

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.031>

УДК 539.3

О.М. Багно

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: alexbag2016@gmail.com

Про поверхневу нестійкість нестисливого пружного шару, підданого скінченним початковим деформаціям

Представлено академіком НАН України О.М. Гузем

Досліджено поширення нормальних хвиль та явище поверхневої нестійкості у попередньо деформованому нестисливому пружному шарі. Результати отримано на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для нестисливого пружного шару. Застосовано постановку задачі та підхід, що базуються на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для нестисливого пружного тіла. Використовуючи метод Фур'є, отримано задачу про власні значення для рівняння руху пружного тіла. Розв'язуючи її, визначено відповідні власні функції. Після підстановки отриманих загальних розв'язків в граничні умови задачі отримано однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримано дисперсійне рівняння, яке розв'язувалося чисельно. Побудовані дисперсійні криві нормальних хвиль Лемба в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій у нестисливому пружному шарі на фазові швидкості, дисперсію мод Лемба та поверхневу нестійкість. Визначено значення параметра критичного укорочення, при якому виникає явище поверхневої нестійкості пружного шару. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

Ключові слова: *хвилі Лемба, дисперсія мод, нестисливий пружний шар, скінченні початкові деформації, поверхнева нестійкість.*

Дослідженню закономірностей поширення пружних хвиль у попередньо напружених тілах присвячено значну кількість робіт, досить повна бібліографія яких, огляд і аналіз отриманих результатів представлені в [1–5]. Постановці задач і виводу дисперсійних рівнянь в лагранжевих координатах природного недеформованого стану, що описують хвилі Лемба в попередньо деформованих нестисливих тілах, присвячені роботи [2–5]. Однак, незважаючи на актуальність даного питання і наявне велике число публікацій, кількісній інформації про вплив скінченних початкових деформацій на швидкості та дисперсію хвиль Лемба для нестисливих тіл приділено уваги незаслужено мало. У зв'язку з цим у повідомленні наведено залежності, отримані чисельним шляхом, величини фазових швидкостей і дисперсії

Цитування: Багно О.М. Про поверхневу нестійкість нестисливого пружного шару, підданого скінченним початковим деформаціям. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 9. С. 31–37. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.031>

хвиль Лемба від початкових деформацій у випадку високоеластичного нестисливого пружного шару, підданого великим (скінченним) початковим деформаціям.

Постановка задачі. Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль в пружному нестисливому шарі, підданому великим (скінченним) початковим деформаціям. Розв'язок отримаємо із залученням тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності при скінченних деформаціях для пружного шару [2–4]. У якості підходу обрані постановки задач і метод, засновані на застосуванні представлень загальних розв'язків рівнянь руху пружного тіла [2–4].

Далі розглянемо такі динамічні процеси в пружному тілі, при яких виникають додаткові деформації, тобто збурення деформацій, які значно менші за початкові. Досліджуємо гармонічні хвильові процеси малої амплітуди. При цьому приймемо, що пружне тіло знаходиться в початковому стані.

В рамках прийнятих моделей основні співвідношення для попередньо напруженого нестисливого пружного тіла приймають такий вигляд [2–4]:

$$\left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha + \tilde{q}_{ij} \frac{\partial p}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1)$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_j \kappa_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i q_{ij}; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1; \quad \tilde{q}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (2)$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta} + \tilde{q}_{ij} p \right), \quad z_k \in S. \quad (3)$$

Введені тут тензори $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$ та \tilde{q}_{ij} залежать від виду початкового стану і типу пружного потенціалу матеріалу твердого тіла. Вирази для обчислення складових цих тензорів наведені в роботі [6]. Там же запропоновані спрощення для різних варіантів теорії малих початкових деформацій.

Вище прийняті наступні позначення: u_i – компоненти вектора зсувів пружного тіла \mathbf{u} ; ρ – щільність матеріалу пружного шару; λ_i – подовження пружного шару в напрямках координатних осей; \tilde{Q}_i – складові напружень у пружному тілі; V_1 – об'єм, який займає пружне тіло; S – поверхня пружного тіла.

Далі припустимо, що ізотропне нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі безперервно-диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, займає об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $-h/2 \leq z_2 \leq h/2$, $-\infty < z_3 < \infty$. Приймемо, що зовнішні сили, які діють на вказане тіло, розподілені рівномірно уздовж осі Oz_3 . У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині Oz_1z_2 . Таким чином, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1)–(3) за таких граничних умов:

$$\tilde{Q}_1 \Big|_{z_2=-h/2} = 0; \quad \tilde{Q}_2 \Big|_{z_2=-h/2} = 0; \quad \tilde{Q}_1 \Big|_{z_2=h/2} = 0; \quad \tilde{Q}_2 \Big|_{z_2=h/2} = 0. \quad (4)$$

Надалі будемо використовувати представлення загальних розв'язків, отриманих у роботах [2–4]. Будемо досліджувати хвильові процеси в попередньо деформованих нестис-

ливих пружних тілах, початковий стан яких є однорідним. У разі однорідного напружено-деформованого стану для плоского випадку загальні розв'язки мають вигляд [2–4]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi,$$

де введена функція χ є розв'язком такого рівняння:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2 \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi = 0; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Тут введено такі позначення: a_{ij} , μ_{ij} – величини, що визначаються з рівнянь стану і залежать від виду пружного потенціалу [2–6]; s_{ii}^0 – початкові напруження.

Для аналізу поширення збурень, які гармонічно змінюються в часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль

$$\chi = X(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)],$$

де k – хвильове число; ω – кругова частота; i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$).

Зауважимо, що обраний в даній роботі клас гармонічних хвиль, будучи найбільш простим і зручним в теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі застосовуючи метод Фур'є, приходимо до задачі про власні значення для рівняння руху пружного тіла. Розв'язуючи її, визначаємо відповідні власні функції. Після підстановки отриманих загальних розв'язків в граничні умови (4) отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| e_{lm}(c, \rho, \mu, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}), \quad (5)$$

де c – фазова швидкість мод у пружному тілі; h – товщина пружного шару; c_s – швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла ($c_s^2 = \mu/\rho$); μ – модуль зсуву матеріалу пружного тіла.

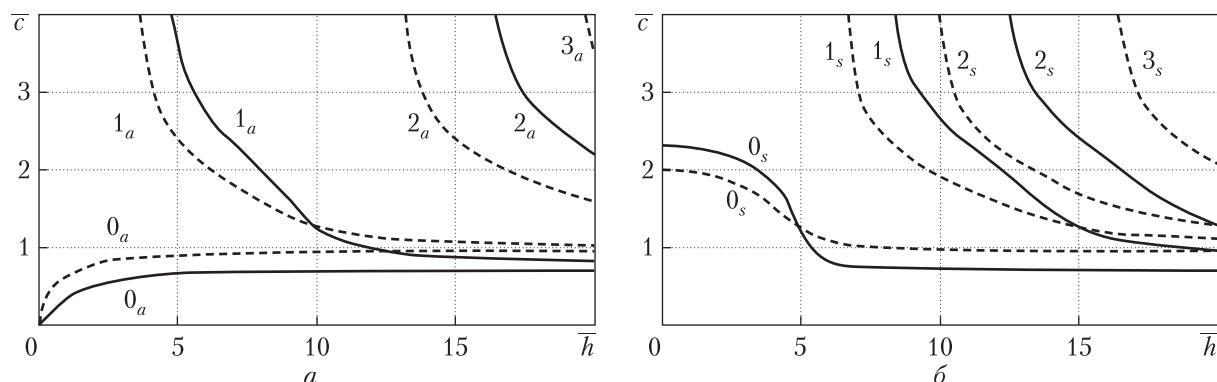


Рис. 1

Відзначимо, що дисперсійне рівняння (5) не залежить від форми пружного потенціалу та отримане для нестисливих пружних тіл, підданих великим (скінченним) початковим деформаціям. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду частинних випадків [7]. Якщо $-\infty < h \leq 0$, то зі співвідношення (5) отримаємо рівняння для визначення швидкостей хвиль Релея [1–4]. При $s_{ii}^0 = 0$ ($\lambda_1 = 1$) отримаємо рівності для ґрунтовно досліджених в рамках класичної теорії пружності хвиль Релея і Лемба [7].

Числові результати. Надалі дисперсійне рівняння (5) розв’язуємо чисельно. Розрахунки проводимо для високоеластичної гуми, пружні властивості якої описуються пружним потенціалом Трелоара при наступних механічних параметрах: $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Матеріал пружного тіла (гума) цього хвилеводу є нестисливим, податливим і м’яким. Крім того, при розв’язанні передбачалося, що початковий напружений стан задовольняв співвідношенням $s_{11}^0 \neq 0$, $s_{22}^0 = 0$. Як показано в роботі [6], при такому завантаженні немає аналогії між задачами в лінеаризованій і лінійній постановках. Тому результати для тіл з початковими напруженнями не можуть бути отримані з розв’язків відповідних лінійних задач.

Зауважимо, що рівняння (5) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми.

Далі дисперсійне рівняння (5) розв’язуємо чисельно. Результати обчислень у вигляді графіків представлені на рис. 1 та 2.

На рис. 1, а зображені дисперсійні криві, що відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей антисиметричних мод Лемба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти) \bar{h} ($\bar{h} = \omega h/c_s$). На рис. 1, б наведені аналогічні криві для симетричних мод Лемба.

На цих рисунках суцільні лінії відповідають випадку попередньо стисненого пружного шару ($\lambda_1 = 0,8$), а штрихові лінії отримані за відсутності початкових деформацій ($\lambda_1 = 1$). При цьому номерами n_a позначені антисиметричні моди, а n_s — відповідно симетричні моди.

Характер впливу попереднього деформування пружного шару на швидкості нульових антисиметричної і симетричної мод Лемба ілюструють графіки на рис. 2, де представлені залежності безрозмірних величин фазових швидкостей \bar{c} цих мод від зміни величини λ_1 . На рис. 2, а наведені результати обчислень як для попередньо стиснутих ($\lambda_1 < 1$), так і попередньо розтягнутих ($1 \leq \lambda_1 \leq 1,3$) пружних шарів. Рис. 2, б представляє значення фазових

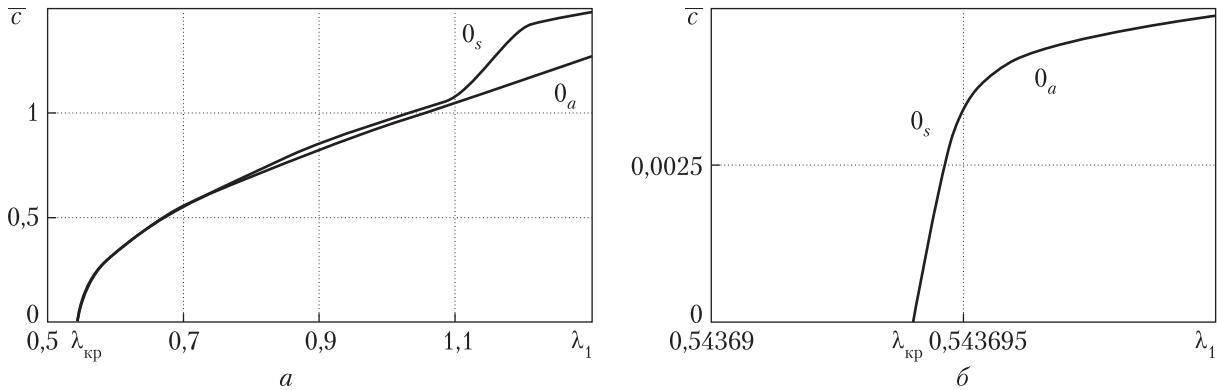


Рис. 2

швидкостей цих мод для сильно стисненого пружного шару ($0,54369 \leq \lambda_1 \leq 0,5437$). Наведені на рис. 2, а і 2, б графіки отримані для пружних шарів з товщиною $\bar{h} = 10$.

Аналіз числових результатів. З графіків, наведених на рис. 1, а та 1, б, випливає, що зі зростанням частоти (товщини пружного шару) \bar{h} швидкості нульових антисиметричних мод Лемба прямують знизу до швидкостей хвиль Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s$). При цьому $\bar{c}_R = 0,7096$ для $\lambda_1 = 0,8$ та $\bar{c}_R = 0,9553$ для $\lambda_1 = 1$, а швидкості нульових симетричних мод — до цих же швидкостей хвиль Релея \bar{c}_R зверху. Моді вищого порядку поширюються в пружних шарах з фазовими швидкостями, які прямують зі зростанням частоти ($\bar{h} \rightarrow \infty$) до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла \bar{c}_s . Відзначимо, що початкове стиснення пружного шару призводить до зменшення числа нормальних хвиль Лемба, які поширюються на даному інтервалі частот. Початкові напруження також змінюють частоти зародження мод і конфігурацію їх дисперсійних кривих. При стисненні відбувається зміщення дисперсійних кривих в короткохвильову частину спектра. У роботі [5] для пружного шару із стисливого матеріалу було вперше показано, що в пружному хвилеводі початкові напруження викликають зміну частот зародження мод Лемба і зміщення їх дисперсійних кривих. Це призводить до того, що в околі критичних частот величини фазових швидкостей мод в попередньо деформованому шарі можуть бути як менше, так і більше величин фазових швидкостей відповідних мод в тілі без початкових напружень. Цим обумовлена поява в спектрі пружного хвилеводу частот, при яких початкові напруження не впливають на величини фазових швидкостей ряду нормальних хвиль Лемба [5]. З графіків, наведених на рис. 1, а та рис. 1, б, випливає, що зазначена закономірність має місце і для пружного шару з нестисливого матеріалу. Неважко бачити, що для всіх мод, крім нульової антисиметричної, існують частоти (товщини пружного шару) \bar{h} , при яких фазові швидкості \bar{c} не залежать від початкового стиснення λ_1 . Мабуть, ця закономірність, вперше виявлена для стисливих тіл і описана в роботі [5], має загальний характер і властива частотним діапазнам пружних хвилеводів із стисливих і нестисливих матеріалів.

З графіків, наведених на рис. 2, а і 2, б, випливає, що стиснення пружного шару призводить до зменшення фазових швидкостей нульових антисиметричної і симетричної мод Лемба і відмінностей між їх величинами. Тому графіки на рис. 2, б, що відображають поведінку цих мод для сильно стисненого високоеластичного шару, зливаються в одну лінію.

Поверхнева нестійкість високоеластичного пружного шару. Як видно з графіків рис. 1, нульова антисиметрична мода Лемба при зростанні частоти (товщини пружного шару) \bar{h} , поширюючись уздовж вільної поверхні пружного шару, стає поверхневою. При цьому швидкість її прямує до величини швидкості хвилі Релея. Це повною мірою стосується також і нульової симетричної моди, яка поширюється вздовж другої вільної поверхні пружного шару. З графіків, наведених на рис. 2, б, випливає, що при стисненні і $\lambda_1 \approx 0,54$ (більш точне значення $\lambda_1 \approx 0,543694$), тобто при зменшенні довжини високоеластичного нестисливого тіла на 46 % величини фазових швидкостей нульових антисиметричної і симетричної квазі-релеєвих мод обертаються в нуль. Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану для високоеластичного нестисливого неогуківського тіла при $\lambda_1 \approx 0,54$ виникає явище поверхневої нестійкості. Відзначимо, що це значення збігається з раніше отриманим в теорії стійкості [8] і відповідає значенню параметра критичного укорочення $\lambda_{кр}$.

Таким чином, розвинена лінеаризована теорія хвиль стосовно високоеластичних нестисливих тіл дозволяє досліджувати хвильові процеси не тільки в загальному і ряді окремих випадків, але також можливість і умови виникнення явища поверхневої нестійкості пружного тіла.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. P. 277–291.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 т. Киев: Наук. думка, 1986.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: 2 части. Saarbrücken: LAP, 2016. Ч. 2. 505 с.
5. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
6. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Киев: Наук. думка, 1979. 144 с.
7. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
8. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.

Надійшло до редакції 22.01.2020

REFERENCES

1. Babich, S.Y., Guz, A.N. & Zhuk, A.P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 15, No. 4, pp. 277-291. <https://doi.org/10.1007/BF00884760>
2. Guz, A.N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. 2 vols. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
3. Guz, A.N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
4. Guz, A.N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. 2 parts. Saarbrücken: LAP (in Russian).
5. Guz, A.N., Zhuk, A.P. & Makhort, F.G. (1976). Waves in layer with initial stresses. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
6. Guz, A.N. (1979). Stability of elastic bodies under hydrostatic pressure. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
7. Viktorov, I.A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
8. Guz, A.N. (1973). Stability of elastic bodies under finite deformations. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).

Received 22.01.2020

A.M. Bagno

S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON SURFACE INSTABILITY OF INCOMPRESSIBLE ELASTIC LAYER EXPOSED TO THE FINITE INITIAL DEFORMATION

The problem of normal waves propagation in a pre-deformed incompressible elastic layer is considered. To study the propagation of Lamb waves in a elastic layer, we will use prestressed body model and the three-dimensional linearized equations of finite deformations for the elastic body. We will use a problem formulation and a method that are based on the general solutions of the linearized equations of motion of a prestressed body. Using the Fourier method, we arrive at the eigenvalue problem for the equation of motion of an elastic body. Solving it, we determine the corresponding eigenfunctions. After substituting the obtained general solutions in the boundary conditions, we obtain a homogeneous system of linear algebraic equations with respect to arbitrary constants. Based on the condition for the existence of a nontrivial solution to this system, we obtain the dispersion equation. A dispersion equation, which describes propagation of harmonic waves in elastic layer in a wide range of frequencies is obtained. On the basis of three-dimensional linearized equations of the elasticity theory of finite deformations for a incompressible elastic layer the dispersion curves of Lamb normal waves are constructed in a wide range of frequencies. The influence of finite initial deformations in an incompressible elastic layer on phase velocities, dispersion of the Lamb modes and surface instability is analyzed. It follows from the graphical material presented that in the case of compression with when shortening equal 0.54, i.e., with a 46 percent's reduction in the length of the highly elastic incompressible body, the phase velocities of the surface waves vanish. This indicates that surface instability develops at when shortening equal 0.54 for a highly elastic incompressible non-Hookean body initially in a plane stress-strain state. We should point out that these figures agree with results obtained earlier in the theory of stability and correspond to the critical value of the contraction parameter. In the case of highly elastic incompressible bodies, linearized wave theory makes it possible to study not only general and several specific wave processes, but also the conditions under which surface instability begins in elastic bodies. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

Keywords: Lamb waves, dispersion of modes, incompressible elastic layer, finite initial deformation, surface instability.