https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.041
УДК 539.3

Я.Я. Рущицький, член-кореспондент НАН України, https://orcid.org/0000-0002-0830-5030

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Пружна крутильна хвиля і відповідне нове нелінійне хвильове рівняння

Запропоновано нове нелінійне хвильове рівняння, яке описує поширення крутильної хвилі як один з типів пружних циліндричних хвиль. Рівняння отримане за допомогою інструментів нелінійної теорії пружності в рамках п'ятиконстантної моделі Мернагана. Воно містить крім класичних лінійних доданків лише кубічно нелінійні. Прокоментовано деякі особливості рівняння.

Ключові слова: *нелінійно пружна крутильна хвиля, п'ятиконстантна модель Мернагана, нове нелінійне хвильове рівняння.*

База даних щодо хвильових рівнянь регулярно поповнюється новими рівняннями, в основному, нелінійними [1—7]. Ці рівняння описують хвилі різної природи — як класичні, так і некласичні. Серед класичних хвиль механічні хвилі є одними з найбільш вивчених. Але і тут існують невивчені фрагменти. До одного з таких фрагментів належить задача про поширення крутильних хвиль вздовж осі симетрії кругового циліндра. В лінійній постановці ця задача є класичною в теорії пружності. Нелінійні задачі про циліндричні хвилі в рамках п'яти константної нелінійної моделі пружного деформування Мернагана описані в ряді статей та наведені в монографії [8]. Однак у [8] варіант конфігурації, що стосується крутильних хвиль, досліджений побіжно. Тому при спробі більш повного аналізу крутильної хвилі виникає потреба в більш загальному хвильовому рівнянні, отриманому послідовно і строго.

Стисла інформація щодо класичної задачі лінійної теорії пружності про поширення крутильних хвиль. Незважаючи на приналежність крутильної хвилі до класичних типів хвиль, вона не описана як в дуже відомих, так і в менш відомих публікаціях з теорії пружності. Фактично, тільки книга [9] дає послідовний опис цих хвиль в рамках лінійної теорії пружності.

В задачі про поширення гармонічної хвилі негласно приймається, що така хвиля збуджується гармонічним у часі імпульсом. Наприклад, плоска поздовжна хвиля зміщення в напрямку осі Ox збуджується гармонічним імпульсом заданої амплітуди і частоти $u_x(t) = u_x^o e^{i\omega t}$, прикладеним до площини $x = 0$. Аналогічно, гармонічна крутильна хвиля в

Цитування: Рущицький Я.Я. Пружна крутильна хвиля і відповідне нове нелінійне хвильове рівняння. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 2. С. 41—47. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.041

напрямку осі симетрії циліндра Oz збуджується імпульсом $u_\vartheta(t) = u_\vartheta^o e^{i\omega t}$, прикладеним до поперечного перетину циліндра (круга) $z = 0$. Тоді в циліндрі виникає крутильна хвиля, яка поширюється вздовж його осі.

Особливості опису крутильної хвилі в пружному циліндрі кругового поперечного перерізу є такими [9]:

1) застосовуються циліндричні координати (r, ϑ, z);

2) деформований стан є осесиметричним; (1)

3) радіальне і осьове зміщення відсутні $u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0$.

Тоді система з трьох рівнянь руху циліндра спрощується до вигляду

$$u_{\vartheta, rr} + (1/r)\, u_{\vartheta, r} - (1/r^2)\, u_\vartheta + u_{\vartheta, zz} - (1/v_T^2)\, u_{\vartheta, tt} = 0, \tag{2}$$

де $v_T = \sqrt{\mu/\rho}$ — фазова швидкість зсувної чи плоскої поперечної хвилі в лінійно пружному матеріалі; μ — модуль зсуву і ρ — густина цього матеріалу.

Класичний аналіз крутильної хвилі проводиться у декілька кроків.

Крок 1. Припускається, що колове зміщення u_θ є гармонічним у часі і просторі (тобто, розглядається розв'язок у вигляді хвилі)

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta(r)\, e^{i(k_z z - \omega t)}, \tag{3}$$

Такий розв'язок вважають гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою ω у часі і за просторовою координатою z рухається хвиля з довжиною $\lambda = (2\pi/k_z)$ та хвильовим числом k_z. При цьому циліндр піддається деформації кручення і саме тому хвилю називають крутильною.

Крок 2. З представлення хвилі (3) випливає, що амплітуда хвилі змінюється зі зміною радіуса. Ця амплітуда визначається з рівняння

$$u_{\vartheta, rr}^o + (1/r)\, u_{\vartheta, r}^o + [k_z^2 - k_T^2 - (1/r^2)]\, u_\vartheta^o = 0. \tag{4}$$

Крок 3. Розв'язок рівняння (4) виражається через циліндричну функцію (функцію Бесселя першого роду і першого індекса) $\tilde{u}(r) = \tilde{u}^o J_1(\beta r)$, $\beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2}$ і розв'язок у вигляді крутильної хвилі є таким

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1(\beta r)\, e^{i(k_z z - \omega t)}. \tag{5}$$

Крок 4. Хвильове число k_z і відповідна фазова швидкість $v_z = (\omega/k_z)$ визначаються з умови відсутності напружень на боковій поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = \sigma_{r\vartheta}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \tag{6}$$

Далі враховують формули

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \varepsilon_{rr} = 0, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = (1/2)[u_{\vartheta,r} - (1/r)\, u_\vartheta], \quad \varepsilon_{rz} = 0, \quad e = 0,$$

підставляють розв'язок (5) у граничні умови (6) і для знаходження k_z отримують трансцендентне рівняння $\beta r^o J_0(\beta r^o) = 2J_1(\beta r^o)$. Це рівняння має нескінченну кількість коренів $\beta_k r^o \quad (k = 1, 2, \ldots)$, які для конкретної задачі знаходять чисельно. Відповідно, крутильна хвиля має нескінченну кількість мод з відмінними між собою фазовими швидкостями:

$$(v_z)_k = v_T \sqrt{1 + \beta^2 (k_z)_k^2}.$$

Побудова нелінійного хвильового рівняння, яке описує поширення пружних крутильних хвиль. Така побудова потребує застосування інструментів нелінійної теорії пружності. Тут слід використовувати циліндричну (криволінійну) ортогональну систему координат $\theta^1 = r,\ \theta^2 = \vartheta,\ \theta^3 = z$. У цій системі довжина вектора обчислюється за формулою [8]

$$(ds)^2 = g_{ik} d\theta^i d\theta^k = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + (dz)^2,$$

метричні тензори мають компоненти

$$\left\| g_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \left\| g^{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

базисні вектори $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), (\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3})\ \delta_n^k = \vec{e}^{\,k} \cdot \vec{e}_n$ мають довжини

$$\left|\vec{e}_1\right| = 1, \left|\vec{e}_2\right| = r, \left|\vec{e}_3\right| = 1, \left|\vec{e}^{\,1}\right| = 1, \left|\vec{e}^{\,2}\right| = (1/r), \left|\vec{e}^{\,3}\right| = 1,$$

лише три символи Крістоффеля першого роду Γ_{ki}^m нерівні нулю

$$\Gamma_{22}^1 = -r,\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = (1/r). \tag{7}$$

Далі слід вибрати конфігурацію (стан) нелінійно пружного середовища. Таких станів при описі деформування циліндричними координатами може бути чотири [8]. Для опису крутильних хвиль потрібно вибирати конфігурацію, яка відповідає постановці задачі про крутильні хвилі в лінійному наближенні (1). Це є осесиметрична конфігурація з віссю симетрії Oz, яка залежить від координат r, z і не залежить від координати ϑ. У цій конфігурації стосовно крутильних хвиль (1) компоненти вектора зміщень є такими:

$$\vec{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) = \{u_1 = 0, u_2 = u_2(\theta^1, \theta^3, t), u_3 = 0\} = \{u^1 = 0, u^2 = u^2(\theta^1, \theta^3, t), u^3 = 0\}, \tag{8}$$

$$u_i = g_{ik} u^k \to u_1 = u^1, u_2 = r^2 u^2, u_3 = u^3,$$

Компоненти нелінійного тензора деформацій Коші—Гріна обчислюються за допомогою похідних ко- і контраваріантних компонентів вектора зміщень:

загальна формула — $\nabla_i u^k = \dfrac{\partial u^k}{\partial \theta^i} + u^j \Gamma_{ji}^k,\ \nabla_i u_j = \dfrac{\partial u_j}{\partial \theta^i} - u_k \Gamma_{ji}^k,\ \nabla_1 u^1 = 0,\ \nabla_i u_1 = 0,\ \nabla_1 u^2 = u_{,1}^2 + u^2 \Gamma_{21}^2 = u_{,1}^2 + \dfrac{1}{r} u^2,$

$$\nabla_1 u^3 = 0,\ \nabla_1 u_3 = 0,\ \nabla_2 u^1 = u^2\Gamma^1_{22} = -ru^2,\quad \nabla_2 u_1 = -u_2\Gamma^2_{12} = -\frac{1}{r}u_2,\ \nabla_2 u^2 = 0,\quad \nabla_2 u_2 = 0,\ \nabla_2 u^3 = 0,\quad \nabla_2 u_3 = 0,$$

$$\nabla_3 u^1 = 0,\quad \nabla_3 u_1 = 0,\quad \nabla_3 u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial \theta^3} = u^2_{,3},\quad \nabla_3 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \theta^3} = u_{2,3},\quad \nabla_3 u^3 = 0,\quad \nabla_3 u_3 = 0,$$

і за умови (8) мають вигляд

загальна формула — $\varepsilon^{ij} = 1/2(\nabla_i u^j + \nabla_j u^i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k)$,

$$\varepsilon^{11} = 1/2(\nabla_1 u_2 \nabla_1 u^2) = 1/2(u_{2,1} - \frac{1}{r}u_2)(u^2_{,1} + \frac{1}{r}u^2)^2,\quad \varepsilon^{22} = 1/2(\nabla_2 u_1 \nabla_2 u^1) = 1/2u^2 u_2.$$

$$\varepsilon^{33} = 1/2\nabla_3 u_2 \nabla_3 u^2 = 1/2u^2_{,3}u_{2,3},\quad \varepsilon^{12} = 1/2\nabla_1 u^2 = 1/2(u^2_{,1} + \frac{1}{r}u^2),\quad \varepsilon^{23} = \frac{1}{2}\nabla_3 u^2 = \frac{1}{2}u^2_{,3},\quad (9)$$

$$\varepsilon^{13} = 1/2\nabla_1 u_2 \nabla_3 u^2 = (u_{2,1} - \frac{1}{r}u_2)u^2_{,3}.$$

Слід звернути увагу на те, що в рамках конфігурації (1) два компоненти $\varepsilon^{12}, \varepsilon^{23}$ тензора деформації $\varepsilon^{23} = r\varepsilon_{\vartheta z}$ є лінійними, а решта компонентів не має лінійних доданків і вони є лише квадратично нелінійними.

Далі необхідно розглянути три нелінійних рівняння руху, які використовуються в нелінійній теорії пружності. Вони в записі через тензор напружень Лягранжа σ^{kl} мають такий вигляд:

$$\nabla_k\,[\sigma^{ki}(\delta^n_i + \nabla_i u^n)] = \rho\ddot{u}^i. \qquad (10)$$

У випадку аналізу хвиль виявляється доцільним аналізувати рівняння руху лише як рівняння щодо зміщень. Тоді треба зробити декілька кроків для переходу від напружень до зміщень. Спочатку компоненти тензора напружень слід записувати через компоненти тензора деформацій за формулою $\sigma^{ik} = (\partial W / \partial \varepsilon^{ik})$. Для цього необхідно знати внутрішню енергію W як нелінійну функцію компонентів тензора деформації [8].

Наступний крок пов'язаний з вибором типу пружного матеріалу (середовища). З трьох можливих варіантів вибираємо варіант гіперпружного матеріалу і спосеред моделей деформування такого матеріалу вибираємо п'ятиконстантну модель Мернагана. Вона задається кубічно нелінійним пружним потенціалом [8]

$$W\ (I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}AI_3 + BI_1I_2 + \frac{1}{3}CI_1^3$$

зі стандартними представленнями перших трьох інваріантів тензора деформації

$$I_1(\varepsilon^{ik}) = \varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33} = \frac{1}{2}r^2[(u^2_{,1})^2 + (1/r)u^2_{,1}u^2 + 2(1/r^2)(u^2)^2 + (u^2_{,3})^2],$$

$$I_2(\varepsilon^{ik}) = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{ik} = (\varepsilon^{11})^2 + (\varepsilon^{22})^2 + (\varepsilon^{33})^2 + 2(\varepsilon^{12})^2 + 2(\varepsilon^{13})^2 + 2(\varepsilon^{23})^2, \qquad (11)$$

$$I_3(\varepsilon^{ik}) = \det\varepsilon^{ik} = \varepsilon^{11}\varepsilon^{22}\varepsilon^{33} + 2\varepsilon^{13}\varepsilon^{12}\varepsilon^{23} - \varepsilon^{22}(\varepsilon^{13})^2 - \varepsilon^{11}(\varepsilon^{23})^2 - (\varepsilon^{12})^2\varepsilon^{33}.$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2022. № 2

Тепер можна повернутися до рівнянь руху (10) і згадати, що для вибраної конфігурації лише одне з трьох не є тотожнім — рівняння щодо зміщення u^2

$$\nabla_k [\sigma^{k2} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] = \rho \ddot{u}^2 \to \nabla_k [\sigma^{k2} (1 + \nabla_2 u^2)] = \rho \ddot{u}^2,$$

$$\to \nabla_1 [\sigma^{12} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] + \nabla_3 [\sigma^{32} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] = \rho \ddot{u}^2 \to \nabla_1 \sigma^{12} + \nabla_3 \sigma^{32} = \rho \ddot{u}^2. \qquad (12)$$

Тому не всі компоненти тензора напружень σ^{ik} потрібні для запису рівняння руху (12) (у даному випадку воно ж і хвильове рівняння) через компоненти тензора деформацій. Таким чином, з (12) випливає, що потрібен тільки запис дотичних напружень σ^{12}, σ^{23}:

$$\sigma^{12} = \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{12}} + B I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} = 4\mu \varepsilon^{12} + \frac{2}{3} A (\varepsilon^{13} \varepsilon^{23} - \varepsilon^{12} \varepsilon^{33}) + 4B \varepsilon^{12} (\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}), \qquad (13)$$

$$\sigma^{23} = +\mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{23}} + B I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} =$$

$$= 4\mu \varepsilon^{23} + \frac{1}{3} A [2\varepsilon^{13} \varepsilon^{12} - 2\varepsilon^{11} \varepsilon^{23}] + 4B \varepsilon^{23} [\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}]. \qquad (14)$$

Рівняння руху (12) з врахуванням представлень (13), (14) має вигляд

$$\begin{gathered} 4\mu (\varepsilon^{12}_{,1} + \varepsilon^{23}_{,3}) + \frac{2}{3} A [\varepsilon^{13}_{,1} \varepsilon^{23} + \varepsilon^{13} \varepsilon^{23}_{,1} - \varepsilon^{12}_{,1} \varepsilon^{33} + \varepsilon^{12}_{,3} (\varepsilon^{13} - \varepsilon^{11}) + \varepsilon^{12} (\varepsilon^{13}_{,3} - \varepsilon^{33}_{,1} - \varepsilon^{11}_{,3})] + \\ + 4B (\varepsilon^{12}_{,1} + \varepsilon^{23}_{,3})(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}) + \varepsilon^{12} (\varepsilon^{11}_{,1} + \varepsilon^{22}_{,1} + \varepsilon^{33}_{,1}) + \varepsilon^{23} (\varepsilon^{11}_{,3} + \varepsilon^{22}_{,3} + \varepsilon^{33}_{,3}) = \rho \ddot{u}^2 \end{gathered} \qquad (15)$$

Якщо в рівнянні (15) врахувати формули (9), то його можна записати через зміщення

$$\mu [L u_\vartheta \equiv (u_{\vartheta,11} + (1/r) u_{\vartheta,1} - (1/r^2) u_\vartheta + u_{\vartheta.33})] - \rho u_{\vartheta,tt} = \qquad (16)$$

$$= \boxed{L u_\vartheta (1/2) B [r^2 (u_{\vartheta,1})^2 + r u_{\vartheta,1} u + 2 u_\vartheta{}^2 + (u_{\vartheta,3})^2]} \quad -(1/6)(A - 9B)[r u_1 (u_3)^2 + 2u (u_3)^2] +$$

$$+(1/3) A \begin{bmatrix} +r^2 u_1 u_3 u_{13} - (1/2) r^2 (u_3)^2 u_{11} + (1/2) r^2 (u_1)^2 u_{33} + \\ +(3/2) r u u_1 u_{33} + 2 r u u_3 u_{31} + (1/2) u^2 u_3 + (1/2) u^2 u_{33} \end{bmatrix} +$$

$$+B \begin{Bmatrix} +r^2 (u_3)^2 u_{33} + 2r^2 (u_1)^2 u_{11} + r^2 (u_1)^2 u_{13} + (1/2) r (u_1)^2 u_{11} + \\ +(3/2) r (u_1)^3 + (5/2) u^2 u_1 + (5/2) r u u_3 u_{13} + 2 r u u_1 u_{11} + 4u (u_1)^2 + (1/2) u^2 u_{11} \end{Bmatrix}.$$

Отримане рівняння (16) являє собою нове нелінійне хвильове рівняння, ліва частина якого повністю збігається з лінійним хвильовим рівнянням (4), а права частина містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення.

Таким чином, квадратична нелінійність, яка характерна, наприклад, для деяких циліндричних хвиль, не присутня в рівнянні (16) і крутильні хвилі є виключно кубічно нелінійними в рамках реалізованого підходу.

Окрім вказаної вище особливості нового нелінійного хвильового рівняння, слід ще відзначити декілька інших особливостей.

Права нелінійна частина рівняння (16) містить багато нелінійних доданків. Подібна ситуація виникала і раніше при вивченні плоских і циліндричних хвиль [8, 10, 11]. При застосуванні трьох різних підходів до знаходження наближених розв'язків такого роду нелінійного хвильового рівняння було виявлено, що рядом нелінійних доданків можна знехтувати, враховуючи лише доданок, подібний до лінійної частини хвильового рівняння. Отже, присутність в рівнянні багатьох нелінійних доданків у ряді випадків не створює великих перепон в знаходженні наближеного розв'язку.

Зазвичай теорії пружності розрізняють два типи нелінійностей в основних рівняннях — геометричну і фізичну. Геометрична виникає, коли в записі тензора деформації враховуються квадратично нелінійні доданки. Тоді у загальному випадку при записі хвильових рівнянь у цих рівняннях виникають нелінійні до-данки з множниками у вигляді пружних постійних Ляме μ, λ. Як свідчить хвильове рівняння (16), в рамках прийнятої постановки задачі про крутильні хвилі такі доданки відсутні. Присутні лише нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних постійних Мернагана A, B, що свідчить про врахування у рівнянні (16) лише фізичної нелінійності. Отже, ця ситуація не є наслідком нехтування геометричної нелінійності, а наслідком специфіки загальної для теорії пружності постановки задачі про крутильні хвилі.

Ще одна особливість рівняння (16) пов'язана з виразом у правій частині, який поміщений у рамку. Він містить лінійний оператор L. Якщо знехтувати всіма іншими нелінійними доданками і врахувати лише вказаний вище вираз, то можна застосувати до аналізу наближених розв'язків рівняння (16) методи повільно змінних амплітуд, послідовних наближень, обмеження на градієнт зміщення [8, 10, 11].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Altayeb Y. New scenario of decay rate for system of three nonlinear wave equations with viscoelasticities. *AIMS Mathematics*. 2021. **6**, Iss. 7. P. 7251—7265. https://doi.org/10.3934/math.2021425
2. Arbab I.A. A New Wave Equation of the Electron. *J. Modern Physics*. 2011. **2**, № 9. P. 1012—1016. https://doi.org/10.4236/jmp.2011.29121
3. Du X., Fletcher R.P., Fowler P.J. A New Pseudo-acoustic Wave Equation for VTI Media // Conf. Proc. 70th EAGE Conf. and Exhibition incorporating SPE EUROPEC. 2008. Jun 2008. https://doi.org/10.3997/2214-4609.20147774
4. Ueda H. A new example of the dissipative wave equations with the total energy decay. *Hiroshima Math. J.* 2016. **46**, № 2. P. 187—193. https://doi.org/10.32917/hmj/1471024948
5. Wu Z., Alkhalifah T. A New Wave Equation Based Source Location Method with Full-waveform Inversion. Conf. Proc., 79th EAGE Conf. and Exhibition 2017, Jun. P. 1—5. https://doi.org/10.3997/2214-4609.201700753
6. Yang J., Zhu H. A new time-domain wave equation for viscoacoustic modeling and imaging. Proc. of the 2018 SEG Int. Exp. and Annual Meeting, Anaheim, California, USA, October 2018. Paper Number: SEG-2018-2974332. https://doi.org/10.1190/segam2018-2974332.1
7. Zakia T., Boulaaras S., Degaichia H., Allahem A. Existence and blow-up of a new class of nonlinear damped wave equation. *J. Intelligent & Fuzzy Systems*. 2020. **38**, № 3. P. 2649—2660. https://doi.org/10.3233/JIFS-179551
8. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. Heidelberg: Springer, 2014. 455 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8
9. Nowacki W. Theory of Elasticity. Warszawa: PWN, 1970. 780 p.
10. Rushchitsky J.J. Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects. *Int. J. Appl. Math. Mech*. 2012. **8**, № 6. P. 400—443.
11. Rushchitsky J.J. Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution, Chapter 3 in the book "Understanding Plane Waves". London: Nova Science Publ., 2019. 320 p.

Надійшло до редакції 07.12.2021

REFERENCES

1. Altayeb, Y. (2021). New scenario of decay rate for system of three nonlinear wave equations with viscoelasticities. AIMS Mathematics. 6, Iss. 7, pp. 7251-7265. https://doi.org/10.3934/math.2021425
2. Arbab, I. A. (2011). A New Wave Equation of the Electron. J. Modern Physics. 2, No. 9, pp. 1012-1016. https://doi.org/10.4236/jmp.2011.29121
3. Du, X., Fletcher, R. P. & Fowler, P. J. (2008). A New Pseudo-acoustic Wave Equation for VTI Media. Conf. Proc. 70th EAGE Conf. and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2008, Jun. https://doi.org/10.3997/2214-4609.20147774
4. Ueda, H. (2016). A new example of the dissipative wave equations with the total energy decay. Hiroshima Math. J. 46, No. 2, pp. 187-193. https://doi.org/10.32917/hmj/1471024948
5. Wu, Z. & Alkhalifah, T. (2017). A New Wave Equation Based Source Location Method with Full-waveform Inversion // Conf. Proc., 79th EAGE Conf. and Exhibition 2017, Jun. P. 1-5. https://doi.org/10.3997/2214-4609.201700753
6. Yang, J. & Zhu, H. (2018). A new time-domain wave equation for viscoacoustic modeling and imaging. Proc. of the 2018 SEG Int. Exp. and Annual Meeting, Anaheim, California, USA, October 2018. Paper Number: SEG-2018-2974332. https://doi.org/10.1190/segam2018-2974332.1
7. Zakia, T., Boulaaras, S., Degaichia, H. & Allahem, A. (2020). Existence and blow-up of a new class of nonlinear damped wave equation. J. Intelligent & Fuzzy Systems. 38, No. 3. P.2649-2660. https://doi.org/10.3233/JIFS-179551
8. Rushchitsky, J. J. (2014). Nonlinear Elastic Waves in Materials. Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8
9. Nowacki, W. (1970). Theory of Elasticity. Warszawa: PWN. 780 p.
10. Rushchitsky, J. J. (2012). Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects. Int. J. Appl. Math. Mech., 8, No. 6, pp. 400-443.
11. Rushchitsky, J. J. (2019). Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution, Chapter 3 in the book "Understanding Plane Waves". London: Nova Science Publishers.

Received 07.12.2021

J.J. Rushchitsky, https://orcid.org/0000-0002-0830-5030

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

ELASTIC TORSIONAL WAVE AND CORRESPONDING NONLINEAR WAVE EQUATION

The new nonlinear wave equation describing the propagation of a torsional wave as one type of the elastic cylindrical waves is proposed. This equation is obtained using the tools of the nonlinear theory of elasticity within the framework of the five-constant Murnaghan's model. In additopn to the classical linear summands, it contains the only cubically nonlinear ones. Some specificities of the derived equation are commented.

Keywords: nonlinear elastic torsional wave, five-constant Murnaghan's model, new nonlinear wave equation.