https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.028
УДК 517.988

В.В. Семенов, https://orcid.org/0000-0002-3280-8245
Д.С. Сірик, https://orcid.org/0000-0002-8828-6861
О.С. Харьков, https://orcid.org/0000-0002-9049-4846

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: semenov.volodya@gmail.com, sirykds@gmail.com, olehharek@gmail.com

Збіжність методу операторної екстраполяції

Представлено членом-кореспондентом НАН України С.І. Ляшком

Одним з популярних напрямів сучасного прикладного нелінійного аналізу є дослідження варіаційних нерівностей та розробка методів апроксимації їх розв'язків. Багато актуальних проблем дослідження операцій, оптимального керування та математичної фізики можуть бути записані у формі варіаційних нерівностей. Негладкі задачі оптимізації можна ефективно розв'язувати, якщо їх переформулювати як сідлові задачі, а до останніх застосувати сучасні наближені алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей. З появою генеруючих змагальних нейронних мереж (generative adversarial network, GAN) стійкий інтерес до застосування та дослідження ітераційних алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник і в середовищі фахівців в галузі машинного навчання. Дана робота присвячена дослідженню двох нових наближених алгоритмів з брегманівською проєкцією для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі. Перший алгоритм, який ми називаємо алгоритмом операторної екстраполяції, отриманий заміною в методі Маліцького—Тама евклідової метрики на дивергенцію Брегмана. Привабливою рисою алгоритму є всього одне обчислення на ітераційному кроці проєкції Брегмана на допустиму множину. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевих констант і обчислень значень оператора в додаткових точках. Для варіаційних нерівностей з псевдомонотонними, ліпшицевими та секвенційно слабко неперервними операторами, що діють в гільбертовому просторі, доведені теореми про слабку збіжність методів.

Ключові слова: *варіаційна нерівність, псевдомонотонність, секвенційна слабка неперервність, дивергенція Брегмана, операторна екстраполяція, адаптивність, слабка збіжність.*

Багато актуальних задач дослідження операцій, оптимального керування та математичної фізики можна подати у формі варіаційних нерівностей. Створення та дослідження алгоритмів розв'язання останніх є напрямом прикладного нелінійного аналізу, який активно розвивається. Зазначимо, що іноді негладкі задачі оптимізації можна ефективно розв'язувати, якщо їх переформулювати як сідлові задачі, а до останніх застосувати наближені

Цитування: Семенов В.В., Сірик Д.С., Харьков О.С. Збіжність методу операторної екстраполяції. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 4. С. 28—35. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.028

алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [1]. З появою генеруючих змагальних нейронних мереж (generative adversarial network, GAN) стійкий інтерес до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник і в середовищі фахівців в галузі машинного навчання [2].

Найбільш відомим наближеним методом для варіаційних нерівностей є екстраградієнтний алгоритм Корпелевич [3]. Дослідженню цього алгоритму присвячена велика кількість публікацій [1, 4—7]. Зокрема, пропонувалися модифікації екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проектуванням на допустиму множину [4, 5].

Ефективним сучасним варіантом екстраградієнтного методу є проксимальний дзеркальний метод Немировського [1]. Даний метод можна проінтерпретувати як варіант екстраградієнтного методу з проєктуванням відносно дивергенції Брегмана [8]. Він дозволяє іноді ефективно використовувати структуру допустимої множини задачі. Наприклад, для стандартного симплекса в якості відстані можна взяти дивергенцію Кульбака—Лейблера (дивергенція Брегмана, побудована за негативною ентропією) та отримати оператор проєктування на симплекс, що явно обчислюється. Також цікавий метод двоїстої екстраполяції для варіаційних нерівностей запропонував Нестеров [6]. Адаптивний варіант проксимального дзеркального методу Немировського вивчений в [7].

Ще на початку 1980-х років Попов запропонував модифікацію класичного алгоритмуЕрроу-Гурвіца для пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій [9]. В роботі [10] досліджена модифікація методу Попова для варіаційних нерівностей з монотонними операторами, що діють в гільбертовому просторі. А в статті [11] запропоновано двоетапний проксимальний алгоритм для задач про рівновагу (нерівностей Кі Фаня). У роботах [12, 13] досліджений двоетапний проксимальний дзеркальний метод, що є модифікацією двоетапного проксимального алгоритму [11] з використанням дивергенції Брегмана замість евклідової відстані.

Зауважимо, що останнім часом алгоритм Попова для варіаційних нерівностей та сідлових задач став добре відомий серед фахівців з машинного навчання під назвою "Extrapolation from the Past" [2]. Подальший розвиток цього кола ідей призвів до появи, так званого, "forward-reflected-backward algorithm" [14] та близьких методів [15].

Дана робота присвячена дослідженню двох нових алгоритмів з брегманівською проєкцією для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі.

Перший алгоритм, який ми називаємо алгоритмом операторної екстраполяції, отриманий заміною в методі з [14] (forward-reflected-backward algorithm) евклідової метрики на дивергенцію Брегмана. Привабливою рисою алгоритму є всього одне обчислення на ітераційному кроці проєкції Брегмана на допустиму множину.

Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевих констант і обчислень значень оператора в додаткових точках.

Для варіаційних нерівностей з псевдомонотонними, ліпшицевими та секвенційно слабко неперервними операторами, що діють в гільбертовому просторі, доведені теореми про слабку збіжність методів.

Допоміжні відомості. Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$.

Нехай функція $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ строго опукла та диференційовна за Гато на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, де $\operatorname{dom}\varphi = \{x \in H : \varphi(x) < +\infty\}$. Дивергенція Брегмана (відстань Брегмана), що відповідає функції φ, задається формулою [8]

$$V(a,b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi, \ \ \forall b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi .$$

Приклади практично важливих дивергенцій Брегмана наведено в [8]. Для функції $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ маємо $V(x,y) = \dfrac{1}{2}\|x-y\|^2$. Для функції від'ємної ентропії

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \ln x_i , \quad x \in \mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \ x_i \geqslant 0\} ,$$

отримуємо дивергенцію Кульбака—Лейблера

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \ln(x_i/y_i) - \sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i), \ \ x \in \mathbb{R}_+^m, \ y \in \mathbb{R}_{++}^m = \operatorname{int}(\mathbb{R}_+^m) .$$

Функція $\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln x_i$ породжує на множині $\mathbb{R}_{++}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \ x_i > 0\}$ дивергенцію Ітакури—Сайто $V(x,y) = \sum_{i=1}^{m}(x_i/y_i - \ln(x_i/y_i) - 1)$.

Має місце корисна 3-точкова тотожність [8]:

$$V(a,c) - V(a,b) - V(b,c) = (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a-b) .$$

Нехай K — непорожня, замкнена та опукла підмножина $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$. Якщо функція φ сильно опукла з константою $\mu > 0$ на множині K, то з означення дивергенції Брегмана випливає оцінка

$$V(a,b) \geqslant \frac{\mu}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a \in K, \ \forall b \in K .$$

Розглянемо сильно опуклі задачі мінімізації вигляду

$$P_x^K(a) = \arg\min_{y \in K}\{-(a, y-x) + V(y,x)\} \quad \forall a \in H, \ \forall x \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi . \tag{1}$$

Задача (1) має єдиний розв'язок $z \in K$ [8], причому

$$-(a, y-z) + (\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), y-z) \geqslant 0 \quad \forall y \in K .$$

Останню нерівність, урахувавши 3-точкову тотожність, можна записати у вигляді

$$-(a, y-z) + V(y,x) - V(y,z) - V(z,x) \geqslant 0 \quad \forall y \in K .$$

Зауваження 1. Точка $P_x^K(a)$ у випадку $\varphi(\cdot) = \dfrac{1}{2}\|\cdot\|^2$ співпадає метричною проекцією $P_K(x+a) = \arg\min_{y \in K}\|y - (x+a)\|$.

Далі будемо вважати, що виконується умова:

(A1) функція φ сильно опукла з константою 1 на множині $C \subseteq \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ та рівномірно неперервно диференційовна за Фреше на обмежених підмножинах C, причому оператор $\nabla\varphi$ секвенційно слабко неперервний.

Варіаційна нерівність. Нехай C — непорожня підмножина простору H, A — оператор, що діє з H в H. Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: \quad (Ax, y-x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C, \tag{2}$$

множину розв'язків якої позначимо S.

Припустимо, що виконано умови:

• множина $C \subseteq H$ опукла та замкнена;

• оператор $A: H \to H$ псевдомонотонний, секвенційно слабко неперервний та ліпшицевий з константою $L > 0$ на C;

• $S \neq \varnothing$.

Нагадаємо, що оператор називають псевдомонотонним на C, якщо для всіх x, $y \in C$ з $(Ax, y-x) \geqslant 0$ випливає $(Ay, y-x) \geqslant 0$.

Зазначимо, що при виконанні наведених умов множина S опукла та замкнена.

Метод операторної екстраполяції. Для розв'язання варіаційної нерівності (2) пропонуємо новий алгоритм, який є модифікацією методу з [14] (forward-reflected-backward algorithm). Замість евклідової метрики ми використовуємо дивергенцію Брегмана. Привабливою рисою алгоритму є всього одне обчислення на ітераційному кроці значення оператора P_x^C.

Алгоритм 1. Операторна екстраполяція. *Обираємо* $x_0 \in H$, $x_1 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, *послідовність* (λ_n), *що задовольняє умову* $\{\inf_n \lambda_n, \sup_n \lambda_n\} \subseteq \left(0, \frac{1}{2L}\right)$. *Покладаємо* $n = 1$.

1. *Обчислити*

$$x_{n+1} = P_{x_n}^C(-\lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1})).$$

2. *Якщо* $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, *то СТОП, інакше перейти до* ***1***.

Зауваження 2. Якщо обмеження відсутні ($C = H$) та $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ алгоритм операторної екстраполяції співпадає з алгоритмом екстраполяції з минулого.

Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність

$$-(\lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), y - x_{n+1}) \leqslant V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) - V(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in C. \tag{3}$$

Нерівність (3) дає обґрунтування правила зупинки. Дійсно, якщо $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, то з (3) випливає $(Ax_n, y - x_n) \geqslant 0$ для всіх $y \in C$, тобто $x_n \in S$.

Доведення збіжності алгоритму 1 ґрунтується на такій лемі.

Лема 1. Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 1, та $z \in S$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} &V(z, x_{n+1}) + \lambda_n(Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z) + \lambda_n L V(x_{n+1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant V(z, x_n) + \lambda_{n-1}(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z) + \lambda_{n-1} L V(x_n, x_{n-1}) - (1 - \lambda_{n-1}L - \lambda_n L) V(x_{n+1}, x_n). \end{aligned}$$

З нерівності леми 1 можна зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}(V(z', x_n) + \lambda_{n-1}(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z') + \lambda_{n-1} L V(x_n, x_{n-1}))$$

та $\sum_{n=1}^{\infty} V(x_{n+1}, x_n) < +\infty$. Спираючись на [14] отримуємо, що породжена алгоритмом 1 послідовність (x_n) слабко збіжна до деякої точки $z \in S$.

Адаптивний алгоритм операторної екстраполяції. Алгоритм 1 використовує інформацію про константу Ліпшиця оператора A. Розглянемо нижче модифікацію алгоритму 1 з простим правилом оновлення параметрів λ_n без знання константи Ліпшиця.

Алгоритм 2. Операторна екстраполяція з адаптивним регулюванням. *Обираємо* $x_0 \in H$, $x_1 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *та* $\lambda_0, \lambda_1 > 0$. *Покладаємо* $n = 1$.

1. *Обчислити*

$$x_{n+1} = P_{x_n}^{C}(-\lambda_n A x_n - \lambda_{n-1}(A x_n - A x_{n-1})).$$

2. *Якщо* $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, *то СТОП, інакше перейти до* ***3.***

3. *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\sqrt{2V(x_{n+1}, x_n)}}{\|A x_{n+1} - A x_n\|}\right\}, & \text{якщо} \quad A x_{n+1} \neq A x_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ *та перейти до* ***1.***

Зауваження 3. Послідовність (λ_n) незростаюча та обмежена знизу числом $\min\{\lambda_1, \tau L^{-1}\}$. Отже, існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$.

Має місце

Лема 2. Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 2, та $z \in S$ виконується нерівність

$$V(z, x_{n+1}) + \lambda_n (A x_n - A x_{n+1}, x_{n+1} - z) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant V(z, x_n) + \lambda_{n-1}(A x_{n-1} - A x_n, x_n - z) +$$

$$+ \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} V(x_n, x_{n-1}) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(x_{n+1}, x_n).$$

Доведення. Нехай $z \in S$. Маємо

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + (\lambda_n A x_n + \lambda_{n-1}(A x_n - A x_{n-1}), z - x_{n+1}). \tag{4}$$

Скористаємось псевдомонотонністю оператора A. Маємо

$$(\lambda_n A x_n + \lambda_{n-1}(A x_n - A x_{n-1}), z - x_{n+1}) = \lambda_n (A x_n - A x_{n+1}, z - x_{n+1}) +$$

$$+ \lambda_{n-1}(A x_n - A x_{n-1}, z - x_{n+1}) + \underbrace{\lambda_n (A x_{n+1}, z - x_{n+1})}_{\leqslant 0} \leqslant$$

$$+ \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} V(x_n, x_{n-1}) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(x_{n+1}, x_n). \tag{5}$$

З (4) та (5) випливає нерівність

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n(Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) +$$

$$+\lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n) + \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}).$$

Використовуючи правило перерахунку параматра λ_n, оцінимо зверху доданок $\lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1})$. Маємо

$$\lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}) \leqslant \lambda_{n-1}\|Ax_n - Ax_{n-1}\|\|x_n - x_{n+1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\sqrt{2V(x_n, x_{n-1})}\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}V(x_n, x_{n-1}) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{2\lambda_n}\|x_n - x_{n+1}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}V(x_n, x_{n-1}) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}V(x_{n+1}, x_n).$$

Приходимо до нерівності

$$V(z, x_{n+1}) + \lambda_n(Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z) + \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}V(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant V(z, x_n) + \lambda_{n-1}(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z) +$$

$$+\tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}V(x_n, x_{n-1}) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)V(x_{n+1}, x_n),$$

що і треба було довести.

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. Нехай множина $C \subseteq H$ — опукла та замкнена, оператор $A: H \to H$ — псевдомонотонний, ліпшицевий з константою $L > 0$ та секвенційно слабко неперервний, $S \neq \varnothing$. Припустимо, що виконане припущення A1. Тоді породжена алгоритмом 2 послідовність (x_n) слабко збіжна до деякої точки $z \in S$.

Зауваження 4. Правило оновлення на кроці 3 в алгоритмі 2 можна змінити на таке

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\dfrac{\sqrt{2V(x_{n+1}, x_n)}}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|}\right\}, & \text{якщо} \quad Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакце}. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1 буде вірною також для варіанта алгоритму 2 з правилом (6).

Зауваження 5. Якщо оператор A монотонний, то теорема 1 справедлива без припущення про секвенційну слабку неперервність оператора A.

Робота виконана при фінансовій підтримці МОН України («Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0119U100337) та НАН України («Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», 0119U101608).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optimization*. 2004. **15**. P. 229—251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629
2. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551. 2018.
3. Korpelevich G. M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. **12**, No. 4. P. 747—756.
4. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control and Optimization*. 2000. **38**. P. 431—446. https://doi.org/10.1137/S0363012998338806
5. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *J. Automation and Inform. Sci*. 2015. **47**, Iss. 7. P. 31-46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40
6. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. *Math. Programming*. 2007. **109**, Iss. 2-3. P. 319—344. https://doi.org/10.1007/s10107-006-0034-z
7. Denisov S. V., Semenov V. V., Stetsyuk P. I. Bregman Extragradient Method with Monotone Rule of Step Adjustment. *Cybern. Syst. Analysis*. 2019. **55**, Iss. 3. P. 377—383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5
8. Beck A. First-Order Methods in Optimization. 2017. 479 p. https://doi.org/10.1137/1.9781611974997
9. Popov L. D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1980. **28**, Iss. 5. P. 845—848. https://doi.org/10.1007/BF01141092
10. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities. *Cyberne. Syst. Analysis*. 2014. **50**, Iss. 2. P. 271—277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8
11. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: Goldengorin B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115, Springer, 2016. P. 315—325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1—10
12. Semenov V. V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. *Cybern. Syst. Analysis*. 2017. **53**, Iss. 2. P. 234—243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9
13. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 836. Springer, Cham, 2019. P. 50—58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6
14. Malitsky Y., Tam M. K. A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. *SIAM Journal on Optimization*. 2020. **30**, No. 2. P. 1451—1472. https://doi.org/10.1137/18M1207260
15. Csetnek E. R., Malitsky Y., Tam M. K. Shadow Douglas-Rachford Splitting for Monotone Inclusions. *Appl Math Optim*. 2019. **80**. P. 665—678. https://doi.org/10.1007/s00245-019-09597-8

Надійшло до редакції 09.04.2021

REFERENCES

1. Nemirovski, A. (2004). Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. SIAM J. Optimization, 15, pp. 229-251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629
2. Gidel, G., Berard, H., Vincent, P., Lacoste-Julien, S. (2018). A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551.
3. Korpelevich, G. M. (1976). An extragradient method for finding saddle points and for other problems. Matecon, 12, No. 4, pp. 747-756.
4. Tseng, P. (2000). A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. SIAM J, Control and Optimization, 38, pp. 431-446. https://doi.org/10.1137/S0363012998338806
5. Verlan, D. A., Semenov, V. V., Chabak, L. M. (2015). A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. J. Automation and Inform. Sci., 47, No. 7, pp. 31-46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40

6. Nesterov, Yu. (2007). Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. Math. Programming, 109, Iss. 2-3, pp. 319-344. https://doi.org/10.1007/s10107-006-0034-z
7. Denisov, S. V., Semenov, V. V., Stetsyuk, P. I. (2019). Bregman Extragradient Method with Monotone Rule of Step Adjustment. Cybern. Syst. Analysis, 55, Iss. 3, pp. 377-383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5
8. Beck, A. (2017). First-Order Methods in Optimization. 479 p. https://doi.org/10.1137/1.9781611974997
9. Popov, L. D. (1980). A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 28, Iss. 5, pp. 845-848. https://doi.org/10.1007/BF01141092
10. Malitsky, Yu. V. & Semenov, V. V. (2014). An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities. Cybern. Syst. Analysis, 50, Iss. 2, pp. 271-277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8
11. Lyashko, S. I. & Semenov, V. V. (2016). A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: Goldengorin, B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, pp. 315-325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
12. Semenov, V. V. (2017). A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. Cybernetics and Systems Analysis, 53, Iss. 2, pp. 234-243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9
13. Chabak, L., Semenov, V. & Vedel, Y. (2019). A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 836. Springer, Cham, pp. 50-58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6
14. Malitsky, Y. & Tam, M. K. (2020). A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. SIAM Journal on Optimization, 30, No. 2, pp. 1451-1472. https://doi.org/10.1137/18M1207260
15. Csetnek, E. R., Malitsky, Y. & Tam, M. K. (2019). Shadow Douglas-Rachford Splitting for Monotone Inclusions. Appl Math Optim., 80, pp. 665-678. https://doi.org/10.1007/s00245-019-09597-8

Received 09.04.2021

V.V. Semenov, https://orcid.org/0000-0002-3280-8245
D.S. Siryk, https://orcid.org/0000-0002-8828-6861
O.S. Kharkov, https://orcid.org/0000-0002-9049-4846

Taras Shevchenko National University of Kyiv
E-mail: semenov.volodya@gmail.com, sirykds@gmail.com,
olehharek@gmail.com

CONVERGENCE OF THE OPERATOR EXTRAPOLATION METHOD

One of the popular areas of the modern applied nonlinear analysis is the study of variational inequalities and the development of methods for approximating their solutions. Many important problems of the research of operations, optimal control theory, and mathematical physics can be written in the form of variational inequalities. Non-smooth optimization problems can be solved effectively, if they are reformulated as saddle problems, and modern approximate algorithms for solving the variational inequalities are applied to the obtained saddle problems. With the advent of generating adversarial neural networks (GANs), the strong interest in the use and investigation of iterative algorithms for solving the variational inequalities arose in the ML-community. This paper is devoted to the study of two new approximate algorithms with the Bregman projection for solving the variational inequalities in a Hilbert space. The first algorithm, which we call the operator extrapolation algorithm, is obtained by replacing the Euclidean metric in the Malitsky–Tam method with the Bregman divergence. An attractive feature of the algorithm is only one computation at the iterative step of the Bregman projection onto the feasible set. The second algorithm is an adaptive version of the first, where the used rule for updating the step size does not require knowledge of Lipschitz constants and the calculation of operator values at additional points. For variational inequalities with pseudo-monotone, Lipschitz-continuous, and sequentially weakly continuous operators acting in a Hilbert space, some weak convergence theorems are proved.

Keywords: *variational inequality, pseudo-monotonicity, sequential weak continuity, Bregman divergence, operator extrapolation, adaptivity, weak convergence.*