

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.035>

УДК 539.3

С.П. Орленко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ

E-mail: orlenko_sergey@ukr.net

Чисельне моделювання коливань тришарової конічної оболонки з дискретно- симетричним неоднорідним заповнювачем

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренком

Постійний інтерес до широкого використання і створення сучасних конструкційних матеріалів часто призводить до необхідності одночасного виконання цілого ряду, часом суперечливих, вимог до багатошарових конструкцій, в яких кожен шар виконує тільки одну або краще кілька функцій. При цьому шари можуть відрізнятися як за товщиною, так і за фізико-механічними властивостями, тобто пакет може бути істотно неоднорідним. Ефективна несуча здатність тришарових оболонкових конструкцій з легким заповнювачем при достатній легкості робить їх дуже корисними в різних інженерних додатках. Експериментально доведено, що армування легкого заповнювача дискретно-симетричними жорсткими елементами значно підвищує міцність і стійкість тришарових структур на стиск. Безперервна розробка нових конструкційних матеріалів все більш ускладнює структурні конструкції, що вимагають ретельного аналізу. Одним з поширених елементів зазначених оболонкових конструкцій є тришарові конічні оболонки, які піддаються нестационарним навантаженням. Достатня кількість публікацій присвячена дослідженню динаміки тришарових оболонок [1]. Однак останнім часом створення об'єктів спеціального призначення тощо вимагає розробки конструктивних тришарових оболонкових елементів з заповнювачем ускладненої геометричної структури [2]. Питання динамічної поведінки таких оболонок вивчені недостатньо. У даній роботі кінематичні і статичні гіпотези застосовуються до кожного шару оболонок, що підвищує загальний порядок системи рівнянь, але це дозволяє детальніше вивчити динамічну поведінку тришарової структури. В основу рішення задачі покладена теорія оболонок і стрижнів, заснована на зсувній моделі С.П. Тимошенка. Для виведення рівнянь коливань тришарової неоднорідної по товщині структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона—Остроградського. Чисельне моделювання динаміки тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним легким заповнювачем проведено скінчено-елементним методом. Наведено числові результати розв'язку конкретних задач і виявлені нові механічні ефекти.

Ключові слова: тришарова конічна оболонка, дискретно-симетричний легкий заповнювач, нестационарне навантаження, нові механічні ефекти.

Цитування: Орленко С.П. Чисельне моделювання коливань тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 8. С. 35–42. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.035>

Постановка задачі. Основні рівняння. Пружна тришарова конічна оболонка являє собою систему, яка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких конічних оболонок (внутрішній — 1 і зовнішній — 2 несучі шари) з відповідними товщинами і радіусами серединних поверхонь. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами, а простір між несучими шарами і ребрами заповнений легким однорідним пружним матеріалом. Передбачається, що розглянута тришарова конструкція піддається дії внутрішнього нестационарного розподіленого нормального навантаження $P_3(s, t)$. При розгляді вісесиметричних коливань конічних оболонок зазвичай використовується система координат s, z, t , причому, координата s відраховується від вершини конуса, а координатна лінія z є прямою, яка ортогональна до серединної поверхні, t — часова координата. Будемо вважати величину z додатною, якщо точка знаходиться зі сторони опуклості серединної поверхні.

У випадку зрізаної конічної оболонки, більш зручним є використання координати s , яка відраховується від краю оболонки з радіусом R_0 . В такому випадку поточний радіус конічної оболонки вираховується за формулою: $R_s = R_0 + s \cdot \sin \alpha$, де α — кут конусності.

При виведенні рівнянь руху такої оболонки використовується теорія тонких оболонок С.П. Тимошенка [3]. Деформований стан несучих шарів визначається відповідними складовими узагальнених векторів переміщень $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$. Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщень — $\bar{U}_t = (u_t^1, u_t^3, \varphi_t^1)^T$. Внутрішній легкий заповнювач армується дискретно-симетричною системою ребер. При цьому вважається, що деформований стан j -го армуючого ребра, направлено вздовж колової координати, визначається узагальненим вектором переміщення центра ваги його поперечного перетину $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{3j}, \varphi_{1j})^T$.

На основі теорії деформації зсуву в оболонках [3], переміщення u_1^i і u_3^i та кути повороту φ_1^i в несучих шарах в напрямку s (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються такими залежностями:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_{01}^i(s, t) + z_i \varphi_1^i(s, t), \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t), \quad i = 1, 2; \end{aligned} \tag{1}$$

де z_i — вертикальна координата кожного несучого шару; φ_1^i — кути повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

При жорсткому з'єднанні дискретних армуючих ребер з конічними несучими шарами записуються умови контакту центрів ваги ребер з цими шарами:

$$\begin{aligned} u_{1j} &= u_1^i(s_j) \pm h_j^i \varphi_1^i(s_j), \\ u_{3j} &= u_3^i(s_j), \quad \varphi_{1j} = \varphi_1^i(s_j), \quad i = 1, 2; \quad i = \overline{1, J}, \end{aligned} \tag{2}$$

де s_j — координата лінії точок проекції центрів ваги поперечного перетину j -го армуючого ребра на відповідну серединну поверхню; $h_j^i = 0,5h_i + H_j h_i$; $i = 1, 2$ — товщини конічних внутрішнього і зовнішнього несучого шарів; H_j — відстань від осі j -го армуючого ребра до поверхонь несучих шарів.

Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються згідно з моделлю, запропонованою в роботі [4]:

$$\begin{cases} u_1^t(s, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_{ts}}\right) u_{01}^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) = u_{01}^t(s, t). \end{cases} \quad (3)$$

Передбачається ідеальне з'єднання між легким заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, представлене в наступному вигляді [5]:

$$\begin{cases} u_1^1 \Big|_{z_2 = -\frac{h_1}{2}} = u_1^t \Big|_{z_t = \frac{h_t}{2}}, & u_1^2 \Big|_{z_2 = -\frac{h_2}{2}} = u_1^t \Big|_{z_t = -\frac{h_t}{2}}, \\ u_3^1 \Big|_{z_1 = -\frac{h_1}{2}} = u_3^t \Big|_{z_t = \frac{h_t}{2}}, & u_3^2 \Big|_{z_2 = -\frac{h_2}{2}} = u_3^t \Big|_{z_t = -\frac{h_t}{2}}. \end{cases} \quad (4)$$

Використовуючи вирази для поля переміщень для несучих шарів (2), легкого заповнювача (3) і умови міжшарової неперервності переміщень (4), виведемо спрощені умови спільності переміщень для несучих шарів і легкого заповнювача:

$$\begin{aligned} u_{10}^t &= \frac{1}{2} \left[u_{10}^1 + u_{10}^2 - \frac{1}{2} (h_1 u_1^1 - h_2 u_1^2) \right], \\ u_{11}^t &= \frac{1}{h_t} \left[u_{10}^1 - u_{10}^2 - \frac{1}{2} (h_1 u_1^1 + h_2 u_1^2) \right], \\ u_{30}^t &= \frac{1}{2} (u_{30}^1 + u_{30}^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Для виведення рівнянь коливань тришарової неоднорідності по товщині структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона—Остроградського, згідно з яким

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) - \delta A] dt = 0, \quad (6)$$

де Π — потенційна енергія пружної системи; K — кінетична енергія; A — робота зовнішніх сил.

Вирази для величин $\delta\Pi$ і δK записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi_j + \delta \sum_{S_t} \Pi^t, \\ \delta K &= \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K_j + \delta \sum_{S_t} K^t, \\ \delta\Pi^i &= \int_{S_i} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T_{11}^i \delta\varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta\varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta\varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta\kappa_{11}^i) dz_i \right] dS_i, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\delta\Pi^t = \int_{S_t} \left[\int_{\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} (T_{11}^t \delta\varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta\varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta\varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta\kappa_{11}^t) dz_t \right] dS_t,$$

$$\delta\Pi_j = \int_{L_j} T_{22}^j \delta\varepsilon_{22}^j dL_j,$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial t^2} \delta \phi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i,$$

$$\delta K^t = \int_{S_t} \left[\int_{\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2} \delta u_{10}^t + \frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2} \delta u_{11}^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2} \delta u_{30}^t \right) dz \right] dS_t,$$

$$\delta K_j = \int_{L_j} \left[\rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \delta u_{1j} + \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \delta u_{3j} \right) + \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial t^2} \delta \phi_{1j} \right] dL_j,$$

де — ρ_i, ρ_j — щільності несучих шарів і армуючого ребра; F_j, I_{krj} — геометричні параметри j -го армуючого ребра.

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (6), з урахуванням співвідношень (2), (5), (7), отримуємо дві системи рівнянь руху 9-го порядку для тришарової несиметричної конічної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем при осесиметричному імпульсному навантаженні:

$$\cos \alpha \frac{\partial T_{11}^i}{\partial s} + \frac{T_{13}^i}{R_{is}} - \frac{4}{h_t^2} M_{13}^{*t} = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}, \quad \cos \alpha \frac{\partial M_{11}^i}{\partial s} - T_{13}^i + \frac{2h_i}{h_t^2} M_{13}^{*t} = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\cos \alpha \frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - \frac{T_{11}^i}{R_{is}} - \frac{1}{R_{ts} h_t} M_{11}^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^{*t}}{\partial x} - \left(1 \pm \frac{h_i}{2R_{is}} \right) P_i(s, t) = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$\cos \alpha \frac{\partial T_{11}^i}{\partial s} + \frac{1}{R_{ts}} (T_{13}^t - T_{13}^{*t}) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^{*t} = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{10}^i}{\partial t^2},$$

$$\cos \alpha \frac{\partial M_{11}^i}{\partial s} - T_{13}^{*t} + \frac{1}{R_{ts}} M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{11}^i}{\partial t^2}, \quad \cos \alpha \frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - \frac{1}{R_{ts}} T_{11}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{30}^i}{\partial t^2},$$

$$T_{13}^i = \rho_{rj} F_j \frac{\partial^2 u_{3j}^k}{\partial t^2}, \quad T_{11}^i = \rho_{rj} F_j \frac{\partial^2 u_{1j}^k}{\partial t^2},$$

$$M_{11}^i = \rho_{rj} I_{kr}^j \frac{\partial^2 \phi_{1j}^k}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2.$$

У рівняннях (8) вирази для зусиль-моментів для несучих шарів і армуючих ребер вводяться наступним чином:

$$T_{11}^i = B_{11}^i(\epsilon_{11}^i + \nu_{11}^i \epsilon_{11}^i); \quad T_{22}^i = B_{11}^i(\epsilon_{22}^i + \nu_{11}^i \epsilon_{11}^i), \quad (9)$$

$$T_{13}^i = B_{13}^i \epsilon_{13}^i; \quad M_{11}^i = D_{11}^i \kappa_{11}^i; \quad T_{22}^i = B_{22j}^i \epsilon_{22j}^i,$$

де

$$\epsilon_{11}^i = \cos \alpha \frac{\partial u_1^i}{\partial s}; \quad \epsilon_{22}^i = \frac{u_3^i}{R_{is}},$$

$$\epsilon_{13}^i = \cos \alpha \frac{\partial u_3^i}{\partial s} + \phi_1^i - \frac{u_1^i}{R_{is}}; \quad \kappa_{11}^i = \cos \alpha \frac{\partial \phi_1^i}{\partial s}, \quad i = 1, 2; \quad \epsilon_{22j}^i = \frac{u_{3j}^i}{R_{js}},$$

$$B_{11}^i = \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2}; \quad B_{13}^i = D_{13}^i \kappa_1^i; \quad D_{11}^i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)}; \quad B_{22j}^i = E_j F_j,$$

для легкого заповнювача:

$$T_{11}^t = B_{11}^t(\epsilon_{11}^t + \nu^t \epsilon_{22}^t); \quad T_{22}^t = B_{11}^t(\epsilon_{22}^t + \nu^t \epsilon_{22}^t),$$

$$T_{13}^t = B_{13}^t \epsilon_{13}^t; \quad M_{11}^t = D_{11}^t \kappa_{11}^t,$$

де

$$\epsilon_{11}^t = \cos \alpha \frac{\partial u_1^t}{\partial s}; \quad \epsilon_{22}^t = \frac{1}{(1 + z/R_{ts})} \left(\frac{u_3^t}{R_{ts}} \right),$$

$$2\epsilon_{13}^t = \frac{1}{(1 + z/R_{ts})} \cos \alpha \frac{\partial u_3^t}{\partial s} + \frac{\partial u_1^t}{\partial z}, \quad B_{11}^t = \frac{E_t h_t}{1 - \nu_t^2}; \quad B_{13}^t = D_{13}^t \kappa_1^2; \quad D_{11}^t = \frac{E_t h_t^3}{12(1 - \nu_t^2)}.$$

У співвідношеннях (9) величини E_i , E_t , D_{13}^i , D_{13}^t , ν_i , ν_t , E_j , ν_j — фізико-механічні характеристики матеріалів несучих шарів, легкого заповнювача і відповідних ребер; κ_i^2 — коефіцієнт поперечного зсуву в теорії оболонок типу Тимошенка.

Слід зауважити, що однією зі складностей дослідження коливань неоднорідних тришарових пружних структур з урахуванням дискретності ребер, армуючих легкий заповнювач, є наявність розривних коефіцієнтів у трьох останніх рівняннях коливань (8), які описують взаємодію несучих шарів з торцями армуючих ребер. Виходячи з цього, створюються численні алгоритми в гладких областях і “склеюються” на лініях розривів з урахуванням кінематичних умов сполучення. Але, наявність сучасних обчислювальних скінчено-елементних комплексів, дозволяє отримувати чисельні розв’язки подібних задач.

Чисельні розрахунки. Проведемо дослідження коливань симетричної тришарової конічної оболонки з врахуванням дискретно-симетричного заповнювача при вісесиметричному внутрішньому імпульсному навантаженні $P_3(s, t)$ методом скінчених елементів.

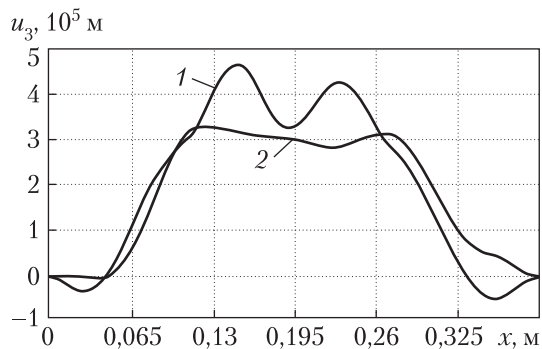
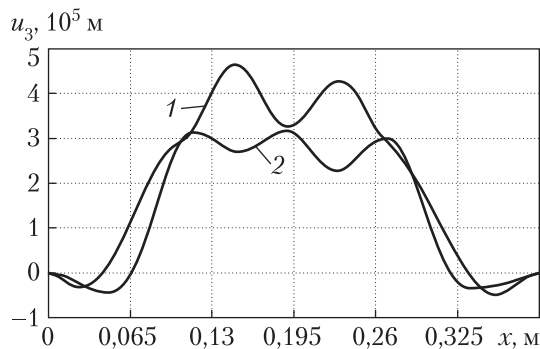


Рис. 1. Залежність величин u_3^1 і u_3^2 від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем при $E_1/E_t = 500$ в момент часу $t = 3,0T$

Рис. 2. Залежність величин u_3^1 і u_3^2 від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем при $E_1/E_t = 50$ в момент часу $t = 2,25T$

При жорсткому защемленні країв несучих шарів оболонки граничні умови покладалися: при $s = s_0, s = S$ (S — довжина несучих шарів оболонки) у вигляді

$$\begin{aligned} u_1^i(s_0, t) = 0; \quad u_3^i(s_0, t) = 0; \quad i = 1, 2; \\ u_1^i(S, t) = 0; \quad u_3^i(S, t) = 0; \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (10)$$

Нульові початкові умови при $t = 0$ покладалися

$$u_1^i(s, 0) = \frac{\partial u_1^i}{\partial t}(s, 0) = 0; \quad i = 1, 2; \quad u_3^i(s, 0) = \frac{\partial u_3^i}{\partial t}(s, 0) = 0; \quad i = 1, 2.$$

Нестационарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді $P_3(s, t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\theta(t) - \theta(t - T)]$, де A — амплітуда навантаження; T — тривалість навантаження; $\theta(t)$ — функція Хевісайда. В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Розрахунки проводили при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах:

$E_1 = E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3$; $R_0 = 0,3$ м, $R_1 = 0,4$ м; $R_s = 0,4$ м, $R_0/h_1 = 30$; $h_1 = h_2 = 0,01$ м; $H_j = 2 h_1$; $\alpha = \pi/12 = 15^\circ$; $F_j = H_j \cdot h_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м², а $h_j = 0,01$ м. Це значить, що товщина легкого заповнювача — пінопласту буде $h_t = 2$ см, фізико-механічні параметри якого: $E_1/E_t = 50$ і $E_1/E_t = 500$; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$. Дискретні підкріплюючі елементи розташовані в точках внутрішнього несучого шару: $s_j = [6 + (k-1)16] \Delta s$ $k = \overline{1,5}$, $\Delta s = (S - s_0)/80$, $(S - s_0) = 0,39$ м.

Отримані чисельні результати дозволяють аналізувати напружено-деформований стан симетричної тришарової пружної структури конічного типу в будь-який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$). Зокрема, на рис. 1 наведені залежності величин u_3 від просторової координати s для випадку $E_1/E_t = 500$. Крива 1 відповідає величині u_3 середньої поверхні внутрішнього несучого шару, а крива 2 — величині u_3 зовнішнього в момент часу $t = 3,0T$ (час досягнення максимального значення прогинів u_3). Перша власна частота тришарової конструкції складає 1620 Гц. Точки з'єднання кривих 1 та 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візу-

ально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин u_3 по просторовій координаті s .

На рис. 2 показані залежності величин u_3 від просторової координати s для випадку $E_1/E_t = 50$. Крива 1 відповідає величині u_3 внутрішнього несучого шару, а крива 2 — величині u_3 зовнішнього в момент часу $t = 2,25T$ (час досягнення максимального значення прогинів u_3). Перша власна частота тришарової конструкції складає 1774 Гц. Точки з'єднання кривих 1 та 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті s .

Для порівняння на рис. 3 наведені залежності величин u_3^1 і u_3^2 від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці з дискретно-симетричним ребристим заповнювачем в момент часу $t = 3,15T$ (час досягнення максимального значення прогинів u_3). Перша власна частота тришарової конструкції складає 1602 Гц.

Висновки. В роботі, виходячи з варіаційного принципу Гамільтона—Остроградського, отримані нові системи рівнянь коливань тришарових конічних оболонок з неоднорідним дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем. При описі елементів пружної структури використовуються моделі оболонок і стрижнів згідно з гіпотезами С.П. Тимошенка. Для чисельного розв'язку поставленої задачі застосовано скінчено-елементний метод. Отримані результати свідчать про значний вплив легкого заповнювача на механічну поведінку тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем за рахунок ваги легкого заповнювача на 0,01 % збільшує першу власну частоту тришарової конструкції на 11 %; час настання максимумів амплітуд коливань нормальних прогинів несучих шарів за рахунок присутності легкого заповнювача зменшується в 1,4 рази.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконані за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamics of inhomogeneous shell systems under nonstationary loading (survey). *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**. P. 481–537
2. Орленко С.П. Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3. С. 19–27. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.019>
3. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. Second Edition. New York etc.: McGraw-Hill Book Company INC, 1959. 636 p.

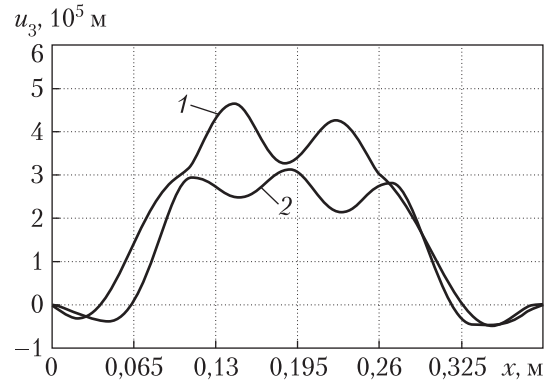


Рис. 3. Залежність величин u_3^1 і u_3^2 від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці з дискретно-симетричним заповнювачем в момент часу $t = 3,15T$

4. Frostig, Y., Thomsen, O.T. Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. *Int. J. of Solids and Structures*. 2004. № 41. P. 1697–1724. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.051>
5. Kheirikhah M.M., Khalili SMR, Malekzadeh Fard K. Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory. *Eur. J. Mechanics A/Solids*. 2012. **31**, № 1. P. 54–66.

Надійшло до редакції 08.06.2020

REFERENCES

1. Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2017). Dynamics of inhomogeneous shell systems under nonstationary loading (survey). *Int. Appl. Mech.* **53**, pp. 481-537.
2. Orlenko, S. P. (2020). Numerical simulation of the dynamics of a three-layer spherical shell with a discretely inhomogeneous filler. *Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr.*, No. 3, pp. 19-27. (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.019>
3. Timoshenko, S. P. & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. Second Edition. New York etc.: McGraw-Hill Book Company INC.
4. Frostig, Y. & Thomsen, O. T. (2004). Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. *Int. J. of Solids and Structures*. No. 41, pp. 1697-1724. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.051>
5. Kheirikhah, M. M., Khalili, SMR & Malekzadeh Fard K. (2012). Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory. *Eur. J. Mechanics A/Solids*, 31, No. 1, pp. 54-66.

Received 08.06.2020

Orlenko S.P.

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: orlenko_sergey@ukr.net.

NUMERICAL SIMULATION OF OSCILLATIONS OF A THREE-LAYER CONICAL SHELL WITH A DISCRETE-SYMMETRIC INHOMOGENEOUS FILLER

The constant interest in the widespread use and creation of modern structural materials often leads to the need for the simultaneous implementation of a number of sometimes contradictory requirements for multilayer structures, in which each layer performs only one or, better, several functions. The layers can differ both in thickness and in physical and mechanical properties, i.e., the package can be significantly inhomogeneous. The effective load-bearing capacity of three-layer shell structures with lightweight filler makes them very useful with sufficient ease in various engineering applications. It has been experimentally proved that the reinforcement of a lightweight filler with discrete-symmetric rigid elements significantly increases the strength and resistance strength of three-layer structures. The continuous development of new structural materials leads to increasingly complex structural structures that require a careful analysis. One of the common elements of these shell structures are three-layer conical shells, which are subjected to non-stationary loads. There is a sufficient amount of works in the literature about studying the dynamics of three-layer shells [1]. However, the recent creation of special purpose facilities, etc. leads to the need to develop constructive three-layer shell elements with a filler of a complicated geometric structure [2]. The issues of the dynamic behavior of such shells are insufficiently studied. In this paper, kinematic and static hypotheses are applied to each layer of shells, which increases the general order of the system of equations, but allows us to study the dynamic behavior of the three-layer structure in more details. The solution of the problem is based on the theory of shells and rods, based on the Timoshenko landslide model. The Hamilton–Ostrogradsky stationarity variational principle is used to derive the equations of oscillations of a three-layer structure of inhomogeneous thickness. The numerical simulation of the dynamics of a three-layer conical shell with discrete-symmetric lightweight filler is performed using the finite element method. Numerical results of solving the specific problems are given, and some new mechanical effects are revealed.

Keywords: *three-layer conical shell, discrete-symmetric lightweight filler, non-stationary loading, new mechanical effects.*