

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.043>

УДК 538.931+538.935

Л.М. Христофоров

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ

E-mail: lchrist@bitp.kiev.ua

Випадкове блукання з поверненням в одновимірному ланцюжку

Представлено академіком НАН України А.Г. Загороднім

Якщо класичну модель випадкового блукання доповнити стохастичним поверненням у початкову точку, то весь процес набуває нових нетривіальних рис. Зокрема, з'являється нерівноважний стаціонарний стан, а середній час першого досягнення цілі (нескінченний у відсутності повторних стартів) стає скінченним і може бути оптимізований належним вибором середньої частоти переривання r . Показано, що у випадку блукання вузлами одновимірного ланцюжка ці ефекти мають суттєві відмінності від своїх аналогів у класичній континуальній дифузійній моделі. Зокрема, асимптотика залежностей стаціонарних населеностей вузлів від r змінюється з експоненційного спадання на степеневе. Подібні якісні й кількісні відмінності мають місце й для середнього часу першого досягнення. У випадку скінченного ланцюжка додається цікавий ефект виникнення й зникнення можливості мінімізації цього часу в залежності від відстані до визначеної цілі.

Ключові слова: *низьковимірні ґратки, випадкове блукання, стохастичне повернення, час першого досягнення.*

Процеси зі стохастичним поверненням (stochastic resetting) є досить розповсюдженим явищем. У багатьох випадках, змарнувавши якийсь час на безуспішне досягнення певної цілі, вважають розумним повернутися в початковий стан з надією, що наступна спроба виявиться більш вдалою. Цікаво, що така поведінка не є прерогативою якогось інтелекту, оскільки її аналоги зустрічаються у функціонуванні навіть окремих молекул, зокрема ензимів [1, 2]. Природне питання, яке при цьому виникає, є таким: коли саме доцільно переривати невдалу спробу й починати нову? Точніше, чи існує — звісно, для певної більш-менш конкретизованої системи/моделі — оптимальна (середня) частота стохастичного переривання, що прискорить досягнення цілі?

Формалізація подібних задач на найпростіших моделях почалася зовсім нещодавно. Так, в роботі [3], що вже стала класичною, було розглянуто одновимірний дифузійний рух частинки з раптовим стохастичним поверненням у початкову точку. Було показано, що, по-перше, існує нестандартний стаціонарний розподіл ймовірностей положень частинки. По-друге, що цікавіше, виникає нетривіальна залежність середнього часу першого досяг-

Цитування: Христофоров Л.М. Випадкове блукання з поверненням в одновимірному ланцюжку. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 8. С. 43–50. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.043>

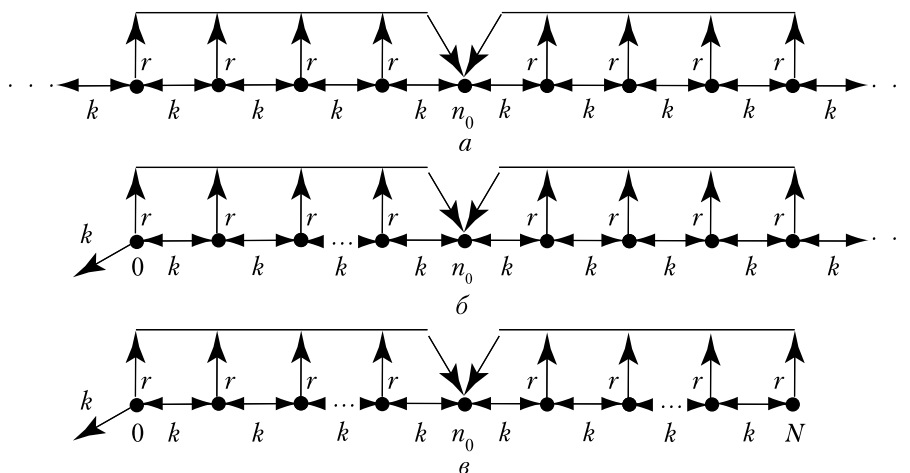


Рис. 1. Випадкове блукання з поверненням у нескінченному ланцюжку (а); напівобмеженому ланцюжку з виотком (б) та скінченному ланцюжку з виотком (в)

нення (mean first passage time, MFPT) визначеної цілі — скажімо, точки $x = 0$ за умови стар-ту з точки $x = x_0$ — від середньої частоти r стохастичних повернень. А саме, цей час, нескінченний при $r = 0$, стає скінченним і навіть має мінімальне значення при певному $r = r^*$. З огляду, зокрема, на те, що розподіли часів здійснення стадій ензиматичних реакцій, починаючи з наріжної роботи [4], тепер прямо отримуються на поодиноких ензимах, цей результат привернув значну увагу й супроводжувався різноманітними узагальненнями на ускладнених моделях (з кількома частинками, збільшенням розмірності простору тощо, див., наприклад, [3, 5, 6]). Проте ці розгляди стосувалися здебільшого континуальних моделей, тоді як, наприклад, реакційні стани ензимів (проміжні фермент-субстратні комплекси) зазвичай складають дискретний набір. Взагалі, з дискретними ланцюжками можна пов'язати безліч міграційних і пошукових процесів. Тому в цій роботі систематично розглянуто процес переривчастого випадкового блукання вузлами одновимірного ланцюжка¹ з акцентом на відмінностях результатів від таких у континуальній моделі [3], особливо щодо MFPT.

Нескінченний ланцюжок з поверненням. Отже, додамо до класичного випадкового блукання процес стохастичного повернення з будь-якого вузла в початковий вузол n_0 з середньою частотою («константою швидкості») r , див. схему на рис. 1, а.

Цій схемі відповідає рівняння еволюції ймовірності $\rho_n(t)$ перебування на вузлі n :

$$d\rho_n / dt = k(\rho_{n-1} - 2\rho_n + \rho_{n+1}) - r\rho_n + \delta_{n_0 n} r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m, \quad \rho_n(0) = \delta_{n_0 n}, \quad (1)$$

де k — константа швидкості стрибків у сусідній вузол (прямий аналог коефіцієнта дифузії в континуальних моделях). Оскільки система поки що залишається замкненою, сума в останньому члені рівняння (1) є насправді одиницею. Проте в наступних розділах вона вже не буде такою, тому залишена тут з методичних причин. Після заміни $\tau = 2kt$ та $\rho_n(\tau) = e^{-\tau} \varphi_n(\tau)$ рівняння (1) набуває вигляду (2):

¹ що може бути і (напів)обмеженим

$$\frac{d\varphi_n}{d\tau} = \frac{1}{2}(\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1}) - \frac{a^2}{2}\varphi_n + \delta_{n_0 n} \frac{a^2}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m, \quad \varphi_n(0) = \delta_{n_0 n}, \quad (2)$$

де $a^2 \equiv r/k$. Типовим засобом розв'язання подібних рівнянь є введення твірної функції $\Phi(z, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \varphi_m(\tau)$ так що $\Phi(z, 0) = z^{n_0}$, а $\varphi_n(\tau) = (2\pi i)^{-1} \oint \Phi(z, \tau) z^{-n-1} dz$, де контур охоплює точку $z=0$. Тоді (2) переходить у (3):

$$\frac{\partial \Phi(z, \tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} - a^2 \right) \Phi(z, \tau) = \frac{a^2}{2} z^{n_0} \Phi(1, \tau). \quad (3)$$

Розв'язком (3) без правої частини є

$$\Phi_0(z, \tau) = z^{n_0} e^{-\frac{a^2}{2}\tau} e^{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\tau} = z^{n_0} e^{-\frac{a^2}{2}\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m I_m(\tau),$$

де $I_m(\tau)$ – модифікована функція Бесселя. Тоді, як можна перевірити безпосереднім диференціюванням,

$$\Phi(z, \tau) = z^{n_0} e^{-\frac{a^2}{2}\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \left[I_m(\tau) + \frac{a^2}{2} \int_0^{\tau} e^{-\frac{a^2}{2}\theta} I_m(\tau-\theta) \Phi(1, \theta) d\theta \right]. \quad (4)$$

Лаплас-перетворення $\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$ зводить (4) до (5):

$$\tilde{\Phi}(z, s) = z^{n_0} \left[1 + \frac{a^2}{2} \tilde{\Phi}(1, s) \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \tilde{I}_m \left(s + \frac{a^2}{2} \right), \quad (5)$$

де $\tilde{I}_m(p) = \tilde{I}_{-m}(p) = \left(p - \sqrt{p^2 - 1} \right)^{|m|} / \sqrt{p^2 - 1}$ [7]. Підставляючи $z=1$ у (5), знаходимо, що $\tilde{\Phi}(1, s) = I(s) / [1 - (a^2/2)I(s)]$, де

$$I(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{I}_m \left(s + \frac{a^2}{2} \right) = \left(s + \frac{a^2}{2} - 1 \right)^{-1}. \quad (6)$$

У даному випадку з (6) випливає, що $\tilde{\Phi}(1, s)$ є просто $1/(s-1)$ внаслідок збереження суми $\Phi(1, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) = 1$. Тоді контурним інтегруванням рівняння (5) знаходимо розв'язок рівняння (1) в лаплас-образах $\tilde{\rho}_n^{(n_0)}(s) = \tilde{\varphi}_n^{(n_0)}(s+1)$ (верхній індекс позначає початкову умову):

$$\tilde{\rho}_n^{(n_0)}(s) = \left(1 + \frac{a^2}{2s} \right) \tilde{I}_{n-n_0} \left(s + \frac{a^2}{2} + 1 \right), \quad (7)$$

що відповідає еволюції

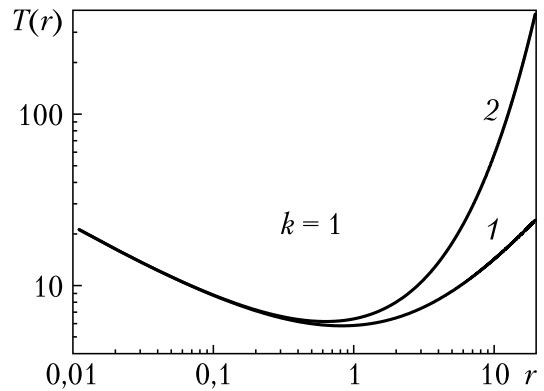
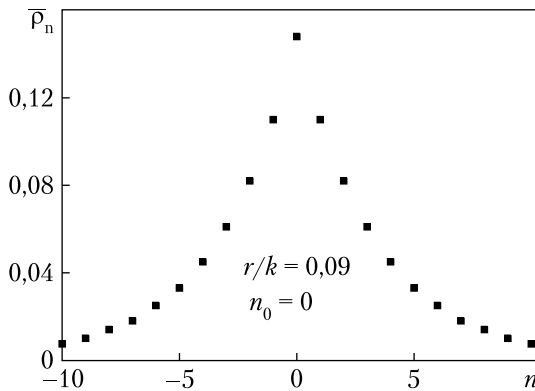


Рис. 2. Приклад стаціонарного розподілу в нескінченному ланцюжку з поверненням

Рис. 3. Залежність часу першого досягнення від середньої частоти повернення у дискретній ($T(n_0 = 1, r)$ – крива 1 та континуальній ($T(x = 2, r)$ – крива 2) моделях

$$\rho_n^{(n_0)}(\tau) = e^{-\left(1+\frac{a^2}{2}\right)\tau} I_{n-n_0}(\tau) + \frac{a^2}{2} \int_0^\tau e^{-\left(1+\frac{a^2}{2}\right)\theta} I_{n-n_0}(\theta) d\theta. \quad (8)$$

Стаціонарний розподіл $\bar{\rho}_n^{(n_0)} = \rho_n^{(n_0)}(\tau \rightarrow \infty)$ можна отримати як з (8), так і з (7), оскільки $\bar{\rho}_n^{(n_0)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{\rho}_n^{(n_0)}(s)$. Він є таким:

$$\bar{\rho}_n^{(n_0)} = \frac{a \left(\frac{a^2}{2} + 1 + a \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right)^{-|n-n_0|}}{\sqrt{4+a^2}} = \frac{\left(\frac{r}{2k} + 1 + \sqrt{\frac{r}{k} + \frac{r^2}{4k^2}} \right)^{-|n-n_0|}}{\sqrt{1 + \frac{4k}{r}}}, \quad (9)$$

див. рис. 2. Для малих $a \ll 1$ (9) зводиться до $(a/2) \exp(-a|n-n_0|)$, що аналогічно результату роботи [3] для континуальної моделі з початком в точці x_0 , якщо замість k поставити коефіцієнт дифузії D . Проте асимптотика $a \gg 1$ є степеневою, $\bar{\rho}_n^{(n_0)}(a \gg 1) = (r/k)^{-|n-n_0|}$, що істотно відрізняється від експоненційного спадання зі збільшенням r у континуальній моделі.

Середній час першого досягнення (MFPT). Під цим розуміють середній час, за який мігруючий об’єкт, стартувавши з певного вузла ланцюжка, вперше досягне іншого вузла, визначеного як “ціль”. Його континуальний аналог $T(x_0, r)$ (з ціллю в $x = 0$) розраховано в [3] за допомогою рівняння оберненої еволюції. У відсутності стохастичного повернення, як добре відомо, він є нескінченним за будь-яких, навіть дуже малих x_0 .

Для розрахунку цієї величини у вузельній схемі рис. 1 ми використаємо інший підхід, більш прийнятний, зокрема, в аналізі реакцій поодиноких молекул [2, 4, 8]. Розподіл $f(t)$ часів першого досягнення, скажімо, вузла $n = -1$ є просто $f(t) = k \rho_0^{(n_0)}(t)$, де $\rho_0^{(n_0)}(t)$ відповідає схемі для напівобмеженого ланцюжка з $n = 0, 1, 2, \dots$ за наявності витоку k на вузлі $n = 0$ (див. рис. 1, б). Рівняння еволюції при цьому зберігає вигляд (1), але за умови $\rho_n = 0$ для всіх $n < 0$. Звісно, тепер сума $\sum_m \rho_m(t)$ вже не дорівнює одиниці. Важливо, що для

обчислення МФРТ $T(x_0, r)$ не обов'язково знати явний розв'язок $\rho_0^{(n_0)}(t)$ (що стає набагато складнішим, ніж (8)), оскільки

$$T(n_0, r) = \int_0^\infty t f(t) dt = k \int_0^\infty t \rho_0^{(n_0)}(t) dt = -(1/4k) (d\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s)/ds)_{s=0},$$

а лаплас-образ $\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s)$ отримується за такою ж процедурою, що й у попередньому розділі, з тією лише різницею, що тепер твірна функція будується як $\Phi(z, \tau) = \sum_{m=0}^\infty z^m \varphi_m(\tau)$. Це зрештою дає:

$$\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s) = \frac{2\left(s + \frac{a^2}{2}\right) \tilde{I}_{n_0}\left(s + \frac{a^2}{2} + 1\right)}{2s + s \tilde{I}_1\left(s + \frac{a^2}{2} + 1\right) + \frac{a^2}{2} \tilde{I}_{n_0}\left(s + \frac{a^2}{2} + 1\right)}. \quad (10)$$

Беручи похідну по S від виразу (10) в точці $s=0$, отримуємо:

$$T(n_0, r) = \frac{1}{ka^2} \left[\left(\frac{a^2}{2} + 1 + a \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right)^{(n_0+1)} - 1 \right] = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{2k} + 1 + \sqrt{\frac{r}{k} + \frac{r^2}{4k^2}} \right)^{(n_0+1)} - 1 \right]. \quad (11)$$

Спробуємо тепер порівняти (11) з результатом у континуальній моделі, $T(x_0, r) = \frac{1}{r} (e^{x_0 \sqrt{r/D}} - 1)$ [3], замінюючи D на k , а x_0 — на $n_0 + 1$ (відстань до цілі). У випадку $n_0 = 0$ (старт із сусіднього з ціллю вузла) маємо такі асимптотики. Якщо $r \rightarrow 0$ (відсутність переривання), тоді $T(n_0, r)$ і $T(x_0, r)$ однаково прямують до нескінченності як $\sim (kr)^{-1/2}$. Але в іншій границі, $r \rightarrow \infty$, результати радикально відрізняються: $T(x_0, r)$ знов прямує до нескінченності, до того ж експоненційно, тоді як $T(n_0, r)$ — до очевидного значення $1/k$ (випадок, що насправді не охоплюється континуальним розглядом). Для $n_0 \geq 1$ вже з'являється оптимальна частота переривання r^* , за якої $T(n_0, r)$ має мінімум, оскільки тепер теж стає нескінченним в обох границях, $r \rightarrow 0$ та $r \rightarrow \infty$ (див. рис. 3), але асимптотики $r \rightarrow \infty$ суттєво різняться: якщо $T(x_0, r)$ зростає експоненційно, то $T(n_0, r)$ — степенево, $\sim r^{n_0}$.

Скінченний ланцюжок. Цьому варіанту відповідає схема рис. 1, в. Для розрахунку середнього часу першого досягнення мішені тут (на відміну від міграції квантової частинки [9]) не має значення, чи обмежений ланцюжок з лівого боку, чи ні — важливо лише те, що $0 \leq n_0 \leq N$, де N — кінцевий вузол праворуч. Отже, фактично розв'язується задача для обмеженого ($0 \leq n \leq N$) ланцюжка з витоком на вузлі $n=0$, тобто рівняння

$$d\rho_n/dt = k(\rho_{n-1} - 2\rho_n + \rho_{n+1}) + k\rho_N \delta_{Nn} - r\rho_n + \delta_{n_0 n} r \sum_{m=0}^N \rho_m, \quad (12)$$

з граничними умовами $\rho_{-1} = \rho_{N+1} = 0$ та початковою умовою $\rho_n(0) = \delta_{n_0 n}$, $0 \leq n_0 \leq N$. Далі застосовуємо до (12) ту ж саму процедуру, що й у попередніх розділах, будуючи твірну функцію у вигляді скінченної суми $\Phi(z, \tau) = \sum_{m=0}^N z^m \varphi_m(\tau)$. У підсумку це приводить до такого виразу для $\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s)$:

$$\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s) = \left(s + \frac{a^2}{2} \right) \times \frac{\tilde{I}_{n_0} \left[1 + \frac{1}{2}(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_0) \right] - \frac{1}{2} \tilde{I}_{N-n_0} (\tilde{I}_{N+1} - \tilde{I}_N)}{\left[s \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{I}_1 \right) + \frac{a^2}{4} \tilde{I}_{n_0} \right] \left[1 + \frac{1}{2}(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_0) \right] - \frac{1}{4} (\tilde{I}_{N+1} - \tilde{I}_N) \left(s \tilde{I}_{N+1} + \frac{a^2}{2} \tilde{I}_{N-n_0} \right)}, \quad (13)$$

де всі лаплас-образи \tilde{I}_l беруться в точці $(s+1+a^2/2)$. Цікаво зупинитися на окремому випадку відсутності переривання, $r=0$, оскільки внаслідок скінченності ланцюжка $T(n_0, N)$ стає скінченим і має досить простий явний вигляд:

$$T(n_0, N)_{r=0} = \frac{1}{2k} (2 + n_0 - n_0^2 + 2n_0N + 2N) \quad (14)$$

зростаючи від $(N+1)/k$ при $n_0=0$ до $(N+1)(N+2)/2k$ при $n_0=N$. Якщо ж $r \neq 0$, то диференціювання по s формули (13) призводить до занадто громіздкого виразу навіть за невеликих N , який навряд чи вартий аналітичних зусиль. Натомість краще розраховувати $T(n_0, N, r)$ на основі (13) чисельно, що не викликає жодних проблем для стандартних математичних програм. Приклад розрахованих $T(n_0, N, r)$ для $N=5$ подано на рис. 4, і він висвітлює цікаве розмаїття сценаріїв в залежності від місця старту n_0 .

Так, для $n_0=0$ маємо монотонне зменшення $T(n_0, N, r)$ до $1/k$ в границі $r \rightarrow \infty$. Для $n_0=1$ вже з'являється оптимальна середня частота повернення (мінімум $T(n_0, N, r)$ за деякої частоти r^*). Ця можливість зберігається і для $n_0=2$, а ось для $n_0=3$ ресетінг вже тільки погіршує $T(n_0, N, r)$, монотонно збільшуючи його до нескінченності у границі $r \rightarrow \infty$. При збільшенні N результати досить швидко переходять у такі попереднього розділу (формула (11)).

Висновки. Підсумуємо ті нові риси (у порівнянні з такими континуальної моделі [3]), які з'являються у випадкового блукання з поверненням вузлами одновимірного ланцюжка. Вже стаціонарний розподіл заселеностей вузлів (9) має істотно відмінний закон спадання зі збільшенням частоти стохастичних повернень r (степеневий замість отриманого в [3] експоненційного). Ще яскравіші відмінності виникають у співставленні результатів щодо середніх часів першого досягнення цілі, $T(n_0, r)$ та $T(x_0, r)$.

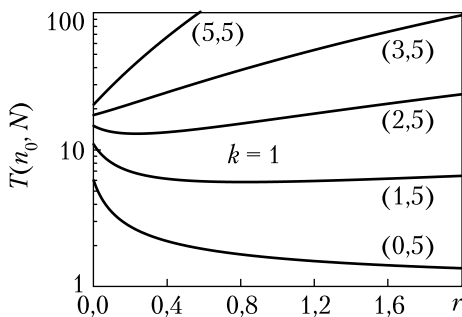


Рис. 4. Якісні зміни залежності $T(n_0, N, r)$ від r для різних стартових позицій n_0 у скінченному ланцюжку ($N=5$)

Наведений тут вираз (11) є точним для будь-якого розташування цілі, навіть на сусідньому вузлі, тоді як спроба отримати відповідний аналог з формули для $T(x_0, r)$ в цьому випадку призводить до хибних висновків. Для $n_0 \geq 1$ певна аналогія результатів (існування оптимальної частоти повернень) зберігається, але відмінності на кількісному (див. рис. 3) і навіть на якісному рівні (степеневе збільшення r^{n_0} замість експоненційного) залишаються суттєвими. Нарешті, розгляд випадку скінченного ланцюжка виявив цікавий ефект виникнення й зникнення оптимального ре-

жиму переривання в залежності від відстані до цілі. Отже, розгляд дискретного аналога нарізної континуальної моделі дійсно додає низку важливих рис щодо стохастичних процесів з поверненням та їхніх можливих застосувань.

Робота виконана за конкурсною темою 0120U100858 НАН України.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Reuveni S., Urbakh M., Klafter J. Role of substrate unbinding in Michaelis-Menten enzymatic reactions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2014. **111**. P. 4391–4396. <https://doi.org/10.1073/pnas.1318122111>
2. Христофоров Л.М. Вплив від'єднання субстрату на кінетику ферментативного каталізу. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 1. С. 40–46. <http://doi.org/10.15407/dopovidi2019.01.040>
3. Evans M.R., Majumdar S.N. Diffusion with stochastic resetting. *Phys. Rev. Lett.* 2011. **106**. P. 160601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.160601>
4. Lu H.P., Xun L., Xie X.S. Single-molecule enzymatic dynamics. *Science*. 1998. **282**. P. 1877–1882. <https://doi.org/10.1126/science.282.5395.1877>
5. Reuveni S. Optimal stochastic restart renders fluctuations in first passage times universal. *Phys. Rev. Lett.* 2016. **116**. P. 170601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.170601>
6. Majumdar S.N., Pal A., Schehr G. Extreme value statistics of correlated random variables: A pedagogical review. *Phys. Reports*. 2020. **840**. P. 1–32. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.10.005>
7. Bateman H. Tables of integral transforms. V. 1. P. 182. New York: McGraw-Hill, 1954.
8. Christophorov L.N. On the velocity of enzymatic reactions in Michaelis–Menten-like schemes (ensemble and single-molecule versions). *Ukr. J. Phys.* 2020. **65**. P. 412–418. <https://doi.org/10.15407/ujpe65.5.412>
9. Christophorov L.N., Zagorodny A. G. Peculiarities of migration and capture of a quantum particle in a chain with traps. *Chem. Phys. Lett.* 2017. **682**. P. 77–81. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cplett.2017.06.010>

Надійшло до редакції 01.06.2020

REFERENCES

1. Reuveni, S., Urbakh, M. & Klafter J. (2014). Role of substrate unbinding in Michaelis-Menten enzymatic reactions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 111, pp. 4391-4396. <https://doi.org/10.1073/pnas.1318122111>
2. Christophorov, L. N. (2019). Influence of substrate unbinding on kinetics of enzymatic catalysis. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 1, pp. 40-46 (in Ukrainian). <http://doi.org/10.15407/dopovidi2019.01.040>
3. Evans, M. R. & Majumdar, S. N. (2011). Diffusion with stochastic resetting. *Phys. Rev. Lett.*, 106, pp. 160-601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.160601>
4. Lu, H. P., Xun, L. & Xie, X. S. (1998). Single-molecule enzymatic dynamics. *Science*, 282, pp. 1877-1882. <https://doi.org/10.1126/science.282.5395.1877>
5. Reuveni, S. (2016). Optimal stochastic restart renders fluctuations in first passage times universal. *Phys. Rev. Lett.*, 116, pp. 170601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.170601>
6. Majumdar, S. N., Pal, A. & Schehr, G. (2020). Extreme value statistics of correlated random variables: A pedagogical review. *Phys. Reports*, 840, pp. 1-32. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.10.005>
7. Bateman, H. (1954). Tables of integral transforms. V. 1, p. 182. New York: McGraw-Hill.
8. Christophorov, L. N. (2020). On the velocity of enzymatic reactions in Michaelis-Menten-like schemes (ensemble and single-molecule versions). *Ukr. J. Phys.*, 65, pp. 412-418. <https://doi.org/10.15407/ujpe65.5.412>
9. Christophorov, L. N., Zagorodny, A. G. (2017). Peculiarities of migration and capture of a quantum particle in a chain with traps. *Chem. Phys. Lett.*, 682, pp. 77-81. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cplett.2017.06.010>

Received 01.06.2020

L.N. Christophorov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: lchrist@bitp.kiev.ua

RANDOM WALK WITH RESETTING IN A 1D CHAIN

If the classical model of random walks is added with the stochastic resetting to the starting point, then the whole process acquires new nontrivial features. In particular, there appears a non-equilibrium steady state. In addition, the mean first passage time (which is infinite in the absence of restarts) becomes finite and can be optimized by choosing a proper mean intermittence frequency r . It is shown that, in the case of random walks on the nodes of a one-dimensional chain, these effects essentially differ from their analogs within the classical continuous diffusion model. In particular, the asymptotes of the dependences of stationary node populations on r change from exponential to power ones. Similar qualitative and quantitative distinctions take place for the mean first passage time as well. In the case of a finite chain, the interesting effect of emergence and disappearance of a possibility of the minimization of this time, depending on the distance to a defined target, shows up.

Keywords: *low-dimensional lattices, random walk, stochastic resetting, first passage time.*