ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.003
УДК 517.587

В.Л. Макаров, академік НАН України

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: makarov@imath.kiev.ua

Узагальнені поліноми Ерміта, їх властивості та диференціальне рівняння, яке вони задовольняють

Узагальнення класичних ортогональних поліномів, які б задовольняли лінійні диференціальні рівняння вищих порядків спеціальної структури, вивчали багато математиків (A. Krall, J. Koekoek, R. Koekoek, H. Bavinck, L. Littlejohn та ін.). При цьому суттєві вимоги були такими: коефіцієнти біля похідних повинні бути поліномами певного степеня від незалежної змінної та не залежати від степеня поліномів, що задовольняють ці диференціальні рівняння. Вказані узагальнення в працях згаданих авторів були зроблені для всіх класичних ортогональних поліномів, окрім поліномів Ерміта. Дана робота присвячена узагальненню класичних поліномів Ерміта в описаному вище сенсі. Побудовано диференціальний оператор нескінченного порядку, власними функціями якого є саме ці поліноми. Досліджено ряд властивостей узагальнених поліномів Ерміта, що притаманні класичним ортогональним поліномам (ортогональність, узагальнена формула Родріга, тричленне рекурентне співвідношення, твірна функція).

Ключові слова: *ортогональність, узагальнена формула Родріга, тричленне рекурентне співвідношення, твірна функція, диференціальний оператор нескінченного порядку.*

Узагальнені класичні ортогональні поліноми, що задовольняють звичайні диференціальні рівняння вищих порядків вигляду

$$\sum_{i=0}^{2k} a_i(x)y^{(i)}(x) - \lambda_n y(x) = 0, \quad a_i(x) = \sum_{p=0}^{i} a_{ip}x^p, \quad k \in \{2, 3, \dots, \infty\},$$

$$\lambda_n = \sum_{p=0}^{2k} a_{pp} \frac{n!}{(n-p)!},$$

досліджувалися в багатьох роботах, серед яких [1—4]. У цих та інших відомих нам публікаціях розглядалися узагальнення всіх класичних ортогональних поліномів, окрім узагальнених поліномів Ерміта. Дана робота якраз присвячена заповненню цієї прогалини.

Цитування: Макаров В.Л. Узагальнені поліноми Ерміта, їх властивості та диференціальне рівняння, яке вони задовольняють. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 9. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.003

Узагальненими поліномами Ерміта парного степеня з використанням тут і в подальшому позначень із [1] будемо називати поліноми вигляду

$$H_{2n}^{M}(x)=L_n^{-1/2,\,M,\,0}(x^2)=\left[1+2M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!}\right]L_n^{-1/2}(x^2)-M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,n!}L_{n-1}^{1/2}(x^2), \tag{1}$$

де $L_n^{\alpha}(x)$ — поліноми Лагерра. Поліноми (1) є наслідком поліномів Соболєва—Лагерра $L_n^{\alpha,\,M,\,N}(x)$, введених і досліджених у роботі [1].

Ортогональність. Скористаємося формулами (2), (3) з роботи [5, с. 193]. Тоді формула (1) набуде вигляду

$$H_{2n}^{M}(x)=\left[1+2M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!}\right](-1)^n\frac{2^{-2n}}{n!}H_{2n}(x)+M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,n!}(-1)^n\frac{2^{-2n+1}}{x\,(n-1)!}H_{2n-1}(x). \tag{2}$$

Зауважимо, що для $M=0$ поліноми (2) з точністю до мультиплікативної сталої збігаються з поліномами Ерміта $H_{2n}(x)$, що й обумовлює їх назву. Якщо ввести диференціальний оператор

$$\mathfrak{A}=\frac{2^{-2n}}{n!}\left\{\left[1+2M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!}\right]+M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,n!}\frac{d}{xdx}\right\},$$

то для поліномів (2) одержуємо узагальнену формулу Родріга

$$H_{2n}^{M}(x)=\mathfrak{A}\left(\mathrm{e}^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

Поліноми (1) утворюють ортогональну систему (див. [1])

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}H_{2n}^{M}(x)H_{2m}^{M}(x)dx+MH_{2n}^{M}(0)H_{2m}^{M}(0)=\delta_{n,m}h_{2n}^{M},$$

де $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера,

$$h_{2n}^{M}=\left[1+2M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(n-1)!}\right]^2\frac{2^{-2n}}{(n!)^2}(2n)!+$$

$$+\left[M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}n!}(-1)^n\frac{2^{-2n+1}}{(n-1)!}\right]^2 J_{2n-1}+M\left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}n!}\right]^2, \tag{3}$$

$$J_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\left[\frac{1}{x}H_{2n-1}(x)\right]^2 dx.$$

Для обчислення останнього інтеграла скористаємося рекурентним співвідношенням для поліномів Ерміта. У результаті після нескладних обчислень отримаємо

$$\sqrt{\pi}J_{2n-1}=4h_{2n-2}+16(n-1)^2 J_{2n-3}=$$

$$=4h_{2n-2}+4\cdot 16(n-1)^2 h_{2n-4}+16^{\,2}(n-1)^2(n-2)^2 J_{2n-5}=$$

$$=\ldots=4\sum_{p=0}^{n-1}16^p\left(\frac{(n-1)!}{(n-p-1)!}\right)^2 h_{2(n-p-1)}=\sqrt{\pi}\,2^{2n}\,(2n-1)!,$$

$$h_n=\sqrt{\pi}\,2^n\,n!,$$

і формула (3) набуде вигляду

$$h_{2n}^M=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}n!}\left[1+2M\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(n-1)!}\right]\left[1+2M\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}n!}\right],$$

що збігається з формулою (4.4) з [2] для $\alpha=-\frac{1}{2}$.

Рекурентне співвідношення. Відомо (див. [5], с. 161, формули (7), (8)), що якщо поліноми

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}k_{n,\,i}x^{n-i} \tag{4}$$

утворюють ортогональну систему, то вони задовольняють тричленне рекурентне співвідношення

$$\begin{gathered}P_{n+1}(x)=(A_n x+B_n)P_n(x)-C_nP_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots,\\ A_n=\frac{k_{n+1,\,n+1}}{k_{n,\,n}},\quad B_n=A_n\left(\frac{k_{n+1,\,n}}{k_{n+1,\,n+1}}-\frac{k_{n,\,n-1}}{k_{n,\,n}}\right),\\ C_n=\frac{1}{k_{n-1,\,n-1}}(A_nk_{n,\,n-2}+B_nk_{n,\,n-1}-k_{n+1,\,n-1}).\end{gathered} \tag{5}$$

Варто зазначити, що наведена формула для C_n у (5) відрізняється від відповідної формули у (8) з роботи [5, с. 161] та є більш зручною для випадку, коли відомо тільки значення коефіцієнтів ортогональних поліномів. Крім того, формули (5) дають підстави сформулювати таке твердження.

Теорема. *Нехай задано дві послідовності* $\{k_{n,\,n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{k_{n,\,n-2}\}_{n=2}^{\infty}$ *такі, що*

$$A_n>0,\quad \frac{k_{n+1,\,n-1}}{k_{n+1,\,n+1}}-\frac{k_{n,\,n-2}}{k_{n,\,n}}<0,\quad k=1,2,\ldots,\quad k_{1,\,-1}=0.$$

Тоді поліноми (4)*, які містять лише парні або лише непарні степені* x*, будуть утворювати ортогональну систему тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти визначаються за формулами*

$$k_{n+1,\,n-2m-1}=\prod_{p=2m+2}^{n}A_p k_{2m+2,\,0}-\sum_{p=0}^{n-2m-2}C_{n-p}\frac{\prod\limits_{k=2m+2}^{n}A_k}{\prod\limits_{k=2m+2}^{n-p}A_k}k_{2m+1,\,1},\quad m=1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Наведемо ще одну корисну формулу для обчислення квадрата норм ортогональних поліномів, про які йде мова в теоремі:

$$h_n=\|P_n\|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[P_n(x)]^2(x)\,d\alpha(x)=\prod_{p=0}^{n-1}\frac{C_{p+1}A_p}{A_{p+1}}h_0.$$

Зауважимо, що умови теореми будуть виконуватись, якщо члени послідовності $\{k_{n,\,n}\}_{n=1}^{\infty}$ додатні, члени послідовності $\{k_{n,\,n-2}\}_{n=2}^{\infty}$ від'ємні, а послідовність $\left\{-\dfrac{k_{n,\,n-2}}{k_{n,\,n}}\right\}_{n=2}^{\infty}$ є монотонно зростаючою.

Для поліномів $L_n^{-1/2,\,M,\,0}(x)$ матимемо

$$k_{n,\,n}=\frac{(-1)^n}{n!}\left[1+\frac{2M\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!}\right],\quad k_{n,\,n-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[n-\frac{1}{2}+\frac{M\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,n!}(2n^2-n-1)\right],$$
$$k_{n,\,n-2}=\frac{(-1)^n}{(n-2)!}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{2}\left(n-\frac{3}{2}\right)\left[1+\frac{2M\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!}\right]-\frac{M\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,n!}\right\}. \tag{6}$$

Далі підставляємо (6) у (5), замінюємо x на x^2 і в такий спосіб отримуємо рекурентне співвідношення для узагальнених поліномів Ерміта. Зазначимо, що п'ятичленне рекурентне співвідношення для поліномів Соболєва—Лагерра, яке ґрунтується на розкладі $x^2L_n^{-1/2,\,M,\,0}(x)$ у лінійну комбінацію поліномів $L_{n\pm1}^{-1/2,\,M,\,0}(x)$, $L_{n\pm2}^{-1/2,\,M,\,0}(x)$, було одержано в роботі [2]. Останнє, шляхом заміни x на x^2, перетворюється на п'ятичленне рекурентне співвідношення для узагальнених поліномів Ерміта, яке через його громіздкість, ми тут не наводимо.

Користуючись результатами загальної теорії ортогональних поліномів, із (5), (6) легко одержати формулу Кристоффеля—Дарбу (див. [5], с. 162, формула (10)), яку через її громіздкий вигляд ми також тут наводити не будемо.

Диференціальне рівняння. Запишемо спочатку диференціальне рівняння для узагальнених поліномів Лагерра $L_n^{-1/2,\,M,\,0}(x)$, яке є уточненням формул (4), (5) з роботи [1] у випадку $\alpha=-\dfrac{1}{2},\ N=0$. Маємо

$$M\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x)y^{(i)}(x)+xy''(x)+\left(\frac{1}{2}-x\right)y'(x)+ny(x)=0,\quad x\in(0,\infty) \tag{7}$$

$$a_i(x)=\frac{1}{i!}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i+j+1}\frac{\left(\frac{5}{2}-j\right)_{j-1}}{(j-1)!}\frac{\left(\frac{2j+5}{2}-i\right)_{i-j}}{(i-j)!}\left(\frac{5}{2}\right)_{i-j}x^j,\quad j=1,\ldots,i,\quad i=1,2,\ldots,\tag{8}$$

$$a_0(x)=a_0(n,-1/2)\equiv\frac{\left(\frac{5}{2}\right)_n}{n!},\quad n=0,1,\ldots$$

Диференціальне рівняння для узагальнених поліномів Ерміта $H_{2n}^M(x)$ одержуємо шляхом підстановки в (7), (8) x^2 замість x. У результаті отримаємо

$$M\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x^2)D^iy(x)+\frac{x}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}\right)+\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\frac{1}{2x}\frac{dy(x)}{dx}+ny(x)=0,\quad x\in(0,\infty),$$

$$D^i=\left(\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^i.$$

Твірна функція. Скористаємося формулою (див. [5], с.190, формула (21))

$$n!L_n^{\alpha}(x)=e^x x^{-\frac{\alpha}{2}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha}(2\sqrt{tx})\,dt,\tag{9}$$

де $J_\alpha(z)$ — функція Бесселя першого роду порядку α. Для одержання твірної функції для узагальнених поліномів Ерміта нам буде потрібний такий наслідок із формули (9):

$$f^{(-1/2)}(z,x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!L_n^{(-1/2)}(x)\frac{z^n}{\Gamma(n+1/2)}=$$

$$=e^x x^{-\frac{1}{4}}\int_0^{\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+1/2)}t^{n-\frac{1}{4}}J_{-1/2}(2\sqrt{tx})\,dt=$$

$$=e^x x^{-\frac{1}{4}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tz)^n}{\Gamma(n+1/2)}J_{-1/2}(2\sqrt{tx})\,dt=$$

$$=e^x x^{-\frac{1}{4}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{4}}\left\{\sqrt{zt}e^{zt}(1-\operatorname{erfc}(\sqrt{zt}))+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}J_{-1/2}(2\sqrt{tx})\,dt.$$

Тут $\operatorname{erfc}(z)$ — додаткова функція похибок. Далі з (1) матимемо

$$F(z,x)=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+1/2)}H_{2n}^M(x)z^n=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+1/2)}L_n^{(-1/2)}(x^2)z^n+$$

$$+2M\sum_{n=0}^{\infty}nL_n^{(-1/2)}(x^2)z^n-M\sum_{n=0}^{\infty}L_{n-1}^{(1/2)}(x^2)z^n=\sqrt{\pi}f^{(-1/2)}(z,x^2)-\frac{2Mzx^2}{(1-z)^{5/2}}\exp\left(\frac{zx^2}{z-1}\right).$$

Підсумки. У випадку узагальнених поліномів Ерміта непарного степеня розглядається таке зображення:

$$H_{2n+1}^{M}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{1/2, M, 0}(x^2) =$$

$$= (-1)^n 2^{2n+1} n! x \left\{ \left[1 + 4M \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{3\sqrt{\pi}(n-1)!} \right] L_n^{1/2}(x^2) + M \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, n!} \frac{d}{xdx} L_n^{1/2}(x^2) \right\} =$$

$$= \left[1 + 4M \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{3\sqrt{\pi}(n-1)!} \right] H_{2n+1}(x) + M \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, n!} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} H_{2n+1}(x) \right].$$

Для цього випадку мають місце всі аналогічні результати, що й для випадку узагальнених поліномів Ерміта парного степеня, які викладені вище.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Koekoek J., Koekoek R., Bavinck H. On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials. *Trans. Am. Math. Soc.* 1998. **350**, № 1. P. 347—393.
2. Koekoek R., Meijer H.G. A generalization of Laguerre polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* 1993. **24**, Iss. 3. P. 768—782. https://doi.org/10.1137/0524047
3. Krall A.M. Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. *Pr. Roy. Soc. Edinb.* 1981. Sec. A. **87**, Iss. 3—4. P. 271—288. https://doi.org/10.1017/S0308210500015213
4. Littlejohn L.L. The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials. *Quaest. Math.* 1982. **5**. P. 255—265. https://doi.org/10.1080/16073606.1982.9632267
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 296 с.

Надійшло до редакції 13.04.2020

REFERENCES

1. Koekoek, J., Koekoek, R. & Bavinck, H. (1998). On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials. Trans. Am. Math. Soc., 350, No. 1, pp. 347-393.
2. Koekoek, R. & Meijer, H. G. (1993). A generalization of Laguerre polynomials. SIAM J. Math. Anal., 24, Iss. 3, pp. 768-782. https://doi.org/10.1137/0524047
3. Krall, A. M. (1981). Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. Pr. Roy. Soc. Edinb., Sec. A, 87, Iss. 3-4, pp. 271-288. https://doi.org/10.1017/S0308210500015213
4. Littlejohn, L. L. (1982). The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials. Quaest. Math., 5, pp. 255-265. https://doi.org/10.1080/16073606.1982.9632267
5. Bateman, H. & Erdélyi, A. (1974). Higher transcendental functions. Vol. 2. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 13.04.2020

V.L. Makarov
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: makarov@imath.kiev.ua

THE GENERALIZED HERMITE POLYNOMIALS, THEIR PROPERTIES, AND THE DIFFERENTIAL EQUATION WHICH THEY SATISFY

The generalizations of the classical orthogonal polynomials satisfying higher-order linear differential equations of a special structure were studied by a number of authors (A. Krall, J. Koekoek, R. Koekoek, H. Bavinck, L. Littlejohn, and several others). The essential requirements were the following. The coefficients of the derivatives must be polynomials of some degree of the independent variable and not dependent on the degree of the polynomials satisfying these differential equations. Such generalizations in the works of the above-mentioned authors were made for all classical orthogonal polynomials except for the Hermite polynomials. This paper deals with a generalization of the classical Hermite polynomials in the above sense. We construct a differential operator of the infinite order whose eigenfunctions are these polynomials. A number of properties of the generalized Hermite polynomials that are characteristic of classical orthogonal polynomials (orthogonality, generalized Rodrigues' formula, three-term recurrence relation, generic function) are investigated.

Keywords: *orthogonality, Rodrigues' generalized formula, three-term recurrence relation, generating function, differential operator of infinite order.*