

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.039>

УДК 539.421

М.Ф. Селіванов, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

В.В. Процан, <https://orcid.org/0000-0001-8374-1522>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net, v.v.protsan@ukr.net

Розв'язання задачі про докритичний стан крайової тріщини в рамках підходу моделі когезійної зони

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

Розглянуто задачу про докритичний стан крайової тріщини нормального відриву в напівнескінченній ізотропній площині. Розв'язок побудовано в рамках підходу моделі зони зчеплення, в основі якої лежить нерівномірний зв'язок між поверхневими силами зчеплення і відриву берегів фіктивного розрізу. Цей розріз моделює зону передруйнування, що утворюється біля фронту тріщини. В основу розв'язку покладено регуляризоване сингулярне рівняння з узагальненим ядром Коші, яке розв'язується методом колокації. Плавність змикання берегів тріщини забезпечується введенням ділянки зростання в закон зчеплення—відриву. Числовий приклад побудовано для згладженого трапецієподібного закону. Проілюстровано відсутність осциляції розв'язку, вказано на появу сингулярності внаслідок розривності граничних умов на контурі модельного розрізу у разі дослідження докритичного стану. Вказано на розбіжності розв'язків рівнянь першого і другого родів для невеликих довжин зчеплення.

Ключові слова: крайова тріщина, модель зони зчеплення, інтегральне рівняння з узагальненим ядром Коші, умова плавності змикання берегів тріщини, докритичний стан тріщини.

В квазікрихких матеріалах руйнування може відбуватися внаслідок поширення тріщини, в околі вершини якої формується зона передруйнування. При моделюванні цієї зони часто використовують модель зони зчеплення. В рамках цієї моделі тріщина має вигляд розрізу з прикладеними на додатковому розрізі на продовженні лінії тріщини силами зчеплення. Ці сили покладаються залежними від розкриття берегів вздовж фіктивної тріщини. Закон, що описує цей зв'язок, називають законом зчеплення—відриву. Він може враховувати різноманітні ефекти, що відбуваються в околі фізичної вершини тріщини. Модель побудована в роботах [1–4] і широко застосовується в дослідженнях тріщиностійкості конструкцій, виготовлених із різноманітних матеріалів. Незважаючи на широке використання моделі аналітичних та напіваналітичних розв'язків, отриманих в рамках моделі, не багато. Саме такі розв'язки допомагають якісно оцінити дану модель.

Цитування: Селіванов М.Ф., Процан В.В. Розв'язання задачі про докритичний стан крайової тріщини в рамках підходу моделі когезійної зони. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 1. С. 39–47.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.039>

В роботах [5, 6] було розв’язано задачу про граничний стан напівнескінченної площини з тріщиною нормального відриву в рамках підходу моделі зони зчеплення. В [5] інтегральне рівняння з узагальненим ядром Коші, що визначає розв’язок даної задачі, вирішується без регуляризації. Встановлено, що розв’язок задачі (щільність розкриття берегів тріщини) осцилює. Ця осциляція пов’язана з тим, що контурні умови, які прикладаються до берегів розрізу в рамках моделі, не є неперервними і можуть мати стрибок в точці, яка відповідає вершині фізичної тріщини. В роботі [7] при розв’язанні задачі про центральну тріщину в нескінченній площині цю особливість постановки було враховано шляхом введення додаткової вагової функції. Вказану осциляцію було усунуто шляхом регуляризації сингулярного інтегрального рівняння першого роду в роботі [6]. В цій роботі було отримано розв’язок, що відповідає умовам граничного стану рівноваги, тобто коли зчеплення є нульовим за максимально можливого відриву в зоні (граничні умови не є функцією стрибка при переході на берег фізичної тріщини). Показано, що осциляція зникає. Виникає питання: як поводить себе розв’язок задачі при дослідженні докритичного стану за відсутності вагових функцій?

Важливим етапом розв’язання задач в рамках підходу моделі зони зчеплення є задоволення умови плавності змикання берегів, яка забезпечує відсутність розривності напружень на лінії розташування тріщини, а у випадку побудови аналітичного розв’язку задовольняє вимогу скінченності напружень в тілі. Для законів зчеплення—відриву з максимальним зчепленням, що відповідає нульовому відриву, умову плавності змикання можна забезпечити за допомогою ітеративного методу [5, 6]. Розв’язок отримується невеликою кількістю ітерацій, на кожній з яких розв’язується система нелінійних рівнянь швидко збіжним ітеративним методом. Плавність змикання берегів також можна забезпечити модифікацією закону зчеплення—відриву шляхом приписування нульового зчеплення нульовому відриву (рис. 1, в). В цьому випадку швидкість збіжності ітеративного методу істотно зменшується, але розв’язок можна дістати розв’язанням лише однієї системи нелінійних рівнянь. В даній роботі в рамках другого підходу досліджуватимемо розв’язок задачі про докритичний стан крайової тріщини змодельованої за допомогою моделі когезійної зони. Для побудови розв’язку сингулярних інтегральних рівнянь методом колокації [8] використано проміжні результати роботи [6].

Розглянемо задачу про докритичний стан граничної рівноваги крайової тріщини в напівнескінченній площині за наявності зони передруйнування біля її фронту (рис. 1, а). Тріщина розташована вздовж нормалі до границі півплощини, розподілене розтягувальне навантаження прикладене на значній відстані від тріщини вздовж нормалі до її площини.

Розв’язок задачі в рамках обраної моделі для плоского напруженого стану має такий вигляд (введені позначення ілюструє рис. 1, б):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\beta} K(\xi, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \Lambda \{ \sigma_{\infty} - \sigma_{\max} \bar{T}[\bar{\Delta}(\xi)] \}, \quad 0 < \xi < \beta, \quad (1)$$

$$\Delta(\xi) = \int_{\xi}^{\beta} \varphi(\tau) d\tau, \quad \Delta'(\beta) = 0,$$

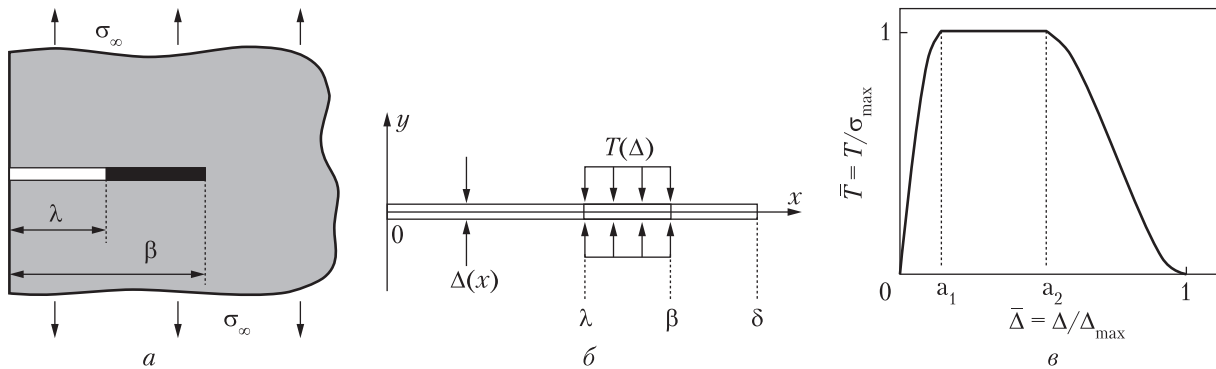


Рис. 1

де $\Lambda = 4/E$ — характеристика піддатливості (E — модуль Юнга); $\bar{T}(\bar{\Delta})$ — ефективний закон зчеплення—відриву; $\bar{\Delta} = \Delta/\Delta_{\max}$ — безрозмірний відрив. Внутрішній параметр моделі Δ_{\max} визначається міцністю зчеплення σ_{\max} , енергією руйнування ϕ та параметрами форми ефективного закону зчеплення—відриву, які є фізичними параметрами моделі. Ядро інтегрального рівняння:

$$K(\xi, \tau) = \frac{1}{\tau - \xi} - h(\xi, \tau), \quad h(\xi, \tau) = \sum_{r=0}^2 d_r \xi^r \frac{\partial^r}{\partial \xi^r} \frac{1}{\tau + \xi}, \quad d = \{1, 6, 2\}. \quad (2)$$

Окрім функції ϕ в задачі (1) невідомою є і величина β . При дослідженні докритичного стану у визначальну систему (1) необхідно додати рівняння $\Delta(\lambda) = \Delta_0$ ($\Delta_0 < \Delta_{\max}$).

В роботі [6] рівняння першого роду (2) зведено до наступного рівняння другого роду:

$$\frac{(1+x)^{3/2}}{x^{1/2}} q(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 R(x, t) \frac{q(t)}{\hat{X}(t)} dt = \bar{\sigma}_\infty + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda/\delta}^1 \frac{\tilde{X}(t) \bar{T}[\bar{\Delta}(t)]}{t-x} dt, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{X}(t) &= t^{1/2} (1-t)^{1/2}, & \tilde{X}(t) &= \frac{(1-t)^{1/2}}{t^{1/2}}, \\ q(t) &= \frac{\phi(\delta t)}{\Lambda \sigma_{\max} \omega_1(t)}, & \omega_1(t) &= \frac{(1+t)^{3/2}}{(1-t)^{1/2}}, \\ \bar{\Delta}(t) &= w \int_{t/\delta}^1 \omega_1(s) q(s) ds, & w &= \frac{\delta \Lambda \sigma_{\max}}{\Delta_{\max}} \end{aligned}$$

(δ є сталою величиною, яка напевне більша за невідому характеристику β (рис. 1, б)),

$$\begin{aligned} R(x, s) &= 5 - 7x + s + R_s(x, s), & R_s(x, s) &= \sum_{r=0}^2 c_r(x) x^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{1}{s+x}, \\ c(x) &= \{17x^2 - 19x + 3.5, 2(7x - 4)(x - 1), 2(x - 1)^2\}. \end{aligned}$$

Невідомі регулярну функцію $q(x)$ та $\bar{\sigma}(x) = \bar{T}[\bar{\Delta}(x)]$ визначатимемо з (3) у кусково-лінійній формі. Враховуючи обрану форму переписемо (3) згідно з результатами [6] у вигляді

$$\frac{(1+x)^{3/2}}{x^{1/2}} q(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n J_k(x) q_k = \bar{\sigma}_\infty + \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^n Z_k(x) \bar{\sigma}_k, \quad (4)$$

$$q_k = q(x_k), \quad \bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}(x_k),$$

індекс p відповідає точці колокації, що збігається з λ ($x_p = \lambda / \delta$).

В лівій частині (4)

$$\begin{aligned} J_1(x) &= t_2 Q'_1(x) - S'_1(x), & J_n(x) &= -t_{n-1} Q'_{n-1}(x) + S'_{n-1}(x), \\ J_k(x) &= t_{k+1} Q'_k(x) - t_{k-1} Q'_{k-1}(x) - S'_k(x) + S'_{k-1}(x), & k &= 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Q'_k(x) &= [Q(x, t_{k+1}) - Q(x, t_k)] / \Delta t_k, \\ S'_k(x) &= [S(x, t_{k+1}) - S(x, t_k)] / \Delta t_k, & \Delta t_k &= t_{k+1} - t_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= \int \frac{R(x, t)}{\hat{X}(t)} dt = \\ &= \left(7x - \frac{11}{2}\right) I(t) - \hat{X}(t) + \sum_{r=0}^2 c_r(x) I_{0r}(x, t), \\ S(x, t) &= \int \frac{tR(x, t)}{\hat{X}(t)} dt = \\ &= \left(7x - \frac{23}{4}\right) \left\{ \frac{1}{2} I(t) + \hat{X}(t) \right\} - \frac{1}{2} t \hat{X}(t) + \sum_{r=0}^2 c_r(x) I_{1r}(x, t). \end{aligned}$$

Інтеграли

$$I_{kr}(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \int \frac{t^k dt}{\hat{X}(t)(t+x)}, \quad k=0, 1, \quad r=0, 1, 2$$

у виразах для функцій $Q(x, t)$ та $S(x, t)$ можна легко отримати:

$$\begin{aligned} I_{00}(x, t) &= -\frac{2}{[x(1+x)]^{1/2}} \frac{x^{1/2} \tilde{X}(t)}{(1+x)^{1/2}}, \\ I_{01}(x, t) &= -\frac{1}{x+1} \left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right) I_{00}(x, t) + \frac{\hat{X}(t)}{t+x} \right\}, \\ I_{02}(x, t) &= \frac{1}{(x+1)^2} \left\{ \left(2x^2 + 2x + \frac{3}{4}\right) I_{00}(x, t) + \frac{8x^2 + 6tx + 3t + 5x}{2(t+x)^2} \hat{X}(t) \right\}; \end{aligned}$$

$$I_{10}(x, t) = -xI_{00}(x, t) - I(t), \quad I(t) = 2 \arctg \tilde{X}(t),$$

$$I_{11}(x, t) = \frac{x}{1+x} \left\{ -\frac{1}{2}I_{00}(x, t) + \frac{1}{t+x} \hat{X}(t) \right\},$$

$$I_{12}(x, t) = \frac{x}{(1+x)^2} \left\{ \left(x + \frac{1}{4}\right)I_{00}(x, t) - \frac{4x^2 + 2tx - t + x}{2(t+x)^2} \hat{X}(t) \right\}.$$

Неважко переконатись, що $S(x, t_k)$ ($k = 1, \dots, n$) та $Q(x, t_k)$ ($k = 2, \dots, n$) є обмеженими при $x \rightarrow 0$, а

$$Q(x, t_1) = -\frac{\pi}{x^{1/2}} + O(1),$$

отже

$$J_1(x) = \frac{\pi}{x^{1/2}} + O(1), \quad J_k(x) = O(1), \quad k = 2, \dots, n.$$

В правій частині (4)

$$Z_1(x) = B'_1(x) - A_1(x), \quad Z_n(x) = -B'_{n-1}(x) + A_n(x),$$

$$Z_k(x) = B'_k(x) - B'_{k-1}(x), \quad k = 2, \dots, n-1, \tag{5}$$

де

$$A_k(x) = A(x, t_k), \quad B'_k(x) = [B_{k+1}(x) - B_k(x)] / \Delta t_k, \quad B_k(x) = B(x, t_k);$$

$$A(x, t) = \tilde{X}(x) \ln \left| \frac{\tilde{X}(t) - \tilde{X}(x)}{\tilde{X}(t) + \tilde{X}(x)} \right| + I(t), \quad B(x, t) = \tilde{Q}(x, t) + \frac{1}{2}I(t) - \hat{X}(t),$$

$$\tilde{A}(x, t) = (t-x)A(x, t) = \begin{cases} 0, & x = t, \\ -\pi x, & t = 0, \\ tI(t) - 2\hat{X}(t), & x = 0. \end{cases}$$

В точках колокації x_m (які збігаються з квадратурними точками) рівняння (4) набудуть вигляду

$$\sum_{k=1}^n j_{mk} q_m = \bar{\sigma}_\infty - \sum_{k=p}^n z_{mk} \bar{\sigma}_k \tag{6}$$

$$j_{mk} = J_k(x_m) + \begin{cases} 0, & m = 1, \\ \frac{(1+x_m)^{3/2}}{x_m^{1/2}} \delta_{mk}, & m > 1, \end{cases} \quad z_{mk} = Z_m(x_k),$$

де δ_{mk} – символ Кронекера.

Аналогічно можна записати розкриття в точках колокації:

$$\bar{\Delta} = w\mathbf{V}\mathbf{q}, \quad \bar{D} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}^T, \quad \bar{\Delta}_k = \bar{\Delta}(x_k),$$

$$V = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_{n-1} & N_n \\ 0 & G'_2 - R_2 & N_3 & \dots & N_{n-1} & N_n \\ 0 & 0 & G'_3 - R_3 & \dots & N_{n-1} & N_n \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G'_{n-1} - R_{n-1} & N_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= G'_1 - R_1, & N_n &= R_n - G_{n-1}, \\ N_k &= G'_k - G'_{k-1}, & k &= 2, \dots, n-1, \\ R_k &= R(t_k), & G_k &= G(t_k), & G'_k &= (G_{k+1} - G_k) / \Delta t_k, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} R(t) &= \int \omega_1(t) dt = \frac{3}{2}U(t) - \left(\frac{1}{2}t + 2\right)Y(t), \\ G(t) &= \int R(t) dt = \left(\frac{3}{2}t - 1\right)U(t) - \frac{1}{6}(t^2 + 6t - 10)Y(t), \end{aligned}$$

де

$$U(t) = 2 \arctg \alpha^{-1}(t), \quad \alpha(t) = \frac{(1-t)^{1/2}}{(1+t)^{1/2}}, \quad Y(t) = (1-t^2)^{1/2}.$$

Матрична форма запису системи (6):

$$\mathbf{J}\mathbf{q} = \bar{\sigma}_\infty \mathbf{1} - \mathbf{Z}\bar{T}(w\mathbf{V}\mathbf{q}), \quad (9)$$

де $\mathbf{1}$ – вектор-стовпець одиниць розмірності n ,

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T, \quad \mathbf{J} = [j_{mk}], \quad \mathbf{Z} = [z_{mk}], \quad m, k = 1, \dots, n.$$

Система рівнянь (9) містить n невідомих вузлових значень розв'язку задачі $q(x)$. Стандартний ітеративний процес числового методу розв'язання системи нелінійних рівнянь часто не збігається до розв'язку. Це обумовлено наявністю двох розв'язків для значень навантаження, близьких до свого критичного значення [9]. Цієї незручності можна уникнути, покладаючи величину $\bar{\sigma}_\infty$ невідомою і доповнюючи систему (9) рівнянням

$$w\mathbf{V}_p\mathbf{q} = \Delta(\lambda),$$

де $\Delta(\lambda)$ – задана величина розкриття в вершині фізичної тріщини. Елементи вектора-рядка \mathbf{V}_p є елементами p -го рядка матриці \mathbf{V} , індекс p відповідає квадратурній точці $x_p = \lambda / \delta$.

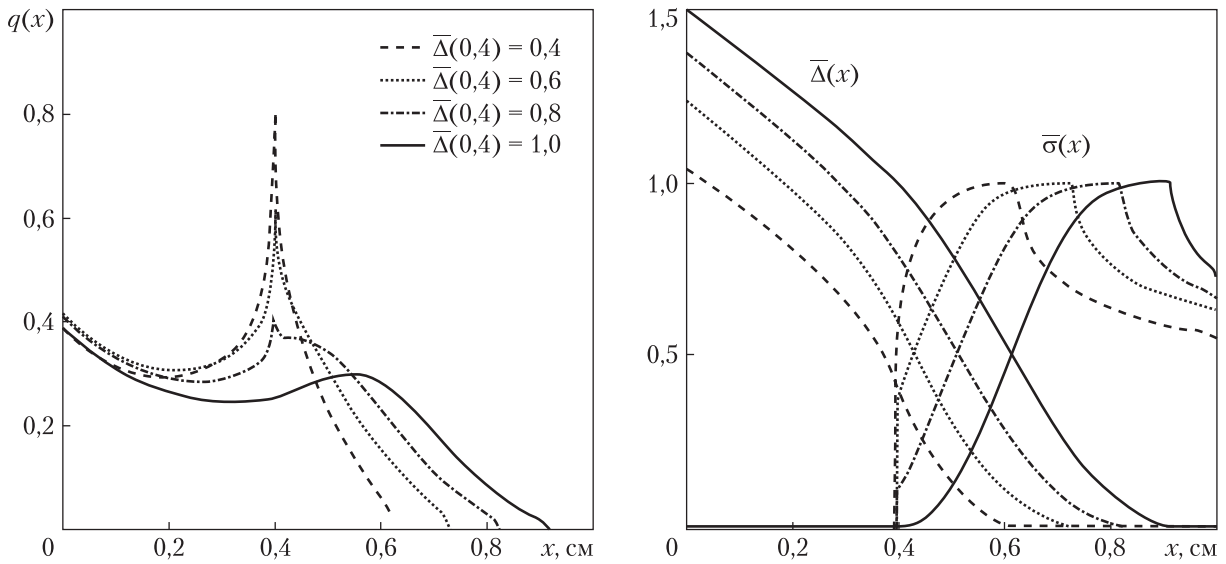


Рис. 2

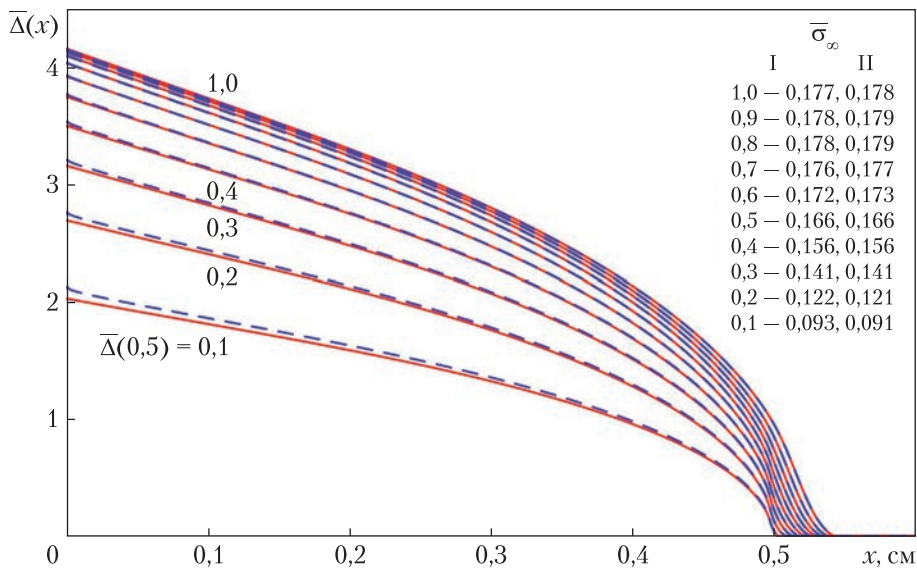


Рис. 3

Числовий приклад побудуємо для згладженого трапеціодального закону зчеплення—відриву (ефективний закон проілюстровано на рис. 1, в)

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = \begin{cases} a_1^{-1}\bar{\Delta}(2-a_1^{-1}\bar{\Delta}), & \bar{\Delta} \in [0, a_1], \\ 1, & \bar{\Delta} \in [a_1, a_2], \\ (1-\bar{\Delta})^2(1+2\bar{\Delta}-3a_2)(1-a_2)^{-3}, & \bar{\Delta} \in [a_2, 1]. \end{cases} \quad (10)$$

Після введення сталої $\omega = \int_0^1 \bar{T}(\bar{\Delta}) d\bar{\Delta} = \frac{1}{6}(3 - 2a_1 + 3a_2)$ можна визначити внутрішній параметр моделі $\Delta_{\max} = \phi / (\omega \sigma_{\max})$. Стала $\omega \in (0, 1)$ є однією з мір відхилення закону зчеплення–відриву від рівномірного, який відповідає моделі Дагдейла [1].

На рис. 2 проілюстровано розв'язок задачі $q(x)$, безрозмірні напруження на лінії розташування тріщини $\bar{\sigma}(x)$ та відповідний безрозмірний відрив $\bar{\Delta}(x)$. Розв'язок отримано для наступних значень параметрів задачі $\delta = 1$ см, $a_1 = a_2 = 10^{-3}$, $E = 40$ ГПа, $\phi = 200$ Н/м, $\sigma_{\max} = 35$ МПа, $n = 500$ (параметр дискретизації).

Таким чином, осциляція не спостерігається як для розв'язку задачі про критичний стан ($\Delta(\lambda) = \Delta_{\max}$) так і для розв'язку про докритичний стан ($\Delta(\lambda) < \Delta_{\max}$). В другому випадку зі зменшенням відриву у вершині тріщини починає проявлятися вплив розривності контурних умов, що спричиняє сингулярність розв'язку. Врахування цієї особливості може бути предметом подальших досліджень.

На рис. 3 проведено порівняння розв'язків рівнянь першого і другого родів та зазначені відповідні цим розв'язкам рівні зовнішнього навантаження. Для невеликих довжин зчеплення (невеликих рівнів докритичного навантаження) спостерігаються розбіжності в двох розв'язках. Для рівнів навантаження, близьких до критичних, ці розбіжності знаходяться в межах графічної точності. Для побудови числових розв'язків використано параметри попереднього прикладу, окрім E , який взято рівним 4 ГПа.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech Phys Solids*. 1960. **8**. P. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
2. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl Mech*. 1962. **7**. P. 55–129. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)
3. Hillerborg A., Modeer M., and Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem Concr Res*. 1976. **6**. P. 773–781. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7)
4. Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl Mech*. 1987. **54**. P. 525–531. <https://doi.org/10.1115/1.3173064>
5. Селіванов М. Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2019. № 3. С. 46–54. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.046>
6. Селіванов М. Ф. Розв'язання задачі про крайову тріщину з зоною зчеплення шляхом регуляризації сингулярного інтегрального рівняння. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2019. № 5. С. 34–43. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.034>
7. Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О. Comparison of the crack opening displacement determination algorithms for a cohesive crack. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2017. №7. С. 29–36. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.029>
8. Erdogan F, Gupta G.D. and Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations. In G.C. Sih, editor, *Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of Fracture*. V. 1. Dordrecht: Springer, 1973. P. 368–425.
9. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O., and Kononchuk O.P. Determination of crack opening displacement and critical load parameter within a cohesive zone model. *Continuum Mech. Thermodyn*. 2018. **31**(2). P. 569–586. <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0712-0>

Надійшло до редакції 21.10.2021

REFERENCES

1. Dugdale, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech Phys Solids*, 8, pp. 100-104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
2. Barenblatt, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl Mech.*, 7, pp. 55-129. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)
3. Hillerborg, A., Modeer, M. & Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem Concr Res.*, 6, pp. 773-781. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7)
4. Needleman, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl Mech.*, 54, pp. 525-531. <https://doi.org/10.1115/1.3173064>
5. Selivanov, M. F. (2019). An edge crack with cohesive zone. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 46-54 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.046>
6. Selivanov, M. F. (2019). Solving a problem on an edge crack with cohesive zone by the regularization of a singular integral equation. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 34-43 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.034>
7. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2017). Comparison of the crack opening displacement determination algorithms for a cohesive crack. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 7, pp. 29-36 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.029>
8. Erdogan, F., Gupta, G. D. & Cook, T. S. (1973). Numerical solution of singular integral equations. In G.C. Sih, editor, *Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of Fracture. V. 1.* Dordrecht: Springer, pp. 368-425.
9. Selivanov, M. F., Chornoivan, Y. O. & Kononchuk, O. P. (2018). Determination of crack opening displacement and critical load parameter within a cohesive zone model. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 31(2), pp. 569-586. <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0712-0>

Received 21.10.2021

M.F. Selivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

V.V. Protsan, <https://orcid.org/0000-0001-8374-1522>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: mfs@ukr.net, v.v.protsan@ukr.net

SOLVING THE PROBLEM ON THE SUBCRITICAL STATE OF AN EDGE CRACK WITHIN THE COHESIVE ZONE MODEL APPROACH

The problem of the subcritical state of a mode I crack in a semiinfinite isotropic plate is considered. The solution is obtained within the cohesive zone model approach based on the non-uniform dependence of the cohesive traction on the separation of the fictitious crack faces. This zone simulates the failure zone that appears near the crack front. The solving procedure uses a regularized singular equation with a generalized Cauchy kernel, which is solved by the collocation method. The introduction of the interval of growth in the traction-separation law ensures a smooth crack closure. A numerical example is illustrated for the smoothed trapezoidal law. The absence of oscillations of the solution is shown, and the appearance of a singularity due to the discontinuity of the boundary conditions on the contour of the fictitious crack in the case of the study of the subcritical state is shown. The difference between the solutions of the first- and second-kind equations for small cohesive lengths is indicated.

Keywords: edge crack, cohesive zone model, integral equation with generalized Cauchy kernel, smooth crack closure, subcritical state of a crack.