оцінки:

$$\left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \leqslant \frac{C_1}{k^{(1-\varepsilon_1)/2}}, \quad x \in [0,1], \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де $C_1 = ((1-\varepsilon_1)/e)^{(1-\varepsilon_1)/2}\, 2\zeta(1+\varepsilon_1) / \pi^{1+\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 1$, $\zeta(\cdot)$ — *дзета-функція Рімана*;

$$\left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \leqslant \frac{1}{3}, \quad x \in [0,1], \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Доведення леми 1 базується на побудові непарного періодичного продовження полінома $v_k(x)$ та застосуванні методу математичної індукції за $k \in \mathbb{N}$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* $\sigma > 0$, $0 < \varepsilon_2 < \min\{1; \sigma\}$, $k > \sigma - \varepsilon_2$, $u_1 \in D(A^\sigma)$. *Тоді справджується оцінка*

$$\| y_k \| \leqslant \frac{C_2}{k^{(\sigma-\varepsilon_2)/2}} \left\| A^\sigma u_1 \right\|,$$

де $C_2 = \dfrac{K}{\sin(\pi\varepsilon_2)} (\sigma - \varepsilon_2)^{(\sigma-\varepsilon_2)/2}$.

Лема 3. *Нехай* $u_1 \in A^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. *Тоді справджується оцінка*

$$\| y_k \| \leqslant \frac{Le}{\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{k}} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{\sqrt{k}} \| u_1 \|_{C(A,(1),\nu)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \nu = \frac{\cos\varphi}{L+1}.$$

Для доведення лем 2 і 3 використано зображення функції від оператора A за допомогою інтеграла Данфорда–Коші.

За наближений розв'язок задачі (1) береться частинна сума ряду (3):

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} v_k(x) y_k.$$

У теоремах 1, 2 досліджено похибку $u(x) - u_N(x)$ у ваговій нормі за різних припущень про гладкість вектора u_1.

Теорема 1. *Нехай* $u_1 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 1$. *Тоді точність наближеного розв'язку* $u_N(x)$ *характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leqslant \frac{C}{N^{(\sigma-1-\varepsilon)/2}} \left\| A^\sigma u_1 \right\|, \ x \in [0,1] \quad (N \geqslant \sigma - 1),$$

де $\varepsilon > 0$ *— як завгодно мале число,* $C > 0$ *— не залежна від* N *стала.*

Теорема 2. *Нехай* $u_1 \in C(A, (1), \nu)$. *Тоді точність наближеного розв'язку* $u_N(x)$ *характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leqslant \frac{Ce^{-\sqrt{N+1}}}{(N+1)^{1/2-\varepsilon}} \| u_1 \|_{C(A,(1),\nu)}, \quad x \in [0,1] \quad (N \in \mathbb{N}),$$

де $\varepsilon > 0$ *— як завгодно мале число,* $\nu = \dfrac{\cos\varphi}{L+1}$, $C > 0$ *— не залежна від* N *стала.*

2. Крайова задача для неоднорідного рівняння. Розглянемо крайову задачу

$$u''(x) - Au(x) = -f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{4}$$

де оператор A задовольняє ті самі умови, що й у пункті 1. Розкладемо праву частину $f(x)$ у тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) f_{s,k} + f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \cos(2k\pi x) f_{c,k},$$

$$f_{s,k} = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \sin(2k\pi x) dx, \quad f_{c,k} = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \cos(2k\pi x) dx, \quad f_0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Застосовуючи операторну функцію Гріна

$$G(x, \xi; A) = \left(\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A}\right)^{-1} \begin{cases} \operatorname{sh}\left(\sqrt{A} x\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{A}(1-\xi)\right), & x \leqslant \xi, \\ \operatorname{sh}\left(\sqrt{A}\xi\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{a}(1-x)\right), & \xi \leqslant x, \end{cases}$$

та враховуючи зображення (3), запишемо розв'язок $u(x)$ у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} +$$

$$+ A^{-1} \left\{ I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \left\{ \cos(2k\pi x) I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_{c,k}.$$

За наближений розв'язок задачі (4) береться така скінченна сума:

$$u_{N,N}(x)=\sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}\sin(2k\pi x)[(2k\pi)^2 I+A]^{-1}f_{s,k}+$$

$$+A^{-1}\left\{I-\sum_{j=0}^{N}[v_j(1-x)+v_j(x)][(I+A)^{-1}A]^j\right\}f_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}[(2k\pi)^2 I+A]^{-1}\left\{\cos(2k\pi x)I-\sum_{j=0}^{M}[v_j(1-x)+v_j(x)][(I+A)^{-1}A]^j\right\}f_{c,k}. \quad (5)$$

Вагові оцінки його точності залежно від припущень про гладкість $f(x)$ доведено в таких двох твердженнях.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови*

$$\sigma>0,\quad f_0\in D(A^{\sigma}),\quad f_{c,k}\in D(A^{\sigma})\quad \forall k\in\mathbb{N},\quad \|f_c\|_{A^{\sigma}}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{\sigma}f_{c,k}\|<\infty,$$

$$\|f_s\|_{\sigma}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{\sigma+1}\|f_{s,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\quad \|f_c\|_{\sigma}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{\sigma+1}\|f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (5) *характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\|\frac{u(x)-u_{N,N}(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\leqslant\frac{C}{N^{(\sigma-\varepsilon)/2}}(\|f_s\|_{\sigma}+\|f_c\|_{\sigma}+\|A^{\sigma}f_0\|+\|f_c\|_{A^{\sigma}}),\quad x\in[0,1]\quad (N\geqslant\sigma),$$

де $\varepsilon>0$ *— як завгодно мале число,* $C>0$ *— не залежна від* N *стала.*

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*

$$f_0\in C(A,(1),\nu),\quad f_{c,k}\in C(A,(1),\nu)\ \ \forall k\in\mathbb{N},\quad \|f_c\|_{\infty}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}e^k\|f_{c,k}\|<\infty,$$

$$\|f_c\|_{A^{\infty}}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{c,k}\|^2_{C(A,(1),\nu)}\right)^{1/2}<\infty,\quad \|f_s\|_{\infty}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}e^k\|f_{s,k}\|<\infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (5) *характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\|\frac{u(x)-u_{N,N}(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\leqslant\frac{Ce^{-\sqrt{N+1}}}{(N+1)^{1/2-\varepsilon}}(\|f_s\|_{\infty}+\|f_c\|_{\infty}+\|f_0\|_{C(A,(1),\nu)}+\|f_c\|_{A^{\infty}}),$$

$$x\in[0,1]\quad (N\in\mathbb{N}),$$

де $\varepsilon>0$ *— як завгодно мале число,* $\nu=\dfrac{\cos\varphi}{L+1}$, $C>0$ *— не залежна від* N *стала.*

3. Висновки. Для дослідження впливу крайової умови Діріхле на точність наближеного розв'язку в теоремах 1–4 використано вагову функцію $\min(x,1-x)$, яка характеризує відстань до межових точок проміжку $[0,1]$.

У теоремах 1 і 3 доведено, що точність наближеного розв'язку автоматично залежить від гладкості вхідних даних (вектора u_1 і правої частини $f(x)$ рівняння), а отже, запропонований метод є методом без насичення точності. Якщо ж вхідні дані u_1 і $f(x)$ мають нескінченну (в певному сенсі) гладкість, то теореми 2 і 4 свідчать про те, що швидкість збіжності методу є експоненціальною (і навіть суперекспоненціальною).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Makarov V.L. On a priori estimates of differential schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 1989. **42**, № 5. P. 41–44.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва: Наука, 1986. 744 с.
3. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L., Mayko N.V. Weighted estimates of the Cayley transform method for abstract differential equations. *Comput. Meth. Appl. Mathods.* 2020. https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0120
4. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equation. New York: Springer, 1983. 280 p.
5. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L. Explicit and approximate solutions of second-order elliptic differential equations in Hilbert and Banach spaces. *Numer. Func. Anal. Opt.* 1999. **20**, № 7–8. P. 695–717. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-03-01590-4
6. Макаров В.Л. Поліноми Мейкснера та їх властивості. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 7. С. 3–8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.07.003
7. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. Праці Ін-ту математики НАН України: Математика та її застосування. Т. 52. Київ, 2004. 500 с.
8. Горбачук В.И., Князюк А.В. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. *УМН.* 1989. **44**, вып. 3. С. 55–91.
9. Радыно Я.В. Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях. *Дифференц. уравнения.* 1985. **21**, № 9. С. 1559–1569.

Надійшло до редакції 27.02.2020

REFERENCES

1. Makarov, V. (1989). On a priori estimates of differential schemes giving an account of the boundary effect. C. R. Acad. Bulg. Sci., 42, No. 5, pp. 41-44.
2. Babenko, K. I. (1986). Fundamentals of numerical analysis. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Gavrilyuk, I. P., Makarov, V. L. & Mayko, N. V. (2020). Weighted estimates of the Cayley transform method for abstract differential equations. Comput. Methods Appl. Math. https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0120
4. Pazy, A. (1983). Semigroups of linear operators and applications to partial differential equation. New York: Springer.
5. Gavrilyuk, I. P. & Makarov, V. L. (1999). Explicit and approximate solutions of second-order elliptic differential equations in Hilbert and Banach spaces. Numer. Func. Anal. Opt., 20, No. 7-8, pp. 695-717. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-03-01590-4
6. Makarov, V. L. (2019). Meixner polynomials and their properties. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 7, pp. 3-8 (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.07.003
7. Gavrilyuk, I. P. & Makarov, V. L. (2004). Strongly positive operators and numerical algorithms without saturation of accuracy. Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine (in Russian).
8. Gorbachuk, V. I. & Knyazyuk, A. V. (1989). Boundary values of solutions of operator-differential equations. Russ. Math. Surv., 44, Iss. 3, pp. 67-111. https://doi.org/10.1070/RM1989v044n03ABEH002115
9. Radyno, Ya. V. (1985). Vectors of exponential type in the operator calculus, and differential equations. Differ. Uravn., 21, No. 9, pp. 1559-1569 (in Russian).

Received 27.02.2020

В.Л. Макаров [1], *Н.В. Майко* [2]

[1] Институт математики НАН Украины, Киев
[2] Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: makarovimath@gmail.com, mayko@knu.ua

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КЭЛИ
ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследована первая краевая задача для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с сильно позитивным операторным коэффициентом в банаховом пространстве. Получено представление точных решений соответсвующих краевых задач в виде рядов, для чего было использовано преобразование Кэли операторного коэффициента, полиномы Майкснера от независимой переменной и разложение в ряд Фурье правой части уравнения. В качестве приближенного метода взята N-я частичная сумма каждого ряда (N — параметр дискретизации). Доказаны весовые априорные оценки точности метода, учитывающие краевой эффект. Эти оценки показывают, что в зависимости от гладкости исходных данных метод имеет степенную или экспоненциальную скорость сходимости.

Ключевые слова: *краевая задача, банахово пространтство, преобразование Кэли, краевой эффект, метод без насыщения точности, экспоненциальная скорость сходимости.*

V.L. Makarov [1], *N.V. Mayko* [2]

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv
E-mail: makarovimath@gmail.com, mayko@knu.ua

WEIGHTED ACCURACY ESTIMATES OF THE CAYLEY TRANSFORM METHOD
FOR ABSTRACT BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN A BANACH SPACE

We study the first BVP for linear second-order differential equations with a strongly positive operator coefficient in a Banach space. The exact solutions of these BVPs are represented in the form of infinite series by means of the Cayley transform of the operator coefficient, the Meixner-type polynomials in the independent variable, and the Fourier series representation of the right-hand side of the equation. The approximate solution of each problem is a partial sum of the corresponding series (with the discretization parameter N). We prove the weighted accuracy estimates taking the boundary effect into account. These estimates demonstrate that the proposed methods have the power rate of convergence or the exponential rate of convergence in accordance with the smoothness properties of the input data.

Keywords: *boundary-value problem (BVP), Banach space, Cayley transform, boundary effect, method without saturation of accuracy, exponential rate of convergence.*