ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.02.003
УДК 514.8

А.А. Мартинюк, В.О. Чернієнко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

До задачі про стійкість руху істотно нелінійних систем

Представлено академіком НАН України А.А. Мартинюком

Для істотно нелінійних систем рівнянь збуреного руху запропоновано один підхід для оцінки функцій Ляпунова вздовж розв'язків розглянутих систем рівнянь. Як застосування розглянуто задачу про обмеженість і стійкість руху істотно нелінійної системи рівнянь другого порядку, задачі про стійкість при великих початкових збуреннях та про стійкість неавтономної афінної системи

Ключові слова: *істотно нелінійна система, функція Ляпунова, стійкість.*

Найбільш загальні оцінки функцій Ляпунова [1] (скалярних, векторних або матрично-значних) виникають у контексті принципу порівняння (див. [2—4] і бібліографію там). Водночас проблемою цього підходу є те, що отримати розв'язок рівняння порівняння в явному вигляді вдається лише у виняткових випадках, і, отже, конструктивні оцінки функції Ляпунова не вдаються. Тому питання побудови оцінки функцій Ляпунова без безпосереднього інтегрування рівнянь порівняння залишається досить актуальним.

1. Постановка задачі. Нехай R^n — n-вимірний евклідів простір і $\|\cdot\|$ — норма вектора $x \in R^n$. Позначимо $D = \{x \in R^n : \|x\| < r\}$ — відкриту кулю з центром у точці $x = 0$ і радіусом r, $C([\alpha,\beta], R)$ — множину всіх неперервних функцій на $[\alpha,\beta]$ зі значеннями в R.

Розглядається система рівнянь збуреного руху

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t,x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

де $x \in R^n$; f і g — вектор-функції, неперервні по $(t,x) \in R_+ \times D$ та $f(t,0) = g(t,0) = 0$ при всіх $t \in R_+$.

Нелінійну систему (1) будемо називати істотно нелінійною, якщо вектор-функції f і g неперервні на $R_+ \times D$ і задовольняють умови:

Цитування: Мартинюк А.А., Чернієнко В.О. До задачі про стійкість руху істотно нелінійних систем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 2. С. 3—12. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.02.003

(а) $\|f(t,x)\| \leqslant k_1(t)\|x\|^p, \quad \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} k_1(s)ds < +\infty;$

(б) $\|g(t,x)\| \leqslant k_2(t)\|x\|^q, \quad \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} k_2(s)ds < +\infty,$

де $k_1(t), k_2(t) \in C(R_+, R_+), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad 1 < p < q < +\infty$.

Припустимо, що в області $R_+ \times D$ для системи (1) існує диференційовна, додатно означена функція Ляпунова $V(t,x)$, $V(t,0) = 0$ при всіх $t \geqslant t_0$.

Актуальною є задача про оцінку зміни функції $V(t, x(t))$ вздовж розв'язків системи (1) і її застосування в задачах якісного аналізу рухів.

2. Оцінка функції Ляпунова. Повна похідна функції $V(t,x)$ на розв'язках системи (1) обчислюється за формулою

$$D^+V(t,x) = \limsup\{[V(t+\theta,\ x+\theta(f(t,x)+g(t,x)) - V(t,x)]\theta^{-1} : \theta \to 0^+\}.$$

Має місце таке твердження.

Лема 1. *Нехай існують інтегровні на* $J \subset R_+$ *функції* $a_1(t)$ *і* $a_2(t)$ *такі, що*

$$D^+V(t,x)\big|_{(1)} \leqslant a_1(t)V^p(t,x) + a_2(t)V^q(t,x) \tag{3}$$

при всіх $(t,x) \in J \times D$, *де* $1 < p < q < +\infty$, *і при всіх* $t \in J \subset R_+$ *має місце нерівність*

$$N(t) = (p+q-2)\left(V^{p-1}(t_0,x_0)\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)ds + V^{q-1}(t_0,x_0)\int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)ds\right) < 1. \tag{4}$$

Тоді для функції $V(t, x(t))$ *вздовж розв'зків системи* (1) *виконується оцінка*

$$V(t,x(t)) \leqslant V(t_0,x_0)(1 - N(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} \tag{5}$$

при всіх $t \in J$.

Доведення. З нерівності (3) і співвідношення Ляпунова [1] для функції $V(t,x(t))$ випливає, що

$$V(t,x(t)) \leqslant V(t_0,x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (a_1(s)V^p(s,x(s)) + a_2(s)V^q(s,x(s)))ds$$

і далі

$$V(t,x(t)) \leqslant V(t_0,x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} H(s,x(s))V(s,x(s))ds, \tag{6}$$

де $H(t, x(t)) = a_1(t)V^{p-1}(s, x(t)) + a_2(t)V^{q-1}(t, x(t))$.

Застосовуючи до нерівності (6) лемму Гронуолла—Беллмана [5, 6], отримаємо оцінку

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0)\exp\int_{t_0}^{t} H(s, x(s))ds. \tag{7}$$

З нерівності (7) випливають оцінки:

$$V^{p-1}(t, x(t)) \leqslant V^{p-1}(t_0, x_0)\exp\left[(p-1)\int_{t_0}^{t} H(s, x(s))ds\right], \tag{8}$$

$$V^{q-1}(t, x(t)) \leqslant V^{q-1}(t_0, x_0)\exp\left[(q-1)\int_{t_0}^{t} H(s, x(s))ds\right]. \tag{9}$$

Оскільки $1 < p < q < \infty$, за умовою Леми 1, то нерівності (8), (9) можемо подати у вигляді

$$V^{p-1}(t, x(t)) \leqslant V^{p-1}(t_0, x_0)\exp\left[(p+q-2)\int_{t_0}^{t} H(s, x(s))ds\right], \tag{10}$$

$$V^{q-1}(t, x(t)) \leqslant V^{q-1}(t_0, x_0)\exp\left[(p+q-2)\int_{t_0}^{t} H(s, x(s))ds\right]. \tag{11}$$

Перетворимо нерівності (10), (11), помноживши обидві сторони нерівності (10) на $-(p+q-2)a_1(t)$ і нерівності (11) — на $-(p+q-2)a_2(t)$:

$$-V^{p-1}(t, x(t))a_1(t)(p+q-2)\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t} H(s, x(s))ds\right] \geqslant$$

$$\geqslant -V^{p-1}(t_0, x_0)(p+q-2)a_1(t); \tag{12}$$

$$-V^{q-1}(t, x(t))a_2(t)(p+q-2)\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t} H(s, x(s))ds\right] \geqslant$$

$$\geqslant -V^{q-1}(t_0, x_0)(p+q-2)a_2(t). \tag{13}$$

Підсумовуючи нерівності (12), (13), неважко отримати оцінку

$$-(V^{p-1}(t,x(t))a_1(t)(p+q-2)+V^{q-1}(t,x(t))a_2(t)(p+q-2))\times$$

$$\times\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t}H(s,x(s))ds\right]\geqslant -V^{p-1}(t_0,x_0)(p+q-2)a_1(t)-$$

$$-V^{q-1}(t_0,x_0)(p+q-2)a_2(t). \tag{14}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d}{dt}\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t}H(s,x(s))ds\right]\geqslant -V^{p-1}(t_0,x_0)(p+q-2)a_1(t)-$$

$$-V^{q-1}(t_0,x_0)(p+q-2)a_2(t). \tag{15}$$

З нерівності (15) отримаємо

$$\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t}H(s,x(s))ds\right]\geqslant 1-V^{p-1}(t_0,x_0)(p+q-2)\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds-$$

$$-V^{q-1}(t_0,x_0)(p+q-2)\int_{t_0}^{t}a_2(s)ds. \tag{16}$$

Комбінуючи нерівності (7) і (16), отримуємо оцінку

$$V^{p+q-2}(t,x(t))V^{-(p+q-2)}(t_0,x_0)\leqslant(1-N(t))^{-1}, \tag{17}$$

з якої випливає оцінка (14). Цим лема 1 доведена.

3. Еквіобмеженість рухів системи другого порядку. Системи рівнянь другого порядку широко застосовуються для опису процесів у багатьох фізичних системах (див. [7] і бібліографію там).

Розглянемо систему рівнянь другого порядку загального вигляду

$$\frac{dx}{dt}=X_1(t,x,y)+X_2(t,x,y),$$
$$\frac{dy}{dt}=Y_1(t,x,y)+Y_2(t,x,y), \tag{18}$$

де $X_i\in C(R_+\times R\times R,R)$, $Y_i\in C(R_+\times R\times R,R)$, $i=1,2$, — істотно нелінійні функції. З системою (18) розглянемо функцію Ляпунова

$$2V(x,y)=x^2+y^2 \tag{19}$$

і припустимо, що існують функції $\overline{c}_1(t)$, $\overline{c}_2(t)$ з властивостями функцій $a_1(t)$, $a_2(t)$ з леми 1, для яких

$$
\begin{aligned}
&x(X_1(t,x,y)+X_2(t,x,y))\leqslant \overline{c}_1(t)(x^2+y^2)^2,\\
&y(Y_1(t,x,y)+Y_2(t,x,y))\leqslant \overline{c}_2(t)(x^2+y^2)^3.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Неважко перевірити, що для функції $V(x,y)$ вздовж розв'язків системи (18) справедлива оцінка

$$V(x(t),\ y(t))\leqslant V(t_0,x_0)(1-N^*(t))^{-1/3} \tag{21}$$

для всіх $t\geqslant t_0$, для яких

$$N^*(t)=3\left(V(x_0,y_0)\int_{t_0}^{t}\overline{c}_1(s)ds+V^2(x_0,y_0)\int_{t_0}^{t}\overline{c}_2(s)ds\right)<1. \tag{22}$$

Оцінка (21) встановлюється застосуванням леми 1 до системи (18) за допомогою функції (19) з виконанням умови (22).

Далі знадобиться таке означення (див. [8]).

Означення 1. Розв'язок $(x(t),y(t))^T$ системи (18) еквіобмежений, якщо для будь-яких $\alpha>0$ і $t_0\in R_+$ існує $\beta(t_0,\alpha)>0$ таке, що якщо $x_0^2+y_0^2\leqslant\alpha^2$, то

$$x^2(t,t_0,x_0,y_0)+y^2(t,t_0,x_0,y_0)<\beta(t_0,\alpha)\ \text{ при всіх }\ t\geqslant t_0.$$

Покажемо, що має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай для системи* (18) *виконуються умови* (20) *та умови леми* 1 *для функції* (19) *і, крім того*:

1) при всіх $t\geqslant t_0$ *справедлива нерівність*

$$\overline{N}^*(t)=3\frac{\alpha^2}{2}\left(\int_{t_0}^{t}\overline{c}_1(s)ds+\frac{\alpha^2}{2}\int_{t_0}^{t}c_2(s)ds\right)<1;$$

2) при всіх $t\geqslant t_0$ *для деякого* $\beta=\beta(t_0,\alpha)$ *має місце нерівність*

$$(1-\overline{N}^*(t))^{-1/3}<\frac{2\beta}{\alpha^2}.$$

Тоді розв'язок $(x(t),y(t))^T$ *системи* (18) *еквіобмежений.*

Доведення. Нехай $(x(t),\ y(t))^T$ — розв'язок системи (18) за початкових умов $t_0\in R_+$ і $x_0^2+y_0^2<\alpha^2$, $\alpha>0$. За виконання умови *1* теореми 1 справедлива оцінка

$$V(x(t),\ y(t))\geqslant\frac{\alpha^2}{2}(1-\overline{N}^*(t))^{-1/3}$$

при всіх $t \geqslant t_0$. Звідси випливає, що за виконання умови *2* теореми 1 маємо $x^2(t)+y^2(t)<\beta$ при всіх $t \geqslant t_0$. Цим теорема 1 доведена.

4. Стійкість при великих початкових відхиленнях. Розглянемо систему рівнянь (1) і припустимо, що вектор-функції f і g визначені і неперервні при всіх $(t,x)\in R_+ \times R^n$.

Для дослідження стійкості руху у випадку великих початкових відхилень застосовуються допоміжні функції Ляпунова, які названі локально великими.

Означення 2. Неперервна функція $V(t,x), V(t,0)=0$, визначена при всіх $(t,x)\in R_+ \times R^n$, називається локально великою, якщо при заданій оцінці A для будь-якого $0<c<A$ існує $\Delta>0$ таке, що поза сферою $\| x \| = \Delta$ виконується нерівність $V(t,x)>c$ при всіх $t\in R_+$.

Означення 3. Рух системи (1) є стійким щодо заданих величин (c_1, c_2, t_0, T) $0<c_1<c_2$ і $t_0<T<\infty$, якщо з умови $V(t_0,x_0)<c_1$ випливає, що $V(t,x(t))<c_2$ при всіх $t\in[t_0, t_0+T)$.

Зауваження 1. Означення 3 примикає до поняття практичної стійкості (див. [9] і бібліографію там) щодо множин $S(t_0)=\{x_0\in R^n : V(t_0,x_0)<c_1\}$ і $S(t)=\{x\in R^n : V(t,x)<c_2\}$, для яких $\partial S_0(t_0)\cap \partial S(t)=\varnothing$ при всіх $t\in J$.

Оцінка (5) функції $V(t,x)$ з леми 1 дозволяє вказати умови такого роду стійкості в нижченаведеному вигляді.

Теорема 2. *Нехай для системи* (1) *існує локально велика функція Ляпунова, виконуються всі умови леми* 1 *і, крім того, виконується нерівність*

$$(1-N(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} < \frac{c_2}{c_1} \tag{23}$$

при всіх $t\in[t_0,t_0+T)\subseteq J$. *Тоді рух системи* (1) (c_1,c_2,t_0,T) *стійкий.*

Доведення. З оцінки (5) випливає, що

$$V(t,x(t))<c_1(1-N(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} \tag{24}$$

при всіх $t\in[t_0,t_0+T)$. За виконання нерівності (23) із оцінки (24) випливає, що $V(t,x(t))<c_2$ при всіх $t\in[t_0,t_0+T)$.

Цим теорема 2 доведена.

5. Стійкість за Ляпуновим. Припустимо, що в системі (1) функції f і g істотно нелінійні.

Означення 4. Розв'язок $x(t)=0$ системи (1) стійкий, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ і будь-якого $t_0\in R_+$ існує $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$ таке, що якщо $\| x_0 \| < \delta(t_0,\varepsilon)$, то $\| x(t,t_0,x_0) \| < \varepsilon$ при всіх $t\geqslant t_0$.

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3. *Припустимо, що для системи* (1) *існує функція Ляпунова, визначена на* $R_+\times D$, *і виконуються умови*:

1) $V(t,x)=0$ *при всіх* $t\in R_+$, *якщо* $x=0$;

2) існує функція $a\in K$ *— класу Хана і* $a(\| x \|)\leqslant V(t,x)$ *при всіх* $(t,x)\in R_+\times D$;

3) $N(t)=(p+q-2)\left(V^{p-1}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds + V^{q-1}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} a_2(s)ds\right)<1$ *при всіх* $t\geqslant t_0$;

4) існує деяке значення $0 < k < \infty$ *таке, що*

$$(1 - N(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} \leqslant k.$$

Тоді розв'язок $x(t) = 0$ *істотно нелінійної системи* (1) *стійкий.*

Доведення. Для заданого значення $0 < \varepsilon < r$ з умови *2* теореми 3 випливає, що $a(\varepsilon) \leqslant V(t, x)$ при всіх $t \in R_+$, якщо $\|x\| = \varepsilon$. За виконання умов *3*, *4* теореми 3 для фіксованого $t_0 \in R_+$ можна вибрати $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ так, що при $\|x_0\| < \delta$ буде виконуватися нерівність $kV(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$. Це випливає з неперервності функції $V(t, x)$ і умови *1* теореми 3. Далі, нехай розв'язок $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ виходить з області $\|x_0\| < \delta$ і при деякому $t_1 > t_0$ має місце співвідношення $\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \varepsilon$.

Оскільки

$$a(\varepsilon) \leqslant V(t, x(t_1, t_0, x_0)) \leqslant kV(t_0, x_0) < a(\varepsilon),$$

отримуємо протиріччя, яке показує, що не існує значення t_1, при якому розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ досягає поверхні кулі $\|x\| = \varepsilon$. Цим теорема 3 доведена.

Теорема 4. *Якщо умову 2 у теоремі* 3 *замінити такою*:

2′) існують функції $a, b \in K$ — класу Хана і $a(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\|x\|)$ при $(t, x) \in R_+ \times D$, тоді розв'язок $x(t) = 0$ системи (1) *буде рівномірно стійким.*

Доведення. За умови *2′* в теоремі 4 величину $\delta(\varepsilon)$ можна вибрати незалежною від t_0 з умови $b(\delta) < a(\varepsilon)$. Тоді, якщо виконуються умови *1*, *2′*, *3* і *4* теореми 3, то при $\|x_0\| < \delta$ має місце оцінка $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всіх $t \geqslant t_0$ рівномірно по $t_0 \in R_+$. Цим теорема 4 доведена.

6. Стійкість в неавтономній афінній системі. Розглянемо неавтономну афінну систему диференціальних рівнянь збуреного руху (пор. [6])

$$dx / dt = A(t)x + \psi(t, x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(t, x) u_i(t) + Bu(t), \tag{25}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{26}$$

де $x \in R^n$, $A(t)$ — $n \times n$-матриця з неперервними елементами на будь-якому скінченному інтервалі; $\psi(t, x)$ — нелінійна вектор-функція, $\psi(t, 0) = 0$ при всіх $t \in R_+$; $g_i(t, x)$ — неперервні, нелінійні функції, $g_i(t, 0) = 0$ при всіх $t \in R_+$ і $i = 1, 2, \ldots, m$; B — $n \times m$-постійна матриця; $u(t) \in R^m$ — вектор керування. Про нелінійні вектор-функції $\psi(t, x)$ і $g_i(t, x)$ зробимо такі припущення:

A_1. Існують неперервна функція $a_1(t): R_+ \to R_+$ і постійна $\gamma > 0$ такі, що

$$\|\psi(t, x)\| \leqslant a_1(t) \|x(t)\|^{1+\gamma}$$

в області значень $(t, x) \in R_+ \times D$.

A_2. При всіх $i = 1, 2, \ldots, m$ існує неперервна функція $a_2(t): R_+ \to R_+$ і постійна $\xi > 1$ такі, що

$$\|g_i(t, x(t))\| \leqslant a_2(t) \|x(t)\|^{\xi}$$

в області значень $(t,x)\in R_+\times D$.

A_3. Існує керування $u(t)=Lx(t)$, L — $n\times m$-постійна матриця, таке, що

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T (A(t)+BL)x\leqslant 0 \tag{27}$$

для деякої функції $V(t,x)>0$ при всіх $t\in R_+$ і $x\in D\setminus\{0\}$, $V(t,0)=0$.

Очевидно, що за виконання умов A_1, A_2 система (25) є істотно нелінійною і якісні властивості її розв'язків можуть бути досліджені на основі леми 1. Покажемо це на прикладі аналізу рівномірної стійкості нульового розв'язку системи (25).

Нехай функція $V(t,x)$ задовольняє умову *2′* теореми 4. За виконання припущень $A_1 - A_3$ знайдуться функції $\overline{a}_1(t), \overline{a}_2(t): R_+\to R_+$ такі, що

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T \psi(t,x)\leqslant \overline{a}_1(t)V^p(t,x), \quad p>1, \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T g_i(t,x)\,(Lx(t))_i\leqslant \overline{a}_2(t)V^q(t,x), \tag{29}$$

де $1<p<q<\infty$.

З огляду на оцінки (27)—(29) для повної похідної функції $V(t,x)$ на розв'язках системи (25) отримаємо нерівність

$$\frac{dV}{dt}(t,x)\leqslant \overline{a}_1(t)V^p(t,x)+\overline{a}_2(t)V^q(t,x) \tag{30}$$

при всіх значеннях $(t,x)\in R_+\times D$.

Далі скористаємося теоремою 4. За умови *2′* виберемо $\delta(\varepsilon)>0$ з нерівності $b(\delta)<a(\varepsilon)$ при заданій величині $\varepsilon>0$. За початкових умов $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$ маємо $V(t_0,x_0)\leqslant b(\delta)$. З огляду на це, умову (4) леми 1 перепишемо у вигляді нерівності

$$\overline{N}(t)=(p+q-2)\left(b^{p-1}(\delta)\int_{t_0}^{t}\overline{a}_1(s)\,ds+b^{q-1}(\delta)\int_{t_0}^{t}\overline{a}_2(s)\,ds\right)<1 \tag{31}$$

і припустимо її виконання при всіх $t\geqslant t_0$. Оцінка (5) функції $V(t,x)$ на розв'язках системи (25) набуває вигляду

$$V(t,x(t))\leqslant b(\delta)(1-\overline{N}(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} \tag{32}$$

при всіх $t\geqslant t_0$. Якщо виконується умова

$$(1-\overline{N}(t))^{-\frac{1}{p+q-2}}<\frac{a(\varepsilon)}{b(\delta)} \tag{33}$$

при всіх $t \geqslant t_0$, то розв'язок $x(t)$ системи (25) залишається в області $\|x\| < \varepsilon$ при всіх $t \geqslant t_0$. Дійсно, нехай це не так і існує значення $t_1 > t_0$ таке, що $\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \varepsilon$. При цьому

$$a(\varepsilon) \leqslant V(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \leqslant b(\delta)(1 - \bar{N}(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} < a(\varepsilon). \tag{34}$$

Отримане протиріччя показує, що не існує значення $t_1 > t_0$, при якому $\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \varepsilon$.

Таким чином, умови (27)—(29) і (31)—(33) є достатніми для рівномірної стійкості нульового розв'язку системи (25) за наявності функції $V(t, x)$, що задовольняє умови теореми 4.

Зауваження 2. За виконання припущення A_3 при керуванні $u(t) = Lx(t)$ лінійне наближення афінної системи (25) є нейтрально стійким.

Підсумки. Для розглянутих типів рівнянь збуреного руху (1), (18) і (25) обговорюється проблема прямого методу Ляпунова: отримання оцінки допоміжної функції на розв'язках відповідної системи рівнянь та встановлення умов еквіобмеженості, стійкості при великих початкових відхиленнях і стійкості за Ляпуновим. Підхід до розв'язання цих проблем, запропонований у даній роботі, може бути продуктивним у задачах якісного аналізу руху істотно нелінійних систем, що мають місце в теорії коливань і нелінійній динаміці [10, 11].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Москва, Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1950. 472 с.
2. Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A. Stability analysis of nonlinear systems. 2 ed. Basel: Birkhäuser, 2015. 329 p.
3. Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional differntial equations: Advances and applications. New York: Wiley, 2016. 368 p.
4. Martynyuk A.A. Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. 322 p.
5. Pachpatte B.G. Inequalities for differential and integral equations. San Diego: Academic Press, 1998. 611 p.
6. N'Doye I. Généralisation du lemme de Gronwall—Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires: These PhD / Université Henri Poincaré — Nancy I; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca. Nancy, 2011. 202 p.
7. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. Москва: Мир, 1974. 464 с.
8. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Mathematical Society of Japan, 1966. 223 p.
9. Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A. Practical stability of nonlinear systems. Singapore: World Scientific, 1990. 207 p.
10. Martynyuk A.A., Chernienko V.A. Sufficient stability conditions for polynomial systems. *Int. Appl. Mech.* 2020. **56**, № 1. P. 13—21. https://doi.org/10.1007/s10778-020-00992-1
11. Martynyuk A.A., Khusainov D.Ya., Chernienko V.A. Constructive estimation of the Lyapunov function for quadratic nonlinear systems. *Int. Appl. Mech.* 2018. **54**, № 3. P. 346—357. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0886-y

Надійшло до редакції 17.02.2021

REFERENCES

1. Lyapunov, A.M. (1950). The general problem of the stability of motion. Moscow, Leningrad: Gostehteoretizdat (in Russian).
2. Lakshmikantham, V., Leela S. & Martynyuk, A.A. (2015). Stability analysis of nonlinear systems. 2 ed. Basel: Birkhäuser.
3. Corduneanu, C., Li, Y. & Mahdavi, M. (2016). Functional differential equations: Advances and applications. New York: Wiley.
4. Martynyuk, A.A. (2007). Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
5. Pachpatte, B.G. (1998). Inequalities for differential and integral equations. San Diego: Academic Press.
6. N'Doye, I. (2011). Généralisation du lemme de Gronwall–Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires. (These PhD). Université Henri Poincaré — Nancy I; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca. Nancy, Français.
7. Director, S.W. & Rohrer, R.A. (1972). Introduction to systems theory. New York: Mc Gram — Hill Book Com.
8. Yoshizawa, T. (1966). Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Mathematical Society of Japan.
9. Lakshmikantham, V., Leela, S. & Martynyuk, A.A. (1990). Practical stability of nonlinear systems. Singapore: World Scientific.
10. Martynyuk, A.A. & Chernienko, V.A. (2020). Sufficient stability conditions for polynomial systems. Int. Appl. Mech., 56, No. 1, pp. 13-21. https://doi.org/10.1007/s10778-020-00992-1
11. Martynyuk, A.A., Khusainov, D.Ya. & Chernienko, V.A. (2018). Constructive estimation of the Lyapunov function for quadratic nonlinear systems. Int. Appl. Mech., 54, No. 3, pp. 346-357. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0886-y

Received 17.02.2021

A.A. Martynyuk, V.O. Chernienko
S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ON THE PROBLEM OF STABILITY OF A MOTION
OF ESSENTIALLY NONLINEAR SYSTEMS

This article discusses essentially nonlinear systems. Following the approach of applying the pseudolinear inequalities developed in a number of works, new estimates for the variation of Lyapunov functions along solutions of the considered systems of equations are obtained. Based on these estimates, we obtain sufficient conditions for the equiboundedness of solutions of second-order systems and sufficient conditions for the stability of an essentially nonlinear system under large initial perturbations. Conditions for the stability of affine systems are also obtained.

Keywords: *estimation of the Lyapunov function, essentially nonlinear system, motion, resistance to large disturbances.*