ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.019
УДК 512.61 : 519.61

Н.А. Варенюк, Є.Ф. Галба,
І.В. Сергієнко, Н.І. Тукалевська

Інститут кібернетики ім В.М. Глушкова НАН України, Київ
E-mail: nvareniuk@ukr.net, e.f.galba@ukr.net,
aik@public.icyb.kiev.ua, Tukalevska@nas.gov.ua

Ітераційні методи для обчислення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами на основі їх розвинення у матричні степеневі ряди

Представлено академіком НАН України І.В. Сергієнком

Отримано й досліджено розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами (одна вагова матриця додатно-означена, а інша — невироджена знаконевизначена) у матричні степеневі ряди з додатними показниками степенів. На основі отриманих розвинень зважених псевдообернених матриць побудовано й досліджено ітераційні методи для обчислення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами. Математичним апаратом побудови та дослідження ітераційних методів обчислення зазначених зважених псевдообернених матриць також слугують одержане авторами статті зважене спектральне розвинення матриць, що симетризуються, властивості цих матриць, пов'язаних із зваженими псевдообереними матрицями, та представлення зважених псевдообернених матриць зі змішаними ваговими матрицями в термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів матриць, що симетризуються.

Ключові слова: *зважені псевдообернені матриці з індефінітними й змішаними вагами, матричні степеневі ряди, ітераційні методи.*

Уперше визначення зваженої псевдооберненої матриці з додатно-означеними вагами дано в [1]. У [2] встановлено зважену псевдообернену матрицю з виродженими вагами, конкретизовано необхідні й достатні умови її існування. У [3—5] досліджено інші варіанти зважених псевдообернених матриць із виродженими вагами (див. також оглядову статтю [6]), названо необхідні й достатні умови існування розглянутих псевдообернених матриць із виродженими вагами, визначено зважені нормальні псевдорозв'язки з виродженими вагами й встановлено їх зв'язок із зваженими псевдооберненими матрицями. Оглядову статтю [7] присвячено методам обчислення зважених псевдообернених матриць і зважених нормальних псевдорозв'язків з виродженими вагами. У [8] введено поняття ML-зваженої псевдооберне-

Ц и т у в а н н я: Варенюк Н.А., Галба Є.Ф., Сергієнко І.В., Тукалевська Н.І. Ітераційні методи для обчислення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами на основі їх розвинення у матричні степеневі ряди. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 8. С. 19—25. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.019

ної матриці. В [9] дано визначення зважених псевдообернених матриць із невиродженими індефінітними вагами й відзначено достатні умови існування цих матриць. Дослідженню зважених псевдообернених матриць із індефінітними невиродженими вагами присвячена робота [10]. У ній доведено теорему існування й єдиності зважених псевдообернених матриць із індефінітними вагами, дано представлення цих матриць у термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів матриць, що симетризуються, отримано розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди й добутки з від'ємними показниками степенів, граничні представлення цих матриць, побудовано регуляризовані ітераційні методи для їх обчислення. Відмінні від запропонованих в [10] розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди й добутки з від'ємними показниками степенів і регуляризовані ітераційні методи для їх обчислення наведено в [11]. Вплив збурення вихідних даних на розв'язки задач обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків з додатно-означеними вагами проаналізовано в [12].

У даному повідомленні запропоновано й обґрунтовано розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди з додатними показниками степенів. Припускається, що обидві вагові матриці симетричні, причому одна з них додатно-означена, а друга — невироджена знаконевизначена. Математичними апаратами дослідження слугують представлення зваженої псевдооберненої матриці зі змішаними вагами в термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів матриць, що симетризуються, і зважене спектральне розвинення матриць, що симетризуються. На основі розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди побудовано й досліджено ітераційні процеси для їх обчислення. Обґрунтовано вибір ітераційних параметрів, який забезпечує збіжність ітераційних процесів.

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ n-вимірний векторний простір над полем дійсних чисел, де вектори суть матриці розміру $n\times 1$. Нехай H — симетрична додатно-означена, додатно-напіввизначена, або ж знаконевизначена матриця. В $\mathbb{R}^n$ введемо скалярний добуток за формулою $(u,v)_H=(Hu,v)_E$, де $(u,v)_E=u^T v$, E — одинична матриця. Якщо метрична матриця H додатно-означена або додатно-напіввизначена, то звичайним чином можна нормувати простір $\mathbb{R}^n$, поклавши $\|u\|_H=(u,u)_H^{1/2}$. У першому випадку функція $\|u\|_H$ буде визначати еліпсоїдальну норму, а в другому — еліпсоїдальну напівнорму.

Визначимо зважену норму прямокутної матриці з симетричними невиродженими ваговими матрицями. Нехай $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, а $H=H^T\in\mathbb{R}^{m\times m}$ й $V=V^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ – невироджені матриці. Для множини матриць A в [10] норму введено співвідношенням

$$\|A\|_{HV}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|AVx\|_{H^2}}{\|x\|_{E_n}}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|HAVx\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}}=\sup_{x\neq 0}\frac{(VA^T H^2 AVx,x)_{E_m}^{1/2}}{\|x\|_{E_n}}, \qquad (1)$$

де $x\in\mathbb{R}^n$, а нижній індекс при одиничній матриці означає її розмірність.

В [10] показано, що функція (1) є адитивною (узагальненою) матричною нормою, яка визначається за формулою

$$\|A\|_{HV}=[\lambda_{\max}(VA^T H^2 AV)]^{1/2}, \qquad (2)$$

де $\lambda_{\max}(L)$ — максимальне власне значення матриці L.

Отримано наступні співвідношення для матричних норм із невиродженими вагами, які використовуються при дослідженні розвинень зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди з додатними показниками степенів [10].

Лема 1. *Нехай* $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, *а* $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *— симетричні невироджені матриці, тоді мають місце співвідношення*

$$\|AB\|_{HV} \leqslant \|A\|_{HM} \|B\|_{M^{-1}V}, \quad \|AB\|_{HV} \leqslant \|A\|_{HM^{-1}} \|B\|_{MV}.$$

Означення 1. Дійсну матрицю U будемо називати такою, що симетризується зліва або справа, якщо існує така симетрична невироджена матриця H, що виконуються відповідно рівності $HU = U^T H, UH = HU^T$.

Означення 2. Квадратну дійсну матрицю Q будемо називати H-зваженою ортогональною (ортогональною з вагою H), якщо виконується умова $Q^T HQ = E$, де H — симетрична додатно-означена матриця.

При дослідженні розвинень зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди є важливим використання твердження наступної леми [10].

Лема 2. *Матриця U, що симетризується зліва додатно-означеним симетризатором H, може бути зведена до діагональної форми за допомогою H-зваженого ортогонального перетворення, тобто існує така H-зважена ортогональна матриця Q, що $Q^T HUQ = \Lambda$, і матрицю U можна представити у вигляді $U = Q\Lambda Q^T H$, де $\Lambda = diag(\lambda_i)$, λ_i — власні значення матриці U, а стовпці матриці Q утворюють повну систему власних векторів матриці U.*

Нехай $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = B^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C = C^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Будемо розглядати систему матричних рівнянь

$$AXA = A, XAX = X, (BAX)^T = BAX, (CXA)^T = CXA \tag{3}$$

при двох умовах на вагові матриці B і C:

1) матриця C — додатно-означена, а B — невироджена знаконевизначена при виконанні умови

$$\operatorname{rank}(A^T BA) = \operatorname{rank}(A), \tag{4}$$

2) матриця B — додатно-означена, а C — невироджена знаконевизначена при виконанні умови

$$\operatorname{rank}(AC^{-1}A^T) = \operatorname{rank}(A). \tag{5}$$

Отже, далі буде розглянуто два варіанти зважених псевдообернених матриць, обумовлених умовами (3), (4) і (3), (5).

В [10] показано, що система матричних рівнянь (3), коли обидві вагові матриці B и C невироджені знаконевизначені, при виконанні умов (4) і (5) має єдиний розв'язок $X = A^+_{BC}$, причому матрицю A^+_{BC} можна представити у вигляді

$$A^+_{BC} = C^{-1}SA^T B, \tag{6}$$

де $S = f(A^T BAC^{-1})$ — многочлен від матриці $A^T BAC^{-1}$ вигляду

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^T BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1 (A^T BAC^{-1})^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$ — коефіцієнти характеристичного многочлена $f(\lambda) = \det[\lambda E - A^T BAC^{-1}]$, а α_k — останній, відмінний від нуля коефіцієнт цього многочлена.

Відзначимо, що задачі (3), (4) і (3), (5) є окремими випадками задачі (3), (4), (5), тобто задачі (3), коли обидві вагові матриці B і C невироджені знаконевизначені. Тому для цих задач має місце формула (6), яка, що важливо, використовується при дослідженні розвинень зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди.

Щоб отримати розвинення зважених псевдообернених матриць у матричні степеневі ряди й побудувати ітераційні методи обчислення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами доведено наступні допоміжні твердження.

Лема 3. *Матриці* $A_{BC}^{+}A$ *й* $C^{-1}A^T BA$ *комутують, мають спільну систему власних векторів і їх нуль-простори збігаються.*

Лема 4. *Матриці* AA_{BC}^{+} *й* $AC^{-1}A^T B$ *комутують, мають спільну систему власних векторів і їх нуль-простори збігаються.*

Лема 5. *Матриці* A, $A_{BC}^{+}A$ *і* $C^{-1}A^T BA$ *при виконанні умови* (4) *мають однаковий ранг.*

Лема 6. *Матриці* A, AA_{BC}^{+} *і* $AC^{-1}A^T B$ *при виконанні умови* (5) *мають однаковий ранг.*

Доведено, що мають місце наступні розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди.

Теорема 1. *Для довільної матриці* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симетричної знаконевизначеної невиродженої матриці* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *симетричної додатно-означеної матриці* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *й дійсного числа* α, *що задовольняє умову*

$$0 < \alpha < 0{,}5[\rho(C^{-1}A^T BA)]^{-1}, \tag{7}$$

має місце співвідношення

$$A_{BC}^{+} = \left(\frac{1}{2}E + \alpha C^{-1}A^T BA\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E - \alpha C^{-1}A^T BA\right)^k C^{-1}A^T B, \tag{8}$$

де A_{BC}^{+} *— зважена псевдообернена матриця, що задовольняє умови* (3), (4), $\rho(L)$ *— спектральний радіус матриці* L.

Теорема 2. *Для довільної матриці* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симетричної додатно-означеної матриці* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *симетричної знаконевизначеної невиродженої матриці* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *й дійсного числа* α, *що задовольняє умову*

$$0 < \alpha < 0{,}5[\rho(AC^{-1}A^T B)]^{-1}, \tag{9}$$

має місце співвідношення

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1}A^T B\left(\frac{1}{2}E - \alpha AC^{-1}A^T B\right)^k \left(\frac{1}{2}E + \alpha AC^{-1}A^T B\right), \tag{10}$$

де A_{BC}^{+} *— зважена псевдообернена матриця, що задовольняє умови* (3), (5), $\rho(L)$ *— спектральний радіус матриці* L.

На основі розвинення (8) для обчислення наближень до зважених псевдообернених матриць A_{BC}^{+}, визначених умовами (3), (4), побудовано ітераційний процес

$$X_1 = \left(\frac{1}{2}E + \alpha C^{-1}A^T BA\right)C^{-1}A^T B,$$
$$X_k = \left(\frac{1}{2}E - \alpha C^{-1}A^T BA\right)X_{k-1} + \left(\frac{1}{2}E + \alpha C^{-1}A^T BA\right)C^{-1}A^T B, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Теорема 3. *Ітераційний процес* (11) *збігається, причому має місце оцінка*

$$\left\|A_{BC}^{+} - X_k\right\|_{C^{1/2}V} \leqslant q^k \left\|A_{BC}^{+}\right\|_{C^{1/2}V}, \tag{12}$$

де A_{BC}^{+} *— зважена псевдообернена матриця, що задовольняє умови* (3), (4), $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— симетрична додатно-означена матриця, яка входить до визначення зваженої псевдооберненої матриці,* $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *— довільна симетрична додатно-означена матриця,* $q = \left\|\frac{1}{2}A_{BC}^{+}A - \alpha C^{-1}A^T BA\right\|_{C^{1/2}V} = \rho\left(\frac{1}{2}A_{BC}^{+}A - \alpha C^{-1}A^T BA\right) < 1$.

На основі розвинення (10) для обчислення наближень до зважених псевдообернених матриць A_{BC}^{+}, визначених умовами (3), (5), побудовано ітераційний процес

$$X_1 = C^{-1}A^T B\left(\frac{1}{2}E + \alpha AC^{-1}A^T B\right),$$
$$X_k = \left(\frac{1}{2}E - \alpha AC^{-1}A^T B\right)X_{k-1} + C^{-1}A^T B\left(\frac{1}{2}E + \alpha AC^{-1}A^T B\right), \quad k = 2, 3, \ldots \tag{13}$$

Теорема 4. *Ітераційний процес* (13) *збігається, причому має місце оцінка*

$$\left\|A_{BC}^{+} - X_k\right\|_{HB^{-1/2}} \leqslant q^k \left\|A_{BC}^{+}\right\|_{HB^{-1/2}}, \tag{14}$$

де A_{BC}^{+} *— зважена псевдообернена матриця, що задовольняє умови* (3), (5), $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *— симетрична додатно-означена матриця, яка входить до визначення зваженої псевдооберненої матриці,* $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— довільна симетрична додатно-означена матриця,* $q = \left\|\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha AC^{-1}A^T B\right\|_{HB^{-1/2}} = \rho\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha AC^{-1}A^T B\right) < 1$.

Таким чином, отримано ітераційні процеси для обчислення зважених псевдообернених матриць зі змішаними ваговими матрицями. З оцінок (12), (14) випливає, що похибка наближення залежить від кількості ітерацій і величини *q*, визначеної в теоремах 3 і 4. Очевидно, що параметр α, визначений в (7) і (9), необхідно вибирати таким, щоб величина *q* була мінімальною для даної задачі.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient observation. *J. Amer.Statist. Assoc*. 1964. **59**, № 308. P. 1078—1111. https://doi.org/10.1080/01621459.1964.10480751
2. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math*. 1971. **21**, № 3. P. 480—482. https://doi.org/10.1137/0121051
3. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. 2009. **49**, № 8. С. 1347—1363.
4. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Укр. мат. журн*. 2011, **63**, № 1. С. 80—101.
5. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами. *Кибернетика и систем. анализ*. 2011. **47**, № 1. С. 14—33.
6. Сергиенко И.В, Галба Е.Ф. Взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами. *Кибернетика и систем. анализ*. 2016. **52**, № 5, С. 56—80.
7. Галба Е.Ф., Сергиенко И.В. Методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Кибернетика и систем. анализ*. 2018. **54**, № 3. С. 65—93.
8. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore—Penroze inverses. *Linear Algebra and Appl*. 1974, № 9. P. 155—167. https://doi.org/10.1016/0024-3795(74)90034-2
9. Rao C.R., Mitra S.K.*G*eneralized inverse of matrices and its applications. New York: Wiley, 1971. 240 p.
10. Варенюк Н.А., Галба Е.Ф., Сергиенко И.В., Химич А.Н. Взвешенная псевдоинверсия с индефинитными весами. *Укр. мат. журн*. 2018. **70**, № 6. С. 752—772.
11. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения. *Кибернетика и систем. анализ*. 2019. **55**, № 5. С. 67—80.
12. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ*. 2009. **49**, № 3. С. 422—430.

Надійшло до редакції 04.05.2020

REFERENCES

1. Chipman, J. S. (1964). On least squares with insufficient observation. J. Amer. Statist. Assoc., 59, No. 308, pp. 1078-1111. https://doi.org/10.1080/01621459.1964.10480751
2. Ward, J. F., Boullion, T. L. & Lewis, T.O. (1971). Weighted pseudoinverses with singular weights. SIAM J. Appl. Math., 21, No. 3, pp. 480-482. https://doi.org/10.1137/0121051
3. Galba, E. F., Deineka, V. S. & Sergienko, I. V. (2009). Weighted pseudoinverses and weighted normal pseudosolutions with singular weights. Comput. Math. Math. Phys., 49, No. 8, pp. 1281-1297. https://doi.org/10.1134/S0965542509080016
4. Sergienko, I. V., Galba, E. F. & Deineka, V. S. (2011). Existence and uniqueness of weighted pseudoinverse matrices and weighted normal pseudosolutions with singular weights. Ukr. Math. J., 63, Art. 98. https://doi.org/10.1007/s11253-011-0490-3
5. Sergienko, I. V., Galba, Y. F. & Deineka, V. S. (2011). Existence and uniqueness theorems in the theory of weighted pseudoinverses with singular weights. Cybern. Syst. Anal., 47, Iss. 1, pp. 11-28. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9286-6
6. Sergienko, I. V. & Galba, E. F. (2016). Weighted pseudoinversion with singular weights. Cybern. Syst. Anal., 52, pp. 708-729. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9873-7
7. Galba, E. F., Sergienko, I. V. (2018). Methods for Computing Weighted Pseudoinverses and Weighted Normal Pseudosolutions with Singular Weights. Cybern. Syst. Anal. 54, pp. 398-422. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0042-z
8. Mitra, S. K. & Rao, C. R. (1974). Projections under seminorms and generalized Moore-Penroze inverses. Linear Algebra Appl., No. 9, pp. 155-167. https://doi.org/10.1016/0024-3795(74)90034-2
9. Rao, C. R. & Mitra, S. K. (1971). Generalized inverse of matrices and its applikations. New York: Wiley.

10. Varenyuk, N. A., Galba, E. F., Sergienko, I. V. & Khimich, A. N. (2018). Weighted Pseudoinversion with Indefinite Weights. Ukr. Math. J., 70, pp. 866-889. https://doi.org/10.1007/s11253-018-1539-3
11. Galba, E. F. & Vareniuk, N. A. (2019). Expansions of weighted pseudoinverses with mixed weights into matrix power series and power products. Cybern. Syst. Anal., 55, pp. 760-771. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00186-9
12. Nikolaevskaya, E. A. & Khimich, A. N. (2009). Error estimation for a weighted minimum-norm least squares solution with positive definite weights. Comput. Math. and Math. Phys., 49, pp. 409-417. https://doi.org/10.1134/S0965542509030038

Received 04.05.2020

N.A. Vareniuk, E.F. Galba,
I.V. Sergienko, N.I. Tukalevska

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: nvareniuk@ukr.net, e.f.galba@ukr.net, aik@public.icyb.kiev.ua, Tukalevska@nas.gov.ua

ITERATIVE METHODS FOR CALCULATION OF WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES WITH MIXED WEIGHTS ON THE BASIS OF THEIR DECOMPOSITIONS INTO MATRIX POWER SERIES

The decompositions of weighted pseudoinverse matrices with mixed weights (one of the weighted matrices is positive definite, and an other one is nonsingular indefinite) into matrix power series with positive exponents are obtained and investigated. Iterative methods for calculation of weighted pseudoinverse matrices with mixed weights are built and investigated on the basis of obtained expansions of weighted pseudoinverse matrices. Weighted spectral decompositions of symmetrized matrices, properties of these matrices associated with weighted pseudoinverse matrices, and the representation of weighted pseudoinverse matrices with mixed weights in terms of the coefficients of characteristic polynomials of symmetrizable matrices are the mathematical apparatus for constructing and studying the iterative methods for calculating these weighted pseudoinverse matrices. The choice of the iterative parameter is substantiated that provides the convergence of iterative processes. The iterative processes of two types of weighted pseudoinverse matrices are considered.

Keywords: *weighted pseudoinverse matrices with indefinite and mixed weights, matrix power series, iterative methods.*