ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.003
УДК 517.587

В.Л. Макаров, академік НАН України

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: makarovimath@gmail.com

Диференціальні рівняння вищих порядків, які мають поліноміальні розв'язки, пов'язані з класичними ортогональними поліномами

Знайдено конструктивний алгоритм побудови диференціальних рівнянь вищих парних порядків, розв'язками яких є узагальнені класичні ортогональні поліноми. Для цих поліномів одержано явне зображення, тричленне рекурентне співвідношення та вигляд умов ортогональності залежно від відповідної функції розподілу. Наведено розв'язки відповідних резонансних рівнянь.

Ключові слова: *диференціальні рівняння вищих порядків, класичні ортогональні поліноми, поліноми Лежандра, Лагерра, Ерміта, співвідношення ортогональності, тричленне рекурентне співвідношення, резонансні рівняння.*

Побудові та дослідженню диференціальних рівнянь вищих парних порядків, розв'язки яких є узагальненими класичними ортогональними поліномами, присвячено ряд робіт. Так, у статті [1] наведене двопараметричне диференціальне рівняння четвертого порядку, розв'язками якого є узагальнені поліноми Лагерра $L_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, які для $\beta = 0$ з точністю до множника $(-1)^n n!$ збігаються з класичними поліномами Лагерра. Також у цій статті наведено однопараметричне диференціальне рівняння четвертого порядку, розв'язками якого є узагальнені поліноми Ерміта $H_n^{(\beta)}(x)$, які для $\beta = 0$ збігаються з модифікованими поліномами Ерміта $H_n^{(0)}(x) = 2^{n/2} H_n(\sqrt{2}x)$. Проте варто зауважити, що в обох цих рівняннях від n залежить не тільки коефіцієнт перед функцією, а й коефіцієнти перед похідними. У роботі [2] вивчались узагальнені поліноми Лежандра, Лагерра, Якобі, що задовольняють відповідне диференціальне рівняння четвертого порядку. У статті [3] досліджувалися узагальнені поліноми Лежандра та поліноми типу Лежандра, які задовольняють диференціальне рівняння шостого порядку і мають ряд властивостей, притаманних класичним ортогональним поліномам.

Усі диференціальні рівняння в [2, 3] мають вигляд

$$L_{2r}u(x) - \lambda_{2r}(n)u(x) = 0, \quad r = 2,3, \tag{1}$$

Цитування: Макаров В.Л. Диференціальні рівняння вищих порядків, які мають поліноміальні розв'язки, пов'язані з класичними ортогональними поліномами. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 7. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.003

і коефіцієнти диференціального оператора L_{2r} $2r$-го порядку не залежать від параметра n, степеня полінома.

У даній роботі знайдено алгоритм побудови диференціальних рівнянь вигляду (1) з $r > 3$, розв'язками яких є узагальнені класичні ортогональні поліноми Лежандра та Лагерра. Цей алгоритм базується на використанні диференціальних рівнянь четвертого та шостого порядків, поліноміальні розв'язки яких збігаються і є узагальненими класичними ортогональними поліномами. У випадку узагальнених поліномів Лежандра в літературі були відомі такі рівняння з параметрами, і достатньо було вибрати параметри певним чином, щоб їх поліноміальні розв'язки збігалися. Проте у випадку узагальнених поліномів Лагерра в літературі були відомі тільки параметричні диференціальні рівняння четвертого порядку. Отже, перед тим як застосувати запропонований нами алгоритм, треба було знайти диференціальне рівняння шостого порядку, яке мало б за розв'язки ті самі узагальнені поліноми Лагерра, що й рівняння четвертого порядку. Ця додаткова проблема в даній роботі успішно подолана. Під узагальненими класичними ортогональними поліномами ми будемо розуміти лінійну комбінацію класичних ортогональних поліномів.

1. Алгоритм побудови рівнянь довільних парних порядків з узагальненими класичними ортогональними поліномами. Введемо позначення для двох базових диференціальних операторів, за допомогою яких будуються всі диференціальні рівняння парних порядків певного класу з розв'язками, пов'язаними з класичними ортогональними поліномами. Нехай оператори

$$A_{2r,n}u(x) = \sum_{p=0}^{2r-1} a_{2r,2r-p}(x)\frac{d^{2r-p}u(x)}{dx^{2r-p}} - \lambda_{2r}(n)u(x) = L_{2r}u(x) - \lambda_{2r}(n)u(x), \quad r = 2, 3,$$

мають серед своїх розв'язків одні й ті самі поліноми $p_n(x)$, що узагальнюють класичні ортогональні поліноми, отже, й однакові, з точністю до сталого множника, частинні розв'язки відповідних резонансних рівнянь першого роду $v_n(x)$ (стосовно резонансних рівнянь, пов'язаних із класичними ортогональними поліномами, див. [4—6]).

Тоді:

1) оператори L_4, L_6 комутують на множині поліномів $p_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$;

2) рівняння

$$L_4 L_6 u(x) - \lambda_4(n)\lambda_6(n)u(x) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

мають своїми розв'язками поліноми $u(x) = p_n(x)$, а відповідні резонансні рівняння першого роду

$$L_4 L_6 v(x) - \lambda_4(n)\lambda_6(n)v(x) = p_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

матимуть частинні розв'язки (див. [4–6])

$$v(x) = [\lambda_4'(n)\lambda_6(n) + \lambda_4(n)\lambda_6'(n)]^{-1}\frac{\partial p_n(x)}{\partial n}.$$

Узагальненням вищенаведених міркувань є таке твердження.

Лема. *Усі рівняння*

$$\prod_{i=1}^{N} L_4^{\alpha_i} L_6^{\beta_i} u(x) - \lambda_4(n)^{M_4} \lambda_6(n)^{M_6} u(x) = 0,$$

$$\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = M_4, \quad \sum_{i=1}^{N} \beta_i = M_6, \quad M_4, M_6 \in \mathbb{N} \cup 0,$$

мають спільні поліноміальні розв'язки $u(x) = p_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$. *Відповідні резонансні рівняння першого роду мають спільні частинні розв'язки*

$$v(x) = \left[\frac{\partial}{\partial n} \lambda_4(n)^{M_4} \lambda_6(n)^{M_6}\right]^{-1} \frac{\partial p_n(x)}{\partial n}, \; n = 0, 1, \ldots.$$

Із цієї леми випливає, що для побудови диференціальних рівнянь вищих порядків (вище шостого) з розв'язками, які є узагальненими класичними ортогональними поліномами, достатньо знайти два рівняння четвертого та шостого порядків, що мають однакові поліноміальні розв'язки, які зображуються у вигляді лінійної комбінації класичних ортогональних поліномів.

2. Диференціальні рівняння четвертого та шостого порядків, спільними розв'язками яких є узагальнені класичні ортогональні поліноми. ***Узагальнені поліноми Лежандра***. Оскільки диференціальні рівняння четвертого і шостого порядків, розв'язками яких є узагальнені поліноми Лежандра, відомі (див. [2, 3]), ми наведемо тільки самі рівняння та значення параметрів, для яких поліноміальні розв'язки цих рівнянь збігаються, а також деякі властивості згаданих розв'язків.

Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$A_{4,n} y(x) = L_4 y(x) - \lambda_4(n) y(x) = (x^2-1)^2 \frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 8x(x^2-1)\frac{d^3 y(x)}{dx^3} +$$
$$+ (4\alpha+12)(x^2-1)\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 8\alpha x \frac{dy(x)}{dx} - \lambda_4(n) y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Як було показано в [2], за умови

$$\lambda_4(n) = 8\alpha n + (4\alpha+12)n(n-1) + 8n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)$$

поліноміальними розв'язками цього рівняння будуть

$$y(x) = v_n(x) = \alpha P_n(x) - x\frac{d}{dx} P_n(x) + \frac{1}{2} n(n+1) P_n(x), \tag{2}$$

де $P_n(x)$ – поліном Лежандра. Ці поліноміальні розв'язки є ортогональними у тому сенсі, що

$$(v_n, v_m) = \int_{-1}^{1} v_n(x) v_m(x)\, dx + \frac{1}{\alpha}[v_n(-1) v_m(-1) + v_n(1) v_m(1)] =$$
$$= \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1}[2n^4 + 4n^3 + (8\alpha-2)n^2 - (8\alpha+4)n + 8\alpha^2],$$

і задовольняють рекурентне співвідношення

$$v_{n+1}(x) = A_n x\, v_n(x) - C_n v_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_n = \frac{(2n+1)\left[\alpha + \frac{1}{2}(n+1)n\right]}{(n+1)\left[\alpha + \frac{1}{2}(n-1)n\right]}, \quad C_n = \frac{n\left[\alpha + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]}{(n+1)\left[\alpha + \frac{1}{2}(n-1)n\right]},$$
$$A_n' = C_n', \quad A_n - C_n = 1.$$

Тут $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера.

Зробимо зауваження, яке буде корисним для побудови тричленного рекурентного співвідношення для ортогональних поліномів, якщо є відомим їх зображення

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} k_{n,\, n-j} x^{n-j}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

У цьому випадку коефіцієнти тричленного рекурентного співвідношення

$$p_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

визначаються за формулами

$$\alpha_n = \frac{k_{n+1,\, n+1}}{k_{n,\, n}}, \quad \beta_n = \alpha_n \left(\frac{k_{n,\, n-1}}{k_{n,\, n}} - \frac{k_{n+1,\, n}}{k_{n+1,\, n+1}} \right),$$
$$\gamma_n = \frac{1}{k_{n-1,\, n-1}} (\alpha_n k_{n,\, n-2} + \beta_n k_{n,\, n-1} - k_{n+1,\, n-1}),$$

в яких, на відміну від відповідних формул із [7] (див. с. 161, формули (7), (8)), використовуються тільки коефіцієнти поліномів.

Розглянемо таке диференціальне рівняння шостого порядку:

$$A_6 y(x) = L_6 y(x) - \lambda_6(n) y(x) = \sum_{p=0}^{5} a_{6-p}(x) \frac{d^{6-p} y(x)}{dx^{6-p}} - \lambda_6(n) y(x) = 0,$$
$$a_6(x) = (x^2-1)^3, \quad a_5(x) = 18x(x^2-1)^2, \quad a_4(x) = 30(x^2-1)(3x^2-1),$$
$$a_3(x) = 120x(x^2-1), \quad a_2(x) = -24, \quad a_1(x) = 0,$$

яке є частинним випадком диференціального рівняння, розглянутого в роботі [3], коли $A = B = -1,\ C = 1$. Його розв'язками за умови

$$\lambda_6(n) = (n-2)_3 (n+1)_3$$

є ортогональні поліноми типу Лагранжа [3]

$$y(x) = K_n(x) = (n^2+n-2)/2P_n(x) - x\frac{dP_n(x)}{dx}. \tag{3}$$

Тут $(a)_n$ — символ Похгаммера. Із (2), (3) випливає, що для $\alpha = -1$ буде мати місце співвідношення

$$K_n(x) = v_n(x).$$

Отже, буде справедливою лема, згідно з якою можна побудувати диференціальні рівняння будь-яких парних порядків із розв'язками (3), а також розв'язки відповідних резонансних рівнянь.

Узагальнені поліноми Лагерра. Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\begin{aligned} A_{4,n}y(x) = L_4y(x) - \lambda_4(n)y(x) = x^2\frac{d^4y(x)}{dx^4} - 2x(x-2)\frac{d^3y(x)}{dx^3} + \\ +(x^2-10x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + (6x-4)\frac{dy(x)}{dx} + \lambda_4(n)y(x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \tag{4}$$

Це рівняння є частковим випадком із [2] для $R = 2$. Як було показано в [2], за умови

$$\lambda_4(n) = -n(n+5)$$

поліноміальними розв'язками рівняння (4) будуть

$$v_n(x) = (n+2)L_n(x) + \frac{d}{dx}L_n(x), \tag{5}$$

де $L_n(x)$ — поліном Лагерра. Згідно з [2], поліноми (5) є ортогональними в сенсі скалярного добутку

$$(v_n, v_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x)v_n(x)v_m(x)dx + \frac{1}{2}v_n(0)v_m(0) = \delta_{n,m}(n^2+5n+6)$$

і задовольняють рекурентне співвідношення

$$v_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)v_n(x) - C_nv_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_n = -\frac{n+3}{(n+2)(n+1)}, \quad B_n = \frac{2n^3+11n^2+17n+4}{(n+2)^2(n+1)}, \quad C_n = \frac{(n+3)^2n}{(n+2)^2(n+1)}.$$

Розглянемо таке однопараметричне сімейство диференціальних операторів шостого порядку:

$$\begin{aligned} A_{6,n}y(x) = L_6y(x) - \lambda_6(n)y(x) = x^3\frac{d^6y(x)}{dx^6} - 3x^2(x-3)\frac{d^5y}{dx^5} + \\ +\left(15x + \left(-\frac{a_{1,0}}{4} - 24\right)x^2 + 3x^3\right)\frac{d^4y(x)}{dx^4} + \left((-a_{1,0}-36)x + \left(\frac{a_{1,0}}{2} + 21\right)x^2 - x^3\right)\frac{d^3y(x)}{dx^3} + \\ +\left(-6 + \left(\frac{5a_{1,0}}{2} + 21\right)x + \left(-\frac{a_{1,0}}{4} - 6\right)x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a_{1,0}\left(1 - \frac{3x}{2}\right)\frac{dy(x)}{dx} + \lambda_6(n)y(x). \end{aligned}$$

Нами доведено, що за виконання умови

$$\lambda_6(n) = -n(n-1)(n-2) + \left(\frac{a_{1,0}}{4} + 6\right) n(n-1) - 3\frac{a_{1,0}}{2} n$$

поліноміальними розв'язками однорідного диференціального рівняння з цим оператором є

$$K_n(x) = (n+2)L_n(x) + \frac{dL_n(x)}{dx}, \quad n = 0, 1, \dots ,$$

причому вони збігаються з (5). Отже, є справедливою лема, згідно з якою можна побудувати диференціальні рівняння будь-яких парних порядків із розв'язками (5), а також розв'язки відповідних резонансних рівнянь.

Зауваження. Автором побудовані однорідні рівняння четвертого і шостого порядків вигляду (1), поліноміальні розв'язки яких збігаються та є узагальненими поліномами Ерміта, але для них не існує тричленного рекурентного співвідношення, отже, вони не утворюють ортогональну систему.

Робота підтримана грантом H2020-MSCA-RISE-2019, № 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Hahn W. Über Orthogonalpolynome mit drei Parametern. *Deutsche Math*. 1939. **5**. P. 273—278.
2. Krall A.M. Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. *Pr. Roy. Soc. Edinb*. 1981. **87 A**. P. 271—288. https://doi.org/10.1017/S0308210500015213
3. Littlejohn L.L. The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials. *Quaest. Math*. 1982. **5**. P. 255—265. https://doi.org/10.1080/16073606.1982.9632267
4. Макаров В.Л. Ортогональные многочлены и разностные схемы с точными и явными спектрами: дис. д-ра. физ.-мат. наук. Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, Киев, 1976.
5. Gavrilyuk I., Makarov V. Resonant equations with classical orthogonal polynomials. I. *Укр. мат. журн*. 2019. **71**, № 2. С. 190—209.
6. Gavrilyuk I., Makarov V. Resonant equations with classical orthogonal polynomials. II. *Укр. мат. журн*. 2019. **71**, № 4. С. 455—470.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 296 с.

Надійшло до редакції 25.02.2020

REFERENCES

1. Hahn, W. (1939). Über Orthogonalpolynome mit drei Parametern. Deutsche Math., 5, pp. 273-278.
2. Krall, A. M. (1981). Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. Pr. Roy. Soc. Edinb., 87A, pp. 271-288. https://doi.org/10.1017/S0308210500015213
3. Littlejohn, L. L. (1982). The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials. Quaest. Math., 5, pp. 255-265. https://doi.org/10.1080/16073606.1982.9632267
4. Makarov, V. L. (1976). Orthogonal polynomials and finite difference schemes with exact spectrum given in closed form (Extended abstract of Doctor thesis). Taras Shevchenko State University of Kyiv, Ukraine (in Russian).
5. Gavrilyuk, I. & Makarov, V. (2019). Resonant equations with classical orthogonal polynomials. I. Ukr. Mat. Zhurn., 71, No. 2, pp. 190-209.
6. Gavrilyuk, I. & Makarov, V. (2019). Resonant equations with classical orthogonal polynomials. II. Ukr. Mat. Zhurn., 71, No. 4, pp. 455-470.
7. Bateman, H. & Erdélyi, A. (1974). Higher trancendental functions. (Vol. 2). Moscow: Nauka (in Russian).

Received 25.02.2020

V.L. Makarov

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: makarovimath@gmail.com

HIGHER-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH POLYNOMIAL SOLUTIONS ASSOCIATED
WITH CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

A constructive algorithm for constructing differential equations of higher even orders is found, whose solutions are generalized classical orthogonal polynomials. For these polynomials, an explicit image, a three-term recurrence relation, and the appearance of orthogonality conditions with respect to the corresponding distribution function are obtained. The solutions of the corresponding resonance equations are given.

Keywords: *higher-order differential equations, classical orthogonal polynomials, Legendre, Laguerre, and Hermite polynomials, orthogonality relation, three-term recurrence relation, resonance equations.*