ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003
УДК 517.958:512.816

О.В. Локазюк, https://orcid.org/0000-0001-9663-251X

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: sasha.lokazuik@gmail.com

Ліївські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Г. Нікітіним

Розв'язано задачу повної групової класифікації класу нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з двома залежними змінними над дійсним полем. Доведення суттєво використовує опис допустимих перетворень цього класу та теорему Лі про реалізації алгебр Лі на прямій.

Ключові слова: *лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь, ліївські симетрії, алгебраїчний метод групової класифікації, група еквівалентності.*

Опис трансформаційних властивостей і класифікація ліївських симетрій — класичні задачі групового аналізу звичайних диференціальних рівнянь (див. огляди в роботах [1, 2]), хоча тут є багато відкритих проблем, особливо щодо систем звичайних диференціальних рівнянь, зокрема, і лінійних. Важливим класом таких систем є клас $\bar{\mathcal{L}}$ нормальних лінійних систем з n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\mathbf{x}_{tt} = A(t)\mathbf{x}_t + B(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{1}$$

на n невідомих функцій $x^1,\dots,x^n$, $\mathbf{x}(t)=(x^1(t),\dots,x^n(t))^{\mathrm{T}}$, $n\geqslant 2$. Набір $\theta=(A,B,\mathbf{f})$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворюють довільні гладкі $n\times n$ матричнозначні функції A та B змінної t і довільна гладка векторнозначна функція $\mathbf{f}$ змінної t. У літературі відомі лише окремі результати щодо симетрійних та трансформаційних властивостей систем з класу $\bar{\mathcal{L}}$. Ліївські симетрії систем із класу $\bar{\mathcal{L}}$ з $A=0$ та сталою матрицею B при $n\leqslant 6$ розглянуто в серії робіт С. Вафа Соха [3], С.В. Мелешка [4], Р. Компоамор-Стурсберга [5, 6]. Задачу групової класифікації таких систем у випадку довільного $n\geqslant 2$ вичерпно розв'язано в [7]. Весь клас $\bar{\mathcal{L}}$, включно із системами з несталими значеннями матриць довільних елементів A та B, розглядали з точки зору ліївських симетрій лише для $n=2$ в [8—10] і для $n=3$ в [11].

Ц и т у в а н н я: Локазюк О.В. Ліївські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 5. С. 3—11. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003

Як приклад реалізації запропонованого в [2] підходу в цій статті виконано повну групову класифікацію класу $\bar{\mathcal{L}}$ у випадку двох залежних змінних над дійсним полем.

Очевидно, що звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ класу $\bar{\mathcal{L}}$ містить підгрупу, породжену перетвореннями

$$\tilde{t}=t,\quad \tilde{\mathbf{x}}=H(t)\mathbf{x}+\mathbf{h}(t), \tag{2а}$$

$$\tilde{A}=(HA+2H_t)H^{-1},\quad \tilde{B}=(HB-\tilde{A}H_t+H_{tt})H^{-1},\quad \mathbf{f}=H\mathbf{f}+\mathbf{h}_{tt}-\tilde{A}\mathbf{h}_t-\tilde{B}\mathbf{h}, \tag{2б}$$

де H — довільна гладка невироджена $n\times n$ матричнозначна функція змінної t, а $\mathbf{h}$ — довільна гладка векторнозначна функція змінної t. Будь-яку систему $\bar{L}_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}$ можна відобразити за допомогою перетворення вигляду (2), де H задовольняє матричне рівняння $H_t+1/2HA=0$, а $\mathbf{h}$ — частинний розв'язок системи $\bar{L}_\theta$, у систему $\bar{L}_{\tilde{\theta}}$ з того ж класу з $\tilde{A}=0$, $\tilde{B}=H(B-1/2A_t+1/4A^2)H^{-1}$ та $\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Таким чином, задачу групової класифікації класу $\bar{\mathcal{L}}$ зводимо до задачі групової класифікації підкласу $\mathcal{L}'$, який виокремлено зв'язками $A=0$ та $\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Після тривіальної репараметризизації класу $\mathcal{L}'$ через виключення A та $\mathbf{f}$ з набору довільних елементів цього класу і перепозначення B як V системи з класу $\mathcal{L}'$ набувають вигляду

$$\mathbf{x}_{tt}=V(t)\mathbf{x}, \tag{3}$$

де V — довільна гладка $n\times n$ матричнозначна функція змінної t, $V=V(t)=(V^{ab}(t))^n_{a,b=1}$. Далі L'_V — система з класу $\mathcal{L}'$, яка відповідає фіксованому значенню матричнозначної параметр-функції V.

Розглянемо підклас $\mathcal{L}'_0$ класу $\mathcal{L}'$, в який входять системи L'_V з $V(t)=v(t)E$, $t\in\mathcal{I}$, де v пробігає множину функцій змінної t, тобто $\{V(t)\,|\,t\in\mathcal{I}\}\subseteq\langle E\rangle$. Тут і далі E — одинична $n\times n$ матриця. Для таких V можна казати, що V пропорційна E із залежним від часу коефіцієнтом пропорційності. Іншими словами, підклас $\mathcal{L}'_0$, який є сингулярним у класі $\mathcal{L}'$, виокремлено з класу $\mathcal{L}'$ алгебраїчними рівняннями

$$V^{ab}=0,\quad a\neq b,\qquad V^{11}=\dots=V^{nn}. \tag{4}$$

Доповненням сингулярного підкласу $\mathcal{L}'_0$ в $\mathcal{L}'$ є регулярний підклас $\mathcal{L}'_1:=\mathcal{L}'\setminus\mathcal{L}'_0$. Таким чином, $\mathcal{L}'=\mathcal{L}'_0\sqcup\mathcal{L}'_1$.

Теорема 1 ([2, теорема 4]). *Групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ класу $\mathcal{L}'$ складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t}=T(t),\quad \tilde{\mathbf{x}}=|T_t|^{1/2}C\mathbf{x}, \tag{5а}$$

$$\tilde{V}=\frac{1}{T_t^{\,2}}CVC^{-1}+\frac{2T_tT_{ttt}-3T_{tt}^{\,2}}{4T_t^{\,4}}E, \tag{5б}$$

де $T=T(t)$ — довільна функція змінної t, $T_t\neq0$, C — довільна стала невироджена $n\times n$ матриця. Група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_1$ та канонічна істотна група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_0$ збігаються з групою $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$.

За допомогою перетворень еквівалентності класу $\mathcal{L}'$ довільну систему із сингулярного підкласу $\mathcal{L}'_0$ можна звести до елементарної системи $\mathbf{x}_{tt}=\mathbf{0}$, алгебра інваріантності

$$\mathfrak{g}_0=\langle\partial_t,\partial_{x^a},t\partial_t,x^a\partial_t,t\partial_{x^a},x^a\partial_{x^b},tx^a\partial_t+x^ax^c\partial_{x^c},t^2\partial_t+tx^c\partial_{x^c}\rangle \tag{6}$$

якої ізоморфна алгебрі $\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{R})$ [12], а її розмірність дорівнює $(n+2)^2-1$.

Таким чином, задача групової класифікації класу $\mathcal{L}'$ зводиться до задачі групової класифікації його регулярного підкласу $\mathcal{L}'_1$.

Наслідок 2. *Максимальну алгебру лійвської інваріантності* $\mathfrak{g}_V$ *системи* L'_V *із класу* $\mathcal{L}'_1$ *утворюють векторні поля вигляду*

$$Q=\tau\partial_t+(1/2\,\tau_tx^a+\Gamma^{ab}x^b+\chi^a)\partial_{x^a},$$

де векторнозначна функція $\chi(t)=(\chi^1(t),\ldots,\chi^n(t))^{\mathrm{T}}$ *— довільний розв'язок системи* L'_V, $\tau(t)$ *— довільна гладка функція,* Γ *— довільна стала* $n\times n$ *матриця, які задовольняють класифікаційне рівняння*

$$\tau V_t=[\Gamma,V]-2\tau_tV+1/2\,\tau_{ttt}E. \tag{7}$$

Алгебра $\mathfrak{g}_V$ є напівпрямою сумою $\mathfrak{g}_V=\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}\ltimes\mathfrak{g}_V^{\mathrm{lin}}$, де $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{lin}}$ — абелевий ідеал, який пов'язаний з лінійною суперпозицією розв'язків, а $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$ — його доповняльна підалгебра, яку називають суттєвою алгеброю лійвської інваріантності системи L'_V. Алгебра $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$ обов'язково містить підалгебру $\mathfrak{s}_Q:=\{Q_\Gamma:=\Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a}\mid\Gamma\in\mathfrak{s}\}$, де $\mathfrak{s}$ — підалгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, подвійний централізатор якої збігається з нею, тобто $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathfrak{s}))=\mathfrak{s}$. Базис алгебри $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$ вичерпують:

• векторне поле $I=x^a\partial_{x^a}$, що породжує ядро лійвської алгебри інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}'}$,

• p векторних полів $Q_s=\Gamma_s^{ab}x^b\partial_{x^a}$, $s=1,\ldots,p$, де матриці $\Gamma_s=(\Gamma_s^{ab})$ утворюють базис підалгебри $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_V$ алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $0\leqslant p:=\dim\mathfrak{s}\leqslant\dim\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})=n^2-1$,

• k векторних полів $Q_{p+\iota}=\tau^\iota\partial_t+(1/2\,\tau^\iota_tx^a+\Gamma^{ab}_{p+\iota}x^b)\partial_{x^a}$ з лінійно незалежними t-компонентами τ^ι, $\iota=1,\ldots,k$, де $k\in\{0,1,2,3\}$.

Іншими словами, алгебру $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$ можна представити як $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\mathfrak{i}\oplus(\mathfrak{t}\ltimes\mathfrak{s}^{\mathrm{vf}})$, де $\mathfrak{i}:=\langle I\rangle$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$, що є спільним для всіх систем L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$, $\mathfrak{s}^{\mathrm{vf}}=\mathfrak{s}_V^{\mathrm{vf}}:=\langle Q_s,s=1,\ldots,p\rangle=$ $=\{\Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a}\mid\Gamma\in\mathfrak{s}\}$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$, $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_V:=\langle Q_{p+\iota},\iota=1,\ldots,k\rangle$ — підалгебра алгебри $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$. Більше того, $k:=\dim\mathfrak{t}\in\{0,1,2\}$ та $p:=\dim\mathfrak{s}^{\mathrm{vf}}\leqslant n^2-2n+1$ (див. доведення в [2]).

Спираючись на результати роботи [2], виконаємо повну групову класифікацію нормальних лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, тобто систем L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ вигляду

$$\mathbf{x}_{tt}=V(t)\mathbf{x},\qquad V(t)=\begin{pmatrix}V^{11}(t)&V^{12}(t)\\V^{21}(t)&V^{22}(t)\end{pmatrix}, \tag{8}$$

де $\mathbf{x}=(x^1,x^2)$, набір довільних елементів V пробігає множину гладких 2×2 матричнозначних функцій змінної t, які непропорційні одиничній матриці E.

Виберемо як базис алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ такий набір матриць:

$$S_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad S_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad S_3=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix},$$

які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[S_1,S_2]=-2S_1,\qquad [S_2,S_3]=-2S_3,\qquad [S_1,S_3]=-S_2.$$

Повний список $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-нееквівалентних підалгебр $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ вичерпують такі підалгебри: $\{0\}$, $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$, $\langle S_1+S_3\rangle$, $\langle S_1,S_2\rangle$ та $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Подвійні централізатори $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathfrak{s}))$ цих підалгебр відповідно дорівнюють $\{0\}$, $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$, $\langle S_1+S_3\rangle$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ та $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Оскільки $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathfrak{s}))\neq\mathfrak{s}$ тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{s}=\langle S_1,S_2\rangle$, то це єдина підалгебра алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, яка не підходить для групової класифікації класу $\mathcal{L}_1'$ при $n=2$. Підалгебра $\mathfrak{s}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ також не придатна для цієї класифікації, оскільки будь-яка система, яка допускає відповідну алгебру $\mathfrak{s}^{\mathrm{vf}}$, належить до сингулярного підкласу.

Теорема 3. *Повний список $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-нееквівалентних розширень суттєвих лієвських симетрій у класі $\mathcal{L}_1'$ з $n=2$ вичерпують випадки:*

0. *Загальний випадок $V(t)$:* $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I\rangle$;
1. $V=v(t)S_1$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,x^2\partial_{x^1}\rangle$;
2. $V=v(t)(S_1+S_3)$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1}\rangle$;
3. $V=v(t)S_2$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2}\rangle$;
4. $V=\varepsilon E+(\beta_1-2\beta_2t+\beta_3t^2)S_1+(\beta_2-\beta_3t)S_2+\beta_3S_3$, $(\beta_2,\beta_3)\neq(0,0)$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,\partial_t+x^2\partial_{x^1}\rangle$;
5. $V=\varepsilon E+\mu(S_1+S_3)+\nu\cos(2t)(S_1-S_3)+\nu\sin(2t)S_2$, $\nu\neq0$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,\partial_t+x^2\partial_{x^1}-x^1\partial_{x^2}\rangle$;
6. $V=\varepsilon E+\beta_1\mathrm{e}^{2t}S_1+\beta_2S_2+\beta_3\mathrm{e}^{-2t}S_3$, $(\beta_1\beta_2,\beta_2\beta_3,\beta_3\beta_1)\neq(0,0,0)$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,\partial_t+x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2}\rangle$;
7. $V=\varepsilon E+S_1+S_3$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1},\partial_t\rangle$;
8. $V=\varepsilon E+\mathrm{e}^{2\gamma t}S_1$, $4\varepsilon\neq\gamma^2$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,x^2\partial_{x^1},\,\partial_t+\gamma(x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2})\rangle$;
9. $V=\varepsilon E+S_2$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2},\partial_t\rangle$;
10. $V=S_1$: $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\,x^2\partial_{x^1},\,\partial_t,t\partial_t+2x^1\partial_{x^1}\rangle$.

Тут $\varepsilon,\gamma,\mu,\nu,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$, $I:=x^1\partial_{x^1}+x^2\partial_{x^2}$, $v=v(t)$ *— довільна гладка функція з* $\tau v_t\neq\neq(\kappa-2\tau_t)v$ *для будь-якої сталої* $\kappa\in\mathbb{R}$ *та будь-якої функції* $\tau=\tau(t)$ *з* $\tau_{ttt}=0$. *З точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності можна вважати, що V — ненульова матричнозначна функція змінної t з нульовим слідом у випадку 0,* $\beta_2=0$ *при* $\beta_3\neq0$ *або* $\beta_1=0$ *при* $\beta_3=0$ *та* $\beta_2\neq0$ *у випадку 4, одне з ненульових* β_1 *або* β_3 *дорівнює 1 у випадку 6,* $\gamma\in\{0,1\}$ *у випадку 8 та* $\nu>0$ *у випадку 5.*

Доведення. З класифікаційної умови (7) випливає, що $I\in\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$ для будь-якої системи L_V' з класу $\mathcal{L}_1'$, причому $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I\rangle$ для загальної системи цього класу (випадок 0 теореми).

Далі розглянемо розширення суттєвих лієвських симетрій у класі $\mathcal{L}_1'$ для можливих значень розмірності підалгебри $\mathfrak{t}$, тобто $k=0$, $k=1$ та $k=2$.

$k=0$. З самого початку з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності зручно покласти $\operatorname{tr}V=0$. Підалгебра $\mathfrak{s}=\{0\}$ алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не підходить, оскільки вона відповідає випадку загальної матричнозначної функції $V(t)$. Підалгебри $\langle S_1\rangle$, $\langle S_1+S_3\rangle$ та $\langle S_2\rangle$ приводять відповідно до випадків 1, 2 та 3 теореми, де $V=v(t)\Gamma$, $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}=\langle I,Q_\Gamma\rangle$ з матрицею Γ, рівною відповідно S_1, S_1+S_3 та S_2. Подальші розширення ліївських симетрій можливі тоді і лише тоді, коли $\tau v_t=(\kappa-2\tau_t)v$ для деякої сталої κ та деякої функції τ від t, що задовольняє умову $\tau_{ttt}=0$, тобто для $k=0$ параметр-функція v не має задовольняти жодне з рівнянь такого вигляду.

$k=1$. Тоді з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}=\langle I\rangle\oplus(\langle P\rangle\Subset\mathfrak{s}^{\rm vf})$, де $P:=\partial_t+\Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$. Матричнозначна параметр-функція V має вигляд [2]

$$V(t)=\varepsilon E+{\rm e}^{t\Upsilon}W{\rm e}^{-t\Upsilon}=\varepsilon E+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}K_l,\quad K_0:=W,\quad K_l:=[\Upsilon,K_{l-1}],\quad l=1,2,\dots \tag{9}$$

з $W\neq 0$. Далі як кандидати для підалгебр $\mathfrak{s}$ окремо розглянемо кожен з придатних елементів повного списку ${\rm SL}(2,\mathbb{R})$-нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, а саме $\{0\}$, $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$ та $\langle S_1+S_3\rangle$.

Підалгебра $\mathfrak{s}=\{0\}$ не приводить до значних попередніх обмежень щодо матриць Υ та W. Лише очевидно, що матриця Υ також ненульова, оскільки інакше ${\rm C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\{K_l,l\in\mathbb{N}_0\})=$ $=\langle W\rangle\neq\{0\}=\mathfrak{s}$. Таким чином, розгляд у цьому випадку зводиться до класифікації пар ненульових 2×2 матриць з точністю до перетворень подібності. Фіксуємо кожну з можливих 2×2 жорданових нормальних форм як значення для параметр-матриці Υ: $\Upsilon=S_1$, $\Upsilon=\gamma S_2$ та $\Upsilon=\gamma(S_1+S_3)$, де $\gamma\neq 0$, а тому внаслідок масштабування змінної t завжди можна вважати, що $\gamma=1$. Для кожної з цих матриць Υ маємо ${\rm C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\{\Upsilon\})=\langle\Upsilon\rangle$. Отже, будь-яка невироджена матриця M, яка комутує з фіксованим виглядом матриці Υ, пропорційна ${\rm e}^{\beta\Upsilon}$ для деякого $\beta\in\mathbb{R}$. Відповідно до [2, леми 27] матрицю W можна звести до вигляду $\tilde W={\rm e}^{\beta\Upsilon}W{\rm e}^{-\beta\Upsilon}$, зберігаючи при цьому вигляд матриці Υ. Нехай матриця W має загальний вигляд, тобто $W=:K_0=\beta_1S_1+\beta_2S_2+\beta_3S_3$ із $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\neq(0,0,0)$. Розглянемо всі можливі спрощення вигляду матриці W за допомогою зазначених перетворень.

Якщо $\Upsilon=S_1$, то

$$K_1=-2\beta_2S_1-\beta_3S_2,\ K_2=2\beta_3S_1,\ K_l=0,\ l\geqslant 3,$$

і централізатор ${\rm C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\{K_0,K_1,K_2\})$ збігається з $\mathfrak{s}=\{0\}$ тоді і лише тоді, коли $(\beta_2,\beta_3)\neq(0,0)$. З точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності можна покласти $\beta_2=0$, якщо $\beta_3\neq 0$, або $\beta_1=0$, якщо $\beta_3=0$ та $\beta_2\neq 0$. У результаті отримаємо випадок 4 теореми.

Якщо $\Upsilon=S_2$, то

$$K_l=[\Upsilon,K_{l-1}]=2^l\beta_1S_1+(-2)^l\beta_3S_3,\ \ l\in\mathbb{N},$$

а централізатор ${\rm C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\{K_l,l\in\mathbb{N}_0\})$, збігається з $\mathfrak{s}=\{0\}$ тоді і лише тоді, коли щонайменше дві зі сталих β_1, β_2 та β_3 є ненульовими. Одне із ненульових значень β_1 чи β_3 можна покласти рівним 1, використовуючи зсув за змінною t. Таким чином, отримаємо випадок 6 теореми.

Якщо $\Upsilon=S_1+S_3$, то можна покласти $\beta_2=0$, тобто $W=:K_0=\beta_1S_1+\beta_3S_3$, $K_{2l+1}=$ $=(\beta_1-\beta_3)(-4)^lS_2$, $K_{2l+2}=2(\beta_1-\beta_3)(-4)^l(S_3-S_1)$, $l\in\mathbb{N}_0$, а тому ${\rm C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\{K_l,l\in\mathbb{N}_0\})=\{0\}=\mathfrak{s}$ тоді і лише тоді, коли $\beta_1-\beta_3\neq 0$. З точністю до зсуву за змінною t, кратному $\pi/2$, можна вважати, що $\beta_1 - \beta_3 > 0$. Якщо ввести позначення $\mu := (\beta_1 + \beta_3)/2$ та $\nu := (\beta_1 - \beta_3)/2$, то приходимо до випадку 5 теореми.

Надалі s позначає доповняльний підпростір підалгебри $\mathfrak{s}$ у нормалізаторі $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})}(\mathfrak{s})$.

Для підалгебри $\mathfrak{s} = \langle S_1 \rangle$ маємо $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})}(\mathfrak{s}) = \langle S_1, S_2 \rangle$ і виберемо $\mathrm{s} = \langle S_2 \rangle$, а $\Upsilon \in \langle S_2 \rangle$, тобто $\Upsilon = \gamma S_2$ з $\gamma \in \mathbb{R}$. Більш того, $W \in \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})}(\mathfrak{s}) = \langle S_1 \rangle$ та $W \neq 0$, звідки $W = \beta S_1$ з $\beta \neq 0$, а тому $K_l = \beta(2\gamma)^l S_1$, $l \in \mathbb{N}_0$. У результаті отримаємо випадок 8 теореми, де $4\varepsilon \neq \gamma^2$ (інакше $k = 2$, див. розгляд нижче). Додатково можна покласти $\gamma \in \{0, 1\}$ та $\beta = 1$ відповідно за допомогою масштабування та зсуву за змінною t.

Якщо $\mathfrak{s} = \langle S_2 \rangle$, то $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$, $\mathrm{s} = \{0\}$, а тому єдиний можливий вибір для матриці Υ — це $\Upsilon = 0$. Крім того, $K_0 := W = \beta S_2$ з $\beta \neq 0$, оскільки $W \in \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathfrak{s}) = \langle S_2 \rangle$ та $W \neq 0$, $K_l = 0$ для $l \geqslant 1$, $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\{K_0\}) = \mathfrak{s}$. Можна покласти $\beta = 1$ за допомогою масштабування змінної t та перестановки x^1 і x^2, що приводить до випадку 9 теореми.

Для підалгебри $\mathfrak{s} = \langle S_1 + S_3 \rangle$ нормалізатор $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\mathfrak{s})$ також збігається з $\mathfrak{s}$. Тому $\mathrm{s} = \{0\}$, $\Upsilon = 0$, $W =: K_0 = \beta(S_1 + S_3)$ з $\beta \neq 0$, та $K_l = 0$, $l \geqslant 1$. За допомогою масштабування змінної t та перестановки x^1 та x^2 знову можна покласти $\beta = 1$. У результаті отримаємо випадок 7 теореми.

$k = 2$. У цьому випадку з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності можна вважати, що $\mathfrak{g}^{\mathrm{ess}}_V = \langle I \rangle \oplus (\langle P, D \rangle \Subset \mathfrak{s}^{\mathrm{vf}})$, де $P := \partial_t + \Upsilon^{ab} x^b \partial_{x^a}$, $D := t\partial_t + \Lambda^{ab} x^b \partial_{x^a}$. Тут і далі відповідні обґрунтування для випадку $k = 2$ див. у [2]. Оскільки $W \neq 0$, то матриця Λ може мати лише один ланцюжок із двох власних значень, різниця яких дорівнює 2. Більш того, лише різниця власних значень є суттєвою і матрицю Λ можна вважати діагоналізовною. Таким чином, можна вибрати матрицю Λ у вигляді $\Lambda = \mathrm{diag}(2, 0)$. Тоді $\Upsilon = 0$, $W =: K_0 = S_1$ з точністю до $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-еквівалентності, $K_l = 0$, $l \in \mathbb{N}$, та $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(\{K_0\}) = \langle S_1 \rangle = \mathfrak{s}$, що приводить до випадку 10 теореми.

Таким чином, теорема 3 дає повний розв'язок задачі групової класифікації для регулярного підкласу $\mathcal{L}'_1$ класу $\mathcal{L}'$. Оскільки будь-яка система з сингулярного підкласу $\mathcal{L}'_0$ еквівалентна елементарній, це означає повний розв'язок задачі групової класифікації для нормальних лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Крім того, теорему можна легко поширити на випадок комплексного поля. Над комплексним полем випадки 2, 5 та 7 теореми відповідно зводяться до випадків 1, 6 та 9.

Теорема 3 покращує й уточнює відомі результати щодо ліївських симетрій нормальних лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [8—10] і є ілюстрацією розробленого в роботі [2] методу розв'язання задачі групової класифікації лінійних систем вигляду (1) для довільного n.

Прямим наслідком теореми 3 є таке твердження щодо розмірностей алгебр ліївських симетрій нормальних лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Наслідок 4.

1. $\dim \mathfrak{g}_V \in \{5, 6, 7, 8\}$ *для будь-якої системи* L'_V *з класу* $\mathcal{L}'_1$.
2. $\dim \mathfrak{g}_\theta \in \{5, 6, 7, 8, 15\}$ *для будь-якої системи* $\bar{L}_\theta$ *з класу* $\bar{\mathcal{L}}$.
3. *Будь-яка система* $\bar{L}_\theta \in \bar{\mathcal{L}}$ *з* $\dim \mathfrak{g}_\theta > 8$ *є* $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$*-еквівалентною елементарній системі* $\mathbf{x}_{tt} = \mathbf{0}$.

4. Будь-яка система $\bar{L}_\theta \in \bar{\mathcal{L}}$ *з* $\dim \mathfrak{g}_\theta \geqslant 7$ *є* $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$*-еквівалентною однорідній системі зі сталими матричними коефіцієнтами.*

З використанням перетворень еквівалентності як простий наслідок теореми 3 отримаємо розв'язок задачі групової класифікації для класу $\mathcal{L}_1$ регулярних лінійних однорідних систем вигляду (1) для $n=2$ з довільними елементами $\vartheta=(A,B)$.

Наслідок 5. *Повний список* $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$*-нееквівалентних розширень суттєвих ліївських симетрій у класі* $\mathcal{L}_1$ *з* $n=2$ *вичерпують такі випадки:*

0. *Загальний випадок* $A=0,\ B=V(t)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I\rangle$;
1. $A=0,\ B=v(t)S_1$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\, x^2\partial_{x^1}\rangle$;
2. $A=0,\ B=v(t)(S_1+S_3)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\, x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1}\rangle$;
3. $A=0,\ B=v(t)S_2$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\, x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2}\rangle$;
4. $A=-2S_1,\ B=\varepsilon E+\beta_1S_1+\beta_2S_2+\beta_3S_3,\ (\beta_2,\beta_3)\neq(0,0)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,\partial_t\rangle$;
5. $A=-2(S_1+S_3),\ B=\varepsilon E+\beta_1S_1+\beta_3S_3,\ \beta_1\neq\beta_3$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,\partial_t\rangle$;
6. $A=-2S_2,\ B=\varepsilon E+\beta_1S_1+\beta_2S_2+\beta_3S_3,\ (\beta_1\beta_2,\beta_2\beta_3,\beta_3\beta_1)\neq(0,0,0)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,\partial_t\rangle$;
7. $A=0,\ B=\varepsilon E+S_1+S_3$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\, x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1},\,\partial_t\rangle$;
8. $A=-2\gamma S_2,\ B=(\varepsilon-\gamma^2)E+S_1,\ 4\varepsilon\neq\gamma^2$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\, {\rm e}^{-2\gamma t}x^2\partial_{x^1},\,\partial_t\rangle$;
9. $A=0,\ B=\varepsilon E+S_2$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\, x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2},\,\partial_t\rangle$;
10. $A=0,\ B=S_1$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\, x^2\partial_{x^1},\,\partial_t,\, t\partial_t+2x^1\partial_{x^1}\rangle$.

Тут $\varepsilon,\gamma,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$, $I:=x^1\partial_{x^1}+x^2\partial_{x^2}$, $v=v(t)$ *— довільна гладка функція змінної* t *з* $\tau v_t\neq(\kappa-2\tau_t)v$ *для будь-якої сталої* $\kappa\in\mathbb{R}$ *та будь-якої функції* $\tau=\tau(t)$ *з* $\tau_{ttt}=0$. *З точністю до* $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$*-еквівалентності можна вважати, що* V *— ненульова матричнозначна функція змінної* t *з нульовим слідом у випадку 0,* $\beta_2=0$ *при* $\beta_3\neq0$ *або* $\beta_1=0$ *при* $\beta_3=0$ *та* $\beta_2\neq0$ *у випадку 4, одна з ненульових сталих* β_1 *або* β_3 *дорівнює* 1 *у випадку 6,* $\gamma\in\{0,1\}$ *у випадку 8 та* $\beta_1>\beta_3$ *у випадку 5.*

Оскільки класифікація підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ відома [13], то результати роботи [2] можна також використати для повної групової класифікації систем (3) у випадку трьох залежних змінних. Але така класифікація є нетривіальною та громіздкою і вимагає окремого розгляду.

Автор висловлює щиру вдячність В.М. Бойку та Р.О. Поповичу за постановку задачі, постійну увагу і допомогу, конструктивні зауваження до роботи та плідні дискусії. Дослідження виконувалися в рамках проєктів 0116U003059 та 0121U110543, а також проєкту Національного фонду досліджень України 2020.02/0089 (номер держреєстрації 0120U104004).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M. Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification. *J. Phys. Conf. Ser.* 2015. **621**. 012001. 17 pp. https://doi.org/10.1088/1742-6596/621/1/012002
2. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O. Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations. 2021. arXiv:2105.05139.

3. Wafo Soh C. Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2010. **15**, № 2. P. 139—143. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.03.02
4. Meleshko S.V. Comment on “Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients”. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2011. **16**, № 9. P. 3447—3450. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.12.014
5. Campoamor-Stursberg R. Systems of second-order linear ODE’s with constant coefficients and their symmetries. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2011. **16**, № 8. P. 3015—3023. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.10.033
6. Campoamor-Stursberg R. Systems of second-order linear ODE’s with constant coefficients and their symmetries. II. The case of non-diagonal coefficient matrices. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2012. **17**, № 3. P. 1178—1193. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.08.002
7. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M. Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients. *J. Math. Anal. Appl.* 2013. **397**, № 1. P. 434—440. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.06.030
8. Wafo Soh C., Mahomed F.M. Symmetry breaking for a system of two linear second-order ordinary differential equations. *Nonlinear Dynam.* 2000. **22**, № 1. P. 121—133. https://doi.org/10.1023/A:1008390431287
9. Moyo S., Meleshko S.V., Oguis G.F. Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2013. **18**, № 11. P. 2972—2983. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.04.012
10. Mkhize T.G., Moyo S., Meleshko S.V. Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations: the algebraic approach. *Math. Methods Appl. Sci.* 2015. **38**, № 9. P. 1824—1837. https://doi.org/10.1002/mma.3193
11. Suksern S., Moyo S., Meleshko S.V. Application of group analysis to classification of systems of three second-order ordinary differential equations. *Math. Methods Appl. Sci.* 2015. **38**, № 18. P. 5097—5113. https://doi.org/10.1002/mma.3430
12. Gonzalez-Lopez A. Symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations. *J. Math. Phys.* 1988. **29**, № 5. P. 1097—1105. https://doi.org/10.1063/1.527948
13. Winternitz P. Subalgebras of Lie algebras. Example of $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. *Symmetry in physics*, *CRM Proc. Lecture Notes*. Vol. 34. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. P. 215—227.

Надійшло до редакції 30.06.2021

REFERENCES

1. Boyko, V. M., Popovych, R. O. & Shapoval, N. M. (2015). Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification. J. Phys. Conf. Ser., 621, 012001, 17 pp. https://doi.org/10.1088/1742-6596/621/1/012002
2. Boyko, V. M., Lokaziuk, O. V. & Popovych, R. O. (2021). Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations. arXiv:2105.05139.
3. Wafo Soh, C. (2010). Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 15, No. 1, pp. 139-143. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.03.02
4. Meleshko, S. V. (2011). Comment on “Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients”. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16, No. 9, pp. 3447-3450. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.12.014
5. Campoamor-Stursberg, R. (2011). Systems of second-order linear ODE’s with constant coefficients and their symmetries. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16, No. 8, pp. 3015-3023. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.10.033
6. Campoamor-Stursberg, R. (2012). Systems of second-order linear ODE’s with constant coefficients and their symmetries. II. The case of non-diagonal coefficient matrices. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, No. 3, pp. 1178-1193. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.08.002

7. Boyko, V. M., Popovych, R. O. & Shapoval, N. M. (2013). Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients. J. Math. Anal. Appl., 397, No. 1, pp. 434-440. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.06.030
8. Wafo Soh, C. & Mahomed, F. M. (2000). Symmetry breaking for a system of two linear second-order ordinary differential equations. Nonlinear Dynam., 22, No. 1, pp. 121-133. https://doi.org/10.1023/A:1008390431287
9. Moyo, S., Meleshko, S. V. & Oguis, G. F. (2013). Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 18, No. 11, pp. 2972-2983. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.04.012
10. Mkhize, T. G., Moyo, S. & Meleshko, S. V. (2015). Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations: the algebraic approach. Math. Methods Appl. Sci., 38, No. 9, pp. 1824-1837. https://doi.org/10.1002/mma.3193
11. Suksern, S., Moyo, S. & Meleshko, S. V. (2015). Application of group analysis to classification of systems of three second-order ordinary differential equations. Math. Methods Appl. Sci., 38, No. 18, pp. 5097-5113. https://doi.org/10.1002/mma.3430
12. Gonzalez-Lopez, A. (1988). Symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations. J. Math. Phys., 29, No. 5, pp. 1097-1105. https://doi.org/10.1063/1.527948
13. Winternitz, P. (2004). Subalgebras of Lie algebras. Example of $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. In Symmetry in physics (pp. 215-227), CRM Proc. Lecture Notes, Vol. 34. Providence, RI: Amer. Math. Soc.

Received 30.06.2021

O.V. Lokaziuk, https://orcid.org/0000-0001-9663-251X

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: sasha.lokazuik@gmail.com

LIE SYMMETRIES OF LINEAR SYSTEMS OF TWO SECOND-ORDER
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

We solve the complete group classification problem for the class of normal linear systems of second-order ordinary differential equations with two dependent variables over the real field. The proof essentially uses the description of admissible transformations of this class and Lie's theorem on realizations of Lie algebras on the line.

Keywords: *linear systems of second-order ordinary differential equations, Lie symmetry, algebraic method of group classification, equivalence group.*