

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.01.033>

УДК 517.36

А.С. Хорошун

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

Про побудову керування, що забезпечує бажану траєкторію руху одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням

Представлено академіком НАН України А.А. Мартинюком

В роботі отримано закон обертання електродвигуна, який забезпечує глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху моделі одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням до заданої програмної траєкторії. Пружність зчленування моделюється торсіонною пружиною, сила пружності якої вважається нелінійно залежною від зміщення. Цей факт унеможливорює застосування звичайного підходу і значно ускладнює задачу побудови керування. Також складності додає те, що деякі параметри моделі можуть бути задані неточно і певним чином залежати від деякого числового параметра, область зміни якого наперед невідома. Проте, застосування техніки DSC (Dynamic Surface Control) дозволяє отримати бажане керування. Запропоновано розвиток методу DSC, який полягає у специфічному виборі параметрів і констант фільтрів. Це дозволяє уникнути зростання порядку допоміжної системи, а також явища значного ускладнення вигляду як допоміжної системи диференціальних рівнянь, так і закону керування, т. зв. “explosion of terms”. Зниження порядку системи диференціальних рівнянь та спрощення її вигляду дозволили в даному випадку отримати в явному вигляді відповідну допоміжну функцію та з її допомогою довести, що запропоноване керування вирішує поставлену задачу керування. Також доведена робастність такого керування та визначена область робастності у просторі параметрів системи. Отримані результати проілюстровані на прикладі конкретної механічної моделі.

Ключові слова: одноланковий маніпулятор, нелінійне пружне зчленування, малоприводна механічна система, глобальна асимптотична стійкість.

Широко відомо, що однією з причин виникнення вібрацій у маніпуляторах промислових роботів є пружність зчленувань між керуючим приводом і керованою ланкою. Адекватними моделями, які враховують зазначені вище зауваження, є механічні моделі, де пружність трансмісії моделюється торсіонними пружинами у кожному із зчленувань, див. [1–3] та ін. Сила, що виникає внаслідок деформації пружини, зазвичай вважається лінійно залежною від зміщення. Однак слід зауважити, що більшої адекватності модель набуває, якщо вра-

Цитування: Хорошун А.С. Про побудову керування, що забезпечує бажану траєкторію одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 1. С. 33–38. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.01.033>

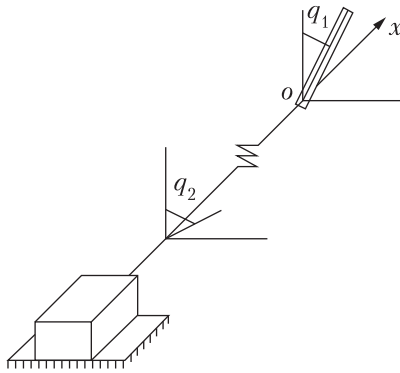


Рис. 1. Модель одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням

моделі, що явно включає в себе складні нелінійні члени, які, як показано, можуть бути причиною певних небажаних фізичних ефектів (тобто резонансу стрибка), повинен працювати краще, ніж алгоритм, який не включає ці члени”. В даній роботі відмічена відсутність повноти розгляду таких задач. Саме цим пояснюється вибір нелінійної моделі. Виходячи зі слабкої вивченості нелінійної моделі одноланкового маніпулятора з пружним зчленуванням, побудова керування, яке забезпечує бажану динаміку такої моделі, становить значний інтерес і забезпечує новизну.

При застосуванні торсійної пружини для моделювання пружного зчленування, положення керуючого приводу (тобто кут зміщення вала електродвигуна, що здійснює керування) не збігається із положенням керованої ланки. Зауважимо, що кількість ступенів свободи в такій моделі більша ніж кількість входів керування. Цей факт дозволяє віднести її до класу т. зв. “малоприводних” механічних систем (ММС). Системи керування, що відносяться до такого класу, мають кращі енергетичні, масово—габаритні та вартісні показники у порівнянні із звичайними системами керування, де кожному ступеню свободи відповідає вхід керування. Таким чином, можна стверджувати, що розробка нових та вдосконалення існуючих моделей маніпуляторів та режимів їх керування з урахуванням пружності зчленувань, наявності нелінійних членів у виразі, що описує залежність сили пружності трансмісії від зміщення, в контексті розвитку теорії ММС є, без сумніву, актуальною задачею сучасної теоретичної механіки і має важливе прикладне значення.

Основний результат. На рис.1 зображена конструкція одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням, де q_1 — кут відхилення маніпулятора від вертикалі, а q_2 — кут відхилення від вертикалі вала електродвигуна.

Рівняння руху моделі мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{q}_1 + b_1 \dot{q}_1 + mgl \sin(q_1) + K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ J_2 \ddot{q}_2 + b_2 \dot{q}_2 - K_1(q_1 - q_2) - K_2(q_1 - q_2)^3 = \Delta. \end{cases} \quad (1)$$

де m — маса ланки маніпулятора; l — відстань від точки O до центра мас ланки маніпулятора; g — прискорення вільного падіння; b_1 та b_2 — коефіцієнти демпфування при обер-

ховувати ефект затухання коливань, а також нелінійний характер згадуваної сили, що стає критичним, коли розглядаються великі навантаження чи інші пограничні режими функціонування механічної моделі. Нелінійність пружності трансмісії розглядалася в [4–6], де досліджувався т. зв. “harmonic drive”. Як було зазначено в [4], “...кубічний член в механізмі передачі крутного моменту є важливим з огляду на експериментальні результати, що вказують на явище стрибкоподібного резонансу. Це явище, яке виявляється із дослідів, проявилось в областях, в яких відбулися сильні вібрації ланки робота. Ці області резонансу часто пропускалися і було показано, що їх наявність тісно пов’язана з членом кубічної гнучкості, див. [7]”.

Також в [8] зазначено: “Таким чином, алгоритм на основі

танні ланки маніпулятора та вала електродвигуна відповідно; J_1 — момент інерції ланки маніпулятора відносно вісі OX ; J_2 — момент інерції вала електродвигуна; Δ — момент електромагнітних сил, прикладених до ротора електродвигуна з боку статора. Жорсткість K пружини вважаємо нелінійно залежною від зміщення: $K = K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3$, де K_1 та K_2 — коефіцієнти жорсткості. Задача керування полягає у забезпеченні глобально-асимптотичного прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням до заданої програмної траєкторії, яка задається співвідношеннями $q_1 = \Theta$, $\dot{q}_1 = 0$ у той час, як електродвигун, що здійснює керування, припинить обертатися.

Нехай $\tau = \sqrt{\frac{K_1}{J_2}}t$ — узагальнений час. Тоді, позначивши $v = \frac{\Delta}{K_1}$, $B_1 = \frac{b_1}{\sqrt{K_1 J_2}}$, $B_2 = \frac{b_2}{\sqrt{K_1 J_2}}$, $K = \frac{K_2}{K_1}$, $J = \frac{J_2}{J_1}$, $\varepsilon = \frac{mgl}{K_1}$, отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь, де диференціювання відбувається по узагальненому часі τ , яка еквівалентна системі диференціальних рівнянь (1):

$$\begin{cases} J^{-1}\ddot{q}_1 + B_1\dot{q}_1 + \varepsilon \sin(q_1) + (q_1 - q_2) + K(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ \ddot{q}_2 + B_2\dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - K(q_1 - q_2)^3 = v. \end{cases} \quad (2)$$

Перетворимо керування та координати за такими правилами:

$$\begin{cases} v = u + B_2\dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - K(q_1 - q_2)^3, \\ \eta_1 = q_1, \\ \eta_2 = \dot{q}_1, \\ \eta_3 = q_2, \\ \eta_4 = \dot{q}_2. \end{cases} \quad (3)$$

Тоді система диференціальних рівнянь (2) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -B_1 J \eta_2 - J(\eta_1 - \eta_3) - KJ(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon J \sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = u. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, що реалізація задачі керування еквівалентна побудові керування u , яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \hat{\eta}_3$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (4), де $\hat{\eta}_3$ — деяке рівноважне значення змінної η_3 , до якої вона прямує при реалізації задачі керування. Застосовуючи т.зв. Dynamic Surface Control (див. [9]), отримаємо, що шукане керування має вигляд $u = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1 \tau_2} + \frac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1 \tau_2}$, де

$\tilde{\eta}_3$ — бажана траєкторія, до якої прямує змінна η_3 при керуванні u . Нехай $\tilde{\eta}_3 = \Theta_1$, де Θ_1 — розв'язок рівняння

$$(\Theta - \Theta_1) + K(\Theta - \Theta_1)^3 + \varepsilon \sin(\Theta) = 0. \quad (5)$$

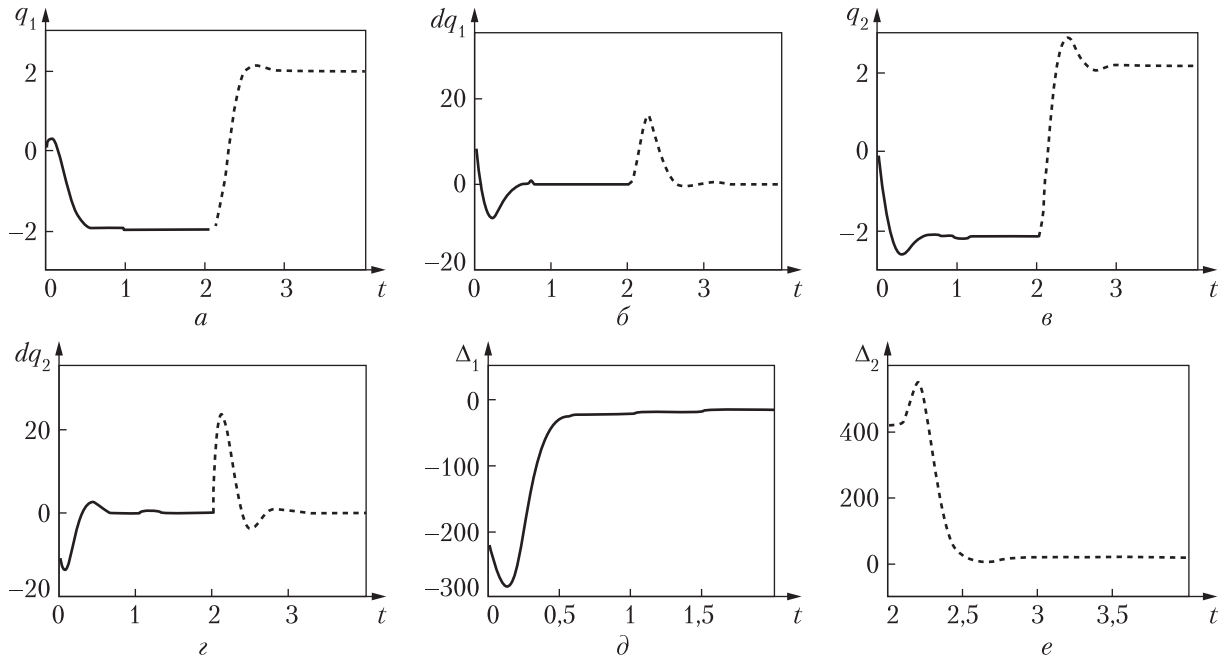


Рис. 2. Поведінка одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням при послідовному застосуванні керувань

Оскільки величина $Q = \left(\frac{1}{3K}\right)^3 + \left(\frac{\varepsilon}{2K}\sin(\Theta)\right)^2$ додатня, то рівняння (5) має один дійсний корінь, який може бути визначений за формулою Кардано: $\Theta_1 = \Theta - \sqrt[3]{-\frac{\varepsilon}{2K}\sin(\Theta) + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{\varepsilon}{2K}\sin(\Theta) - \sqrt{Q}}$. Виберемо константи фільтрів $\tau_1 = \tau_2 = 1$. Тоді побудоване керування має вигляд $u = -\eta_4 - \eta_3 + \Theta_1$, а система диференціальних рівнянь (4) –

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -B_1 J \eta_2 - J(\eta_1 - \eta_3) - KJ(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon J \sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = -\eta_4 - \eta_3 + \Theta_1. \end{cases} \quad (6)$$

Зауважимо, що при іншому виборі значення $\tilde{\eta}_3$ та констант фільтрів отримаємо інший вигляд керування. При зменшенні величин τ_1 та τ_2 пришвидшиться прямування траєкторій системи до бажаних рівноважних значень, проте, збільшиться амплітуда коливань керованих величин. Отже, вибір констант фільтрів в кожному конкретному випадку залежить від задачі керування. Методика побудови відповідної функції Ляпунова та доведення стійкості бажаного стану рівноваги при цьому не зміниться. Тому, вибір констант фільтрів рівними одиниці в даній роботі зумовлений простотою викладення матеріалу.

Сформулюємо теорему, яка містить основний результат даної роботи.

Теорема. Якщо $\varepsilon < 1$, то стан рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \Theta_1$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (6) глобально асимптотично стійкий.

Доведення теореми відбувається за допомогою методу функцій Ляпунова. Відповідна допоміжна функція побудована в явному вигляді.

Зауваження. Якщо величина Θ_1 є розв'язком рівняння (5), то враховуючи (3) та переходячи до розмірних величин, керування Δ , яке забезпечить глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням до заданої програмної траєкторії, яка задається співвідношенням $q_1 = \Theta$, $\dot{q}_1 = 0$, у той час, як електродвигун, що здійснює керування, припинить обертатися, має вигляд:

$$\Delta = \dot{q}_2(b_2 - \sqrt{J_2 K_1}) - K_1(q_1 - \Theta_1) - K_2(q_1 - q_2)^3. \quad (7)$$

Приклад. Проілюструємо отримані результати на прикладі конкретної моделі. Нехай параметри моделі такі: $m = 1$ кг, $l = 2$ м, $g = 9,8$ м/с², $b_1 = 30$ кг · м²/с, $b_2 = 10$ кг · м²/с, $J_1 = \frac{1}{3} ml^2$, $J_2 = 1$ кг · м², $K_1 = 100$ кг · м²/с², $K_2 = 10$ кг · м²/с². Побудуємо керування, яке забезпечить глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням до програмної траєкторії, яка задається співвідношеннями $q_1 = -2$, $\dot{q}_1 = 0$ у той час, як електродвигун, що здійснює керування, припинить обертатися. Оскільки величина $\varepsilon = 0,196$ задовольняє умову теореми, то таке керування, згідно з зауваженням, має вигляд $\Delta_1 = -100(q_1 - \Theta_1) - 10(q_1 - q_2)^3$, де $\Theta_1 = -2,178$ є розв'язком рівняння (5) при $\Theta = -2$. Як бачимо, для даної моделі $b_2 - \sqrt{J_2 K_1} = 0$, тому керування не залежить від швидкості обертання електродвигуна. Аналогічно керування, яке забезпечить глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням до програмної траєкторії, яка задається співвідношеннями $q_1 = 2$, $\dot{q}_1 = 0$ у той час, як електродвигун, що здійснює керування, припинить обертатися, має вигляд $\Delta_2 = -100(q_1 - \Theta_2) - 10(q_1 - q_2)^3$, де $\Theta_2 = 2,178$ є розв'язком рівняння (5) при $\Theta = 2$.

Еволюція змінних q_1 і q_2 , їх швидкостей зміни \dot{q}_1 і \dot{q}_2 та керувань Δ_1 і Δ_2 при їх послідовному застосуванні до електродвигуна зображені на рис.2. Початкові значення змінних $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 10$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = -10$. Як бачимо, керування Δ_1 та Δ_2 вирішують поставлені задачі.

Частина роботи виконана за рахунок коштів бюджетної програми НАН України за КПКВК 6541230 "Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень"

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. De Luca A. Dynamic Control of Robots with Joint Elasticity: *In. Proceedings* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. 1988. P. 152–158. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1988.12040>
2. Spong M.W. Control of Flexible Joint Robots: A Survey. Coordinated Science Laboratory Report no. UILU-ENG-90-2203. Urbana-Champaign: Univ. of Illinois, 1990.
3. Tomei P. A Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints. *IEEE Trans. on Rob. and Autom.* 1991. **36**, Iss.10. P. 1208–213. <https://doi.org/10.1109/9.90238>
4. Bridges M.M., Dawson D.M. Redesign of Robust Controllers for Rigid Link FJ Robotic Manipulators Actuated with Harmonic Drive. *Proc. IEE – Contr. Theory Appl.* 1995. **142**, Iss. 5. P. 508–514. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:19951970>
5. Seyfferth W., Maghzal A.J., Angeles J. Nonlinear Modeling and Parameter Identification of Harmonic Drive Robotic Transmissions. *Proc. IEEE Int. Conf. Rob. Autom.* 1995. **3**, pp. 3027–3032. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1995.525714>
6. Tuttle T.D., Seering W.P. A Nonlinear Model of a Harmonic Drive Gear Transmission. *IEEE Trans. Rob. Autom.* 1996. **12**, Iss. 3. P. 368–374. <https://doi.org/10.1109/70.499819>

7. Tuttle T.D. Understanding and Modeling the Behavior of a Harmonic Drive Gear Transmission. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. 1992. P. 314.
8. Ozgoli S., Taghirad H.D. A survey on the control of flexible joint robots. *Asian Control*. 2006. 8, Iss. 4. P. 332–344. <https://doi.org/10.1111/j.1934-6093.2006.tb00285.x>
9. Song B., Hedrick J.K. Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach. London: Springer, 2011. 268 p.

Надійшло до редакції 22.12.2020

REFERENCES

1. De Luca, A. (1988). Dynamic Control of Robots with Joint Elasticity. *In. Proceedings IEEE Int. Conf. on Rob. and Autom.*, pp. 152-158. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1988.12040>
2. Spong, M. W. (1990). Control of Flexible Joint Robots: A Survey. Coordinated Science Laboratory Report no. UILU-ENG-90-2203. Urbana-Champaign: Univ. of Illinois.
3. Tomei P. (1991). A Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints. *IEEE Trans. on Rob. and Autom.* 36, Iss. 10, pp. 1208-1213. <https://doi.org/10.1109/9.90238>
4. Bridges, M. M. & Dawson, D. M. (1995). Redesign of Robust Controllers for Rigid Link FJ Robotic Manipulators Actuated with Harmonic Drive. *Proc. IEE - Contr. Theory Appl.*, 142, Iss. 5, pp. 508-514. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:19951970>
5. Seyffarth, W. & Maghzal, A. J. & Angeles, J. (1995). Nonlinear Modeling and Parameter Identification of Harmonic Drive Robotic Transmissions. *Proc. IEEE Int. Conf. Rob. Autom.*, 3, pp. 3027-3032. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1995.525714>
6. Tuttle, T. D. & Seering, W. P. (1996). A Nonlinear Model of a Harmonic Drive Gear Transmission. *IEEE Trans. Rob. Autom.*, 12, Iss. 3, pp. 368-374. <https://doi.org/10.1109/70.499819>
7. Tuttle, T. D. (1992). Understanding and Modeling the Behavior of a Harmonic Drive Gear Transmission. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.
8. Ozgoli, S. & Taghirad, H. D. (2006). A survey on the control of flexible joint robots: *Asian J. Control*, 8, Iss. 4, pp. 332-344. <https://doi.org/10.1111/j.1934-6093.2006.tb00285.x>
9. Song, B., & Hedrick, J. K. (2011). Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach. London: Springer.

Received 22.12.2020

A.S. Khoroshun

S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

ON CONSTRUCTION OF THE CONTROL THAT PROVIDES THE DESIRED TRAJECTORY OF THE MOVEMENT OF THE SINGLE-LINK MANIPULATOR WITH ELASTIC JOINT

The law of rotation of the electric motor, which ensures a global asymptotic direction of the trajectory of the model of a single-link manipulator with an elastic joint to a given program trajectory is obtained. The elasticity of the joint is modeled by a torsion spring, the elastic force of which is considered to be nonlinearly dependent on the displacement. This fact makes it impossible to apply the usual approach and greatly complicates the task of control construction. The fact that some parameters of the model can be uncertain and, in some way, depend on some numerical parameter, the area of change of which is unknown in advance, also adds complexity. However, the use of DSC (Dynamic Surface Control) technique allows us to get the desired control. The development of the DSC technique, which consists in a specific choice of parameters and constants of filters, is proposed. It avoids the growth of the order of the auxiliary system, as well as a significant complication of the form of both the auxiliary system of differential equations and the control law, the so-called "explosion of terms". It allows us to obtain explicitly the corresponding auxiliary function and to prove that the proposed control law solves the control problem. The robustness of such control is also proved, and the region of robustness in the system parameters space is defined. The obtained results are illustrated by the example of a mechanical model.

Keywords: single-link manipulator, nonlinear joint elasticity, underactuated mechanical system, global asymptotic stability.