

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.01.024>

УДК 539.3

**О.М. Багно**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## Про вплив скінченних початкових деформацій на поверхневу нестійкість нестисливого пружного шару, що взаємодіє з півпростором ідеальної рідини

*Представлено академіком НАН України О.М. Гузем*

*На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини побудовані дисперсійні криві нормальних квазілембових хвиль у гідропружній системі в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій у нестисливому пружному шарі, а також півпростору ідеальної рідини на фазові швидкості, дисперсію квазілембових мод та поверхневу нестійкість гідропружного хвилеводу. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.*

**Ключові слова:** *поверхнева нестійкість, дисперсія квазілембових хвиль, нестисливий пружний шар, півпростір ідеальної стисливої рідини, скінченні початкові деформації.*

Хвилі Лемба знаходять все більш широке застосування як у фундаментальних теоретичних, так і в прикладних дослідженнях. Питанням поширення хвиль Лемба в попередньо напружених тілах присвячені роботи [1–6]. У зазначених публікаціях якісні та кількісні результати отримані, в основному, для жорстких (метали, органічне скло) стисливих матеріалів, що допускають малі початкові деформації. На відміну від стисливих нестисливі матеріали (гумоподібні, каучукоподібні матеріали) є високоеластичними, величина їх початкової деформації може бути значною. Це зумовлює певний теоретичний і прикладний інтерес дослідження впливу великих (скінченних) початкових деформацій нестисливого шару і півпростору ідеальної стисливої рідини на швидкості мод Лемба та поверхневу нестійкість гідропружного хвилеводу.

**Постановка задачі.** У даній роботі для дослідження поширення хвиль в пружному шарі, підданому великим (скінченним) початковим деформаціям, і взаємодіючому з півпростором ідеальної стисливої рідини, залучаються моделі попередньо напруженого тіла та ідеальної стисливої рідини, що знаходиться в стані спокою. При цьому використовуються

---

Цитування: Багно О.М. Про вплив скінченних початкових деформацій на поверхневу нестійкість нестисливого пружного шару, що взаємодіє з півпростором ідеальної рідини. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 1. С. 24–32. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.01.024>

тривимірні лінеаризовані рівняння теорії пружності скінченних деформацій для пружного тіла і тривимірні лінеаризовані рівняння Ейлера для ідеальної стисливої рідини. У якості підходу обрані постановки задач і метод, засновані на застосуванні представлень загальних розв'язків рівнянь руху пружного тіла і рідини, запропоновані в роботах [3–7].

Далі розглядаються такі динамічні процеси в гідропружній системі, при яких виникають додаткові деформації, тобто збурення деформацій, які значно менші за початкові. Досліджуються хвильові процеси малої амплітуди. При цьому приймається, що пружне тіло знаходиться в початковому стані.

В рамках прийнятих моделей основні співвідношення для пружно-рідинної системи: попередньо напружене нестисливе пружне тіло — ідеальна стислива рідина приймають такий вигляд [3–7]:

$$\left( \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha + \tilde{q}_{ij} \frac{\partial p}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1)$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_\beta \kappa_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i q_{ij}; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1; \quad \tilde{q}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (2)$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \left( \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta} + \tilde{q}_{ij} p \right), \quad z_k \in S; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad (4)$$

$$p_{,ij} = -\delta_{ij} p; \quad \tilde{P}_j = p_{,ij} N_i^0; \quad a_0 = \text{const}, \quad z_k \in V_2. \quad (5)$$

При цьому специфіку взаємодії пружних і рідких середовищ відображають динамічні  $\tilde{Q}_j = \tilde{P}_j$ ,  $z_k \in S$  і кінематичні  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}$ ,  $z_k \in S$  граничні умови, що задаються на поверхні контакту твердих тіл і рідини  $S$ . Введені тензори  $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$  і  $\tilde{q}_{ij}$  залежать від виду початкового стану і типу пружного потенціалу матеріалу твердого тіла. Вирази для обчислення складових цих тензорів наведені в роботі [8]. Там же запропоновані спрощення для різних варіантів теорії малих початкових деформацій.

Вище введено такі позначення:  $u_i$  — компоненти вектору переміщень пружного тіла  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  — густина матеріалу пружного шару;  $\lambda_i$  — подовження (при  $\lambda_i > 1$ ) або укорочення (при  $\lambda_i < 1$ ) пружного шару в напрямках координатних осей;  $v_i$  — складові вектора збурень швидкості рідини  $\mathbf{v}$ ;  $\rho^*$  і  $p$  — збурення густини і тиску в рідині;  $\rho_0$  і  $a_0$  — густина і швидкість звуку в рідині в стані спокою;  $\tilde{P}_j$  і  $\tilde{Q}_j$  — складові напружень, відповідно, в рідині і пружному тілі;  $V_1$  та  $V_2$  — об'єми, займані пружним тілом і рідиною;  $S$  — поверхня контакту пружного і рідкого середовищ.

Рівності (1) — (3) описують поведінку нестисливого пружного тіла. Малі коливання ідеальної стисливої рідини відносно стану спокою описують співвідношення (4), (5).

Далі припустимо, що ізотропне нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі безперервно-диференційованою функцією компонент тензора дефор-

мацій Гріна, займає об'єм:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  і контактує з ідеальною стисливою рідиною, що займає півпростір:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 < \infty$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Прийемо, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі  $Oz_3$ . У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль в площині  $Oz_1z_2$ . Таким чином, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1) – (5) за таких граничних умов:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=-h} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=-h} = 0; \tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (6)$$

Надалі для розв'язання задачі гідропружності скористаємося представленнями загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружних тіл та ідеальної стисливої рідини, запропонованими в роботах [3–7]. Для плоского випадку, який розглядається далі, загальні розв'язки будуть такими [3–7]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1; v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t};$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 [\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12})] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1,$$

де введені функції  $\chi_1$  і  $\chi_2$  є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right.$$

$$+ \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2 \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} -$$

$$\left. - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0; q_i = \lambda_i^{-1}; \lambda_1 \lambda_2 = 1;$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Тут  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – величини, що визначаються з рівнянь стану і залежать від виду пружного потенціалу [8, 9];  $s_{ii}^0$  – початкові напруження.

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних у часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль і вибираємо у вигляді:

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = 1, 2),$$

де  $k$  – хвильове число;  $\omega$  – кругова частота;  $i$  – уявна одиниця ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Далі застосовуючи метод Фур'є, приходимо до двох задач про власні значення для рівнянь руху пружного тіла і рідини. Розв'язуючи їх, визначаємо відповідні власні функції.

Після підстановки отриманих загальних розв'язків в граничні умови (6) записуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| e_{lm}(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, \rho, \mu, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}), \quad (7)$$

де  $c$  — фазова швидкість нормальних хвиль;  $c_s$  — швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла ( $c_s^2 = \mu / \rho$ );  $\mu$  — модуль зсуву;  $h$  — товщина пружного шару.

Як відомо, в необмеженому нестисливому пружному тілі існує зсувна хвиля. В ідеальному стисливому рідкому середовищі поширюється тільки поздовжня хвиля. Саме ці хвилі, взаємодіючи між собою на вільних граничних поверхнях, а також на поверхні контакту середовищ, породжують складне хвильове поле в гідропружній системі.

Відзначимо, що дисперсійне рівняння (7) не залежить від форми пружного потенціалу та отримано для нестисливих пружних тіл, що піддаються великим (скінченним) початковим деформаціям. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду окремих випадків [1, 10–12]. Зокрема, якщо  $a_0$  спрямувати до нескінченності, то (7) переходить в рівняння для визначення параметрів мод при взаємодії пружного шару з ідеальною нестисливою рідиною. При  $\rho_0 = 0$  отримуємо випадок поширення хвиль Лемба в пружному шарі, що не взаємодіє з рідиною [1–4]. Інші окремі випадки, які впливають з даної роботи, пов'язані з дослідженням хвиль Стоунлі (при  $\rho_0 \neq 0$  і  $h \rightarrow \infty$ ) та хвиль Релея (при  $h \rightarrow \infty$  і  $\rho_0 = 0$ ), розглянуті в публікаціях [1, 10, 11].

Зазначені окремі випадки враховують наявність початкових деформацій у пружному шарі. Крім того, моделі, засновані на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, на рівняннях наближених прикладних двовимірних теоріях як для попередньо напружених, так і для тіл без початкових деформацій, на лінійних співвідношеннях класичної теорії пружності, є окремими випадками, що розглядаються в роботі, і впливають з нього при введенні додаткових спрощуючих припущень. Задачі, які були розглянуті в рамках моделі, що враховує початкові напруження, наведені в [1–5, 7, 9–11]. Якщо прийняти  $s_{ii}^0 = 0$  ( $\lambda_1 = 1$ ), то із співвідношення (7) отримуємо рівності для ґрунтовно досліджених в рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Лемба і Стоунлі–Шольте [12].

**Числові результати.** Надалі дисперсійне рівняння (7) розв'язуємо чисельно. При цьому розрахунки проводимо для гідропружної системи, що складається з нестисливого пружного шару і півпростору води. Матеріалом для пружного шару вибираємо вискоеластичну гуму, пружні властивості якої описуються пружним потенціалом Трелоара. При цьому механічні параметри гідропружної системи вибираємо такими: пружний шар —  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6$  Па; півпростір рідини —  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . Цей гідропружний хвилевод характеризується тим, що матеріал пружного шару (гума) є податливим, нестисливим і м'яким. Крім того, при розв'язанні припускаємо, що початковий напружений стан задовольняє співвідношенням  $s_{11}^0 \neq 0$ ,  $s_{22}^0 = 0$ . Як показано в роботі [8], при такому завантаженні немає аналогії між задачами в лінеаризованій і лінійній постановках. Тому результати для тіл з початковими напруженнями не можуть бути отримані з розв'язків відповідних лінійних задач. Результати обчислень у вигляді графіків представлені на рис. 1–3. Графіки на рис. 1 ілюструють вплив рідини на хвильові характеристики

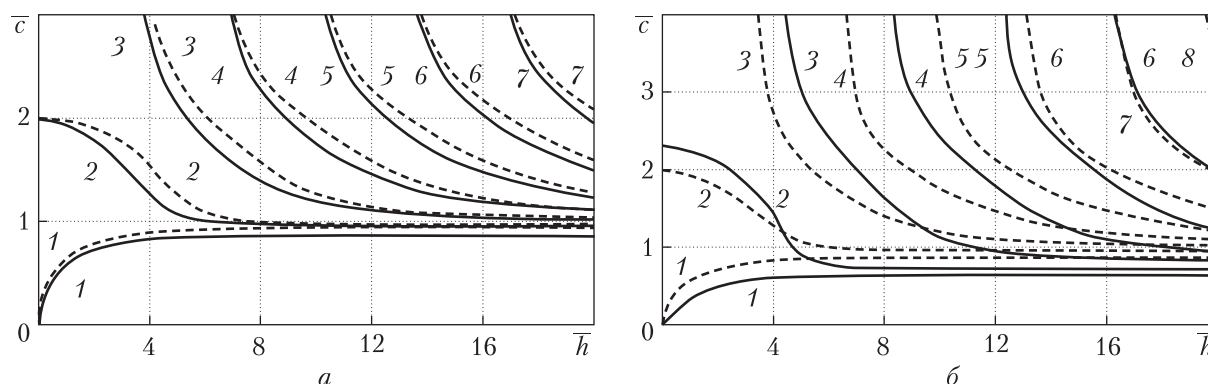


Рис. 1

гідропружної системи. При цьому на рис. 1, а зображені дисперсійні криві, що відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей мод Лемба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) від безрозмірної величини товщини пружного шару  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ). Суцільні криві отримані для пружного шару, що взаємодіє з півпростором рідини. Штрихові лінії відповідають випадку пружного шару, який не взаємодіє з рідиною. Графіки на цьому рисунку побудовані для пружних шарів, які не піддані початковим деформаціям ( $\lambda_1 = 1$ ).

Характер впливу попереднього стиснення ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на фазові швидкості нормальних хвиль у пружно-рідинній системі ілюструють графіки на рис. 1, б. Це залежності безрозмірних величин фазових швидкостей квазілембових мод  $\bar{c}$  від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти)  $\bar{h}$ . Суцільні криві одержані для системи, пружний шар якої підданий початковому стисненню ( $\lambda_1 = 0,8$ ). Штриховими лініями позначені дисперсійні криві, які відповідають гідропружному хвилеводу за відсутності початкових деформацій ( $\lambda_1 = 1$ ).

Характер впливу попереднього деформування пружного шару на швидкість першої (нульова антисиметрична) та другої (нульова симетрична) мод Лемба ілюструють графіки на рис. 2, а і 2, б, де представлені залежності безрозмірних величин фазових швидкостей  $\bar{c}$  цих мод від зміни укорочення  $\lambda_1$ . Ці графіки отримані для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною. На рис. 2, а наведено результати обчислення для попередньо стисненого ( $0,52 \leq \lambda_1 \leq 0,58$ ) пружного шару, а на рис. 2, б – значення фазових швидкостей цих мод для сильно стисненого пружного шару ( $0,54369 \leq \lambda_1 \leq 0,5437$ ). Наведені на рис. 2, а і 2, б графіки отримані для пружного шару з товщиною  $\bar{h} = 5$ .

Характер впливу попереднього деформування пружного шару в гідропружній системі на швидкості першої та другої квазілембових мод ілюструють рис. 3, а і 3, б, де представлені залежності фазових швидкостей  $\bar{c}$  цих мод від зміни укорочення  $\lambda_1$ . На рис. 3, а наведені результати обчислень для попередньо стисненого ( $\lambda_1 \leq 1$ ) пружного шару, а на рис. 3, б – значення фазових швидкостей цих мод для сильно стисненого пружного шару ( $0,54369 \leq \lambda_1 \leq 0,5437$ ). Наведені на рис. 3, а і 3, б графіки отримані для пружного шару з товщиною  $\bar{h} = 5$ .

**Аналіз числових результатів.** З графіків, представлених на рис. 1, а, випливає, що для чисто пружного хвилеводу (штрихові лінії) швидкості першої (нульової антисиметрич-

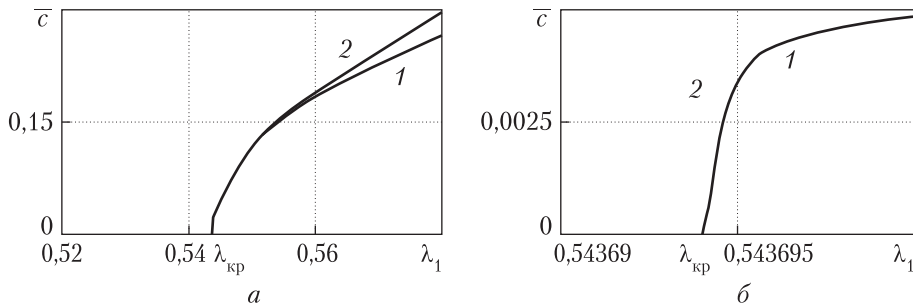


Рис. 2

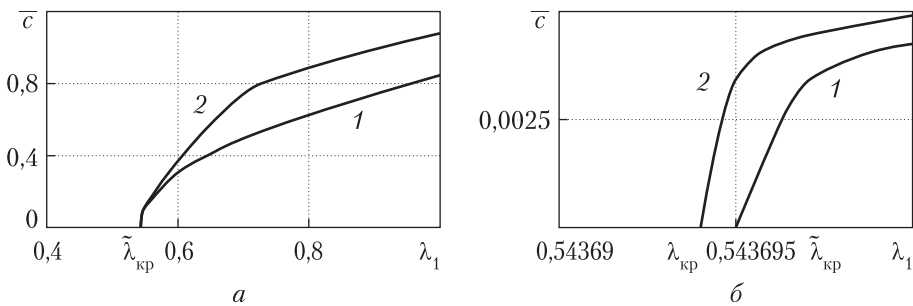


Рис. 3

ної) і другої (нульової симетричної) мод Лемба, що поширюються уздовж нижньої і верхньої вільних поверхонь шару, з ростом товщини пружного шару (частоти)  $\bar{h}$  прямують до швидкості хвилі Релея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s$ ). При цьому перша мода прямує до швидкості поверхневої хвилі  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) знизу, а швидкість другої моди — відповідно до  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) зверху.

У гідропружному хвилеводі (суцільні лінії) при зростанні товщини пружного шару (частоти)  $\bar{h}$  швидкість першої моди прямує до швидкості хвилі Стоунлі  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$ ) знизу, а швидкість другої моди — до швидкості хвилі Релея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ) зверху. Моді вищого порядку як в гідропружній системі, так і в чисто пружному шарі поширюються в пружному шарі в його товщі [12] з фазовими швидкостями, які прямують зі збільшенням товщини (частоти)  $\bar{h}$  до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла  $\bar{c}_s$ .

Як видно з графіків для гідропружного хвилеводу (рис. 1, б), швидкості перших мод (хвилі типу Стоунлі) прямують до швидкостей хвиль Стоунлі  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,859257$  при  $\lambda_1 = 1$  та  $\bar{c}_{st} = 0,650184$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) знизу, а швидкості других мод (хвилі типу Релея) — до швидкостей хвиль Релея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$  при  $\lambda_1 = 1$  і  $\bar{c}_R = 0,709558$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) зверху. З графіків, наведених на рис. 1, б, випливає, що попередні деформації викликають зміну частот зародження квазілембових мод і зміщення їх дисперсійних кривих. Неважко бачити (суцільні лінії), що початкове стиснення ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводить до зміщення критичних частот і дисперсійних кривих в короткохвильову частину спектра. При цьому відбувається зменшення кількості квазілембових мод, що поширюються в даному діапазоні.

З графіків, наведених на рис. 2, а і 2, б, випливає, що стиснення пружного шару ( $\lambda_1 < 1$ ) призводить до зменшення фазових швидкостей першої та другої мод Лемба і відмінностей

між їх величинами. Тому графіки на рис. 2, б, що відображають поведінку цих мод для сильно стисненого високоеластичного шару, зливаються в одну лінію.

Як видно з графіків для гідропружного хвилеводу (див. рис. 3, а і 3, б), стиснення пружного шару ( $\lambda_1 < 1$ ) призводить до зменшення величин фазових швидкостей першої і другої квазілембових мод. Але на відміну від чисто пружного шару для гідропружної системи величини фазових швидкостей першої та другої мод приймають нульові значення при різних значеннях початкового стиснення  $\lambda_1 \approx 0,543695$  для першої моди і  $\lambda_1 \approx 0,543694$  для другої моди.

**Вплив півпростору рідини на хвильовий процес.** Графічний матеріал, представлений на рис. 1, а, дозволяє отримати інформацію про вплив рідкого півпростору на такі хвильові характеристики гідропружних хвилеводів, як фазові швидкості і дисперсія квазілембових мод. З нього випливає, що півпростір рідини, взаємодіючи з пружним шаром, викликає зміну частот зародження мод і зміщення їх дисперсійних кривих. При цьому критичні частоти знижуються, а дисперсійні криві (суцільні лінії) зміщуються в довгохвильову частину спектра. Це призводить до того, що в гідропружному хвилеводі фазові швидкості мод стають меншими за величини фазових швидкостей мод Лемба в чисто пружному хвилеводі.

**Поверхнева нестійкість гідропружної системи.** Графіки для чисто пружного шару (див. рис. 2) свідчать, що при стисненні і  $\lambda_1 \approx 0,54$  (більш точне значення  $\lambda_1 \approx 0,543694$ ), тобто при зменшенні довжини високоеластичного нестисливого тіла на 46 % величини фазових швидкостей  $\bar{c}$  першої та другої мод стають рівними нулю. Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану для високоеластичного нестисливого неогуківського тіла при  $\lambda_1 \approx 0,54$  (більш точне значення  $\lambda_1 \approx 0,543694$ ) виникає явище поверхневої нестійкості. Відзначимо, що це значення збігається з раніше отриманим в теорії стійкості [8, 9] і відповідає значенню параметра критичного укорочення  $\lambda_{кр}$ .

З графіків рис. 3, б випливає, що в гідропружному хвилеводі фазова швидкість першої моди обертається в нуль при  $\lambda_1 \approx 0,543695$ . Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану поверхня пружного шару гідропружної системи, що контактує з півпростором рідини, при  $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543695$  втрачає поверхневу стійкість. На другій поверхні пружного шару, яка є вільною, явище поверхневої нестійкості виникає при  $\lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543694$ . Ці відмінності між  $\tilde{\lambda}_{кр}$  та  $\lambda_{кр}$  свідчать про те, що наявність півпростору ідеальної стисливої рідини зумовлює зниження порогу поверхневої нестійкості гідропружного хвилеводу і виникнення її раніше при меншому стисненні ( $\tilde{\lambda}_{кр} > \lambda_{кр}$ ).

Відзначимо, що проведені розрахунки і отримані числові результати дозволили встановити, що навантаження пружного шару півпростором рідини несуттєво впливає на величину параметра критичного укорочення і втрату поверхневої стійкості гідропружної системи.

Таким чином, розвинена лінеаризована теорія хвиль стосовно високоеластичних нестисливих тіл дозволяє досліджувати хвильові процеси не тільки в загальному і ряді окремих випадків, а також можливість і умови виникнення явища поверхневої нестійкості як в пружному шарі, так і в гідропружній системі.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. P. 449–507.
2. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. 2 тома. Киев: Наук. думка, 1986.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
5. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
6. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
7. Guz A.N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.
8. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Киев: Наук. думка, 1979. 144 с.
9. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.
10. Babich S.Yu., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. P. 277–291.
11. Жук А.П. Волны Стонли в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика.* 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
12. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.

Поступило в редакцию 16.03.2020

REFERENCES

1. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449-507. <https://doi.org/10.1007/S10778-016-0770-6>
2. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Makhort, F. G. (1976). Waves in layer with initial stresses. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
3. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. 2 vols. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
4. Guz, A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
5. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
6. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
7. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175-190. <https://doi.org/10.1007/BF00885084>
8. Guz, A. N. (1979). Stability of elastic bodies under hydrostatic pressure. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
9. Guz, A. N. (1973). Stability of elastic bodies under finite deformations. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
10. Babich, S. Yu., Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 15, No. 4, pp. 277-291. <https://doi.org/10.1007/BF00884760>
11. Zhuk, A. P. (1980). Stoneley wave in a medium with initial stresses. *J. Appl. Mech.*, 16, No. 1, pp. 113-116 (in Russian).
12. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 16.03.2020

*O.M. Bagno*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON THE INFLUENCE OF FINITE INITIAL DEFORMATIONS  
ON THE SURFACE INSTABILITY OF THE INCOMPRESSIBLE ELASTIC  
LAYER INTERACTING WITH THE HALF-SPACE OF AN IDEAL FLUID

The problem of the propagation of quasi-Lamb waves in a pre-deformed incompressible elastic layer that interacts with the half-space of an ideal compressible fluid is considered. The study is conducted on the basis of the three-dimensional linearized equations of elasticity theory of finite deformations for the incompressible elas-



tic layer and on the basis of the three-dimensional linearized Euler equations for the half-space of an ideal compressible fluid. The problem is formulated, and the approach based on the utilization of representations of the general solutions of the linearized equations for an elastic solid and a fluid is developed. Applying the Fourier method, we arrive at two eigenvalue problems for the equations of motion of the elastic body and the fluid. Solving them, we find the eigenfunctions. Substituting the general solutions into the boundary conditions, we obtain a homogeneous system of linear algebraic equations for the arbitrary constants. From the condition for the existence of a nontrivial solution, we derive the dispersion equation. A dispersion equation, which describes the propagation of normal waves in the hydroelastic system, is obtained. The dispersion curves for quasi-Lamb waves over a wide range of frequencies are constructed. The effect of the finite initial deformations in an elastic layer, the thickness of the elastic layer, and the half-space of an ideal compressible fluid on the phase velocities and dispersion of quasi-Lamb modes are analyzed. It follows from the graphical material presented above that, in the case of compression with 0.54, i.e., with a 46 percent's reduction in the length of the highly elastic incompressible body, the phase velocities of the surface waves (Stoneley waves and Rayleigh waves) vanish. This indicates that surface instability develops at 0.54 for a highly elastic incompressible non-Hookean body initially in a plane stress-strain state. We should point out that these figures agree with results obtained earlier in the theory of stability and correspond to the critical value of the contraction parameter. In the case of highly elastic incompressible bodies, the linearized wave theory makes it possible to study not only general and several specific wave processes, but also the conditions under which the surface instability begins in elastic bodies and hydroelastic systems. It also follows from the graphs that the ideal fluid slightly affects the surface instability of hydroelastic systems. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** *surface instability, dispersion of quasi-Lamb waves, incompressible elastic layer, half-space of an ideal compressible fluid, finite initial deformation.*