ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.05.016
УДК 519.8

Т.Т. Лебєдєва, https://orcid.org//0000-0002-0041-2174
Н.В. Семенова, https://orcid.org// 0000-0001-5808-1155
Т.І. Сергієнко, https://orcid.org//0000-0003-0396-3315
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
e-mail: lebedevatt@gmail.com, nvsemenova@meta.ua, taniaser62@gmail.com

Стійкість і регуляризація частково цілочислових задач векторної оптимізації за можливих збурень критеріїв

Представлено академіком НАН України І.В. Сергієнком

Представлено нові результати, пов'язані з вивченням питань стійкості та регуляризації частково цілочислових задач векторної оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію, що складається з квадратичних чи лінійних функцій. Доведено стійкість задач з квадратичними критеріями для випадку пошуку розв'язків, оптимальних за Слейтером. Для випадку оптимізації за Парето розроблено підхід до регуляризації частково цілочислових задач з лінійними критеріальними функціями.

Ключові слова: *векторна задача цілочислової оптимізації, векторний критерій, стійкість, регуляризація, Парето-оптимальні розв'язки, множина Слейтера, збурення вхідних даних.*

На сьогодні при вирішенні важливих актуальних задач прийняття рішень, що виникають та розв'язуються за можливих збурень вхідних даних і описуються векторними моделями дискретної оптимізації, все більшого значення набувають питання їхньої стійкості та регуляризації.

Продовжуючи дослідження, відображені, зокрема, в роботах [1—8], представимо нові результати, пов'язані з вивченням питань стійкості та регуляризації частково цілочислових задач векторної оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію, що складається з квадратичних чи лінійних функцій.

Розглянемо задачу

$$Q(F,X): \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де $X \neq \varnothing$, $X \subset R^{n_1} \times Z^{n_2} \subset R^n$, $n_1 + n_2 = n$, $1 \leqslant n_1 < n$, R^n — n-вимірний дійсний простір; Z^{n_2} — множина всіх цілочислових векторів з R^{n_2}; $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_\ell(x))$;

Цитування: Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість і регуляризація частково цілочислових задач векторної оптимізації за можливих збурень критеріїв. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 5. С. 16—22. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.05.016

$f_i : R^{n_1} \times Z^{n_2} \to R^1$ — квадратичні функції вигляду $f_i(x) = \langle x, D_i x\rangle + \langle c_i, x\rangle$, $D_i = [d^i_{jk}] \in R^{n\times n}$, $c_i = (c_{i1}, ..., c_{in}) \in R^n$, $i \in N_\ell = \{1, ..., \ell\}$, $j, k \in N_n = \{1, ..., n\}$.

Під розв'язанням задачі $Q(F, X)$ будемо розуміти знаходження деякої підмножини множини $S\ell(F, X)$ оптимальних за Слейтером розв'язків:

$$S\ell(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\}, \quad (1)$$

де $\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$. Зокрема, якщо мова буде йти про задачу на відшукання точок множини Парето

$$P(F, X) = \{x \in X \mid \pi(x, F, X) = \varnothing\}, \quad (2)$$

де $\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geqslant F(x), \quad F(y) \neq F(x)\}$, то таку задачу будемо позначати $Q_P(F, X)$. Задачу на відшукання множини Слейтера позначатимемо $Q_{Sl}(F, X)$.

Очевидні такі співвідношення:

$$P(F, X) \subset S\ell(F, X) \quad (3)$$

і $\forall x \in X \quad \sigma(x, F, X) \subset \pi(x, F, X)$.

Для задачі $Q(F, X)$ як вхідні дані, що можуть зазнати збурень, будемо розглядати коефіцієнти векторного критерію F. Набір таких вхідних даних позначимо $u = (D, C) \in U \subset R^{n\times n\times \ell} \times R^{\ell \times n}$, де U — простір вхідних даних задачі, що стосуються векторного критерію, $D = (D_1, ..., D_\ell) \in R^{n\times n\times \ell}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell\times n}$. Поряд з позначеннями $F(x) = (f_1(x), ..., f_\ell(x))$ для векторної цільової функції і часткових критеріїв задачі $Q(F, X)$ будемо користуватися, коли це необхідно, також позначеннями $F_u(x) = (f^u_1(x), ..., f^u_\ell(x))$, які уточнюють, який саме елемент u із простору U вхідних даних відповідає задачі, що розглядається.

Далі для будь-якого натурального числа q дійсний векторний простір R^q розглядатимемо як нормований. Норму в R^q задамо формулою $\|z\| = \sum_{i \in N_q} |z_i|$, де $z = (z_1, ..., z_q) \in R^q$. Під нормою деякої матриці $B = [b_{ij}] \in R^{m\times k}$ будемо розуміти норму вектора $(b_{11}, b_{12}, ..., b_{mk})$. Зазначимо [9], що у скінченно-вимірному просторі R^q будь-які дві норми $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$ еквівалентні, тобто знайдуться такі числа $\alpha > 0$ та $\beta > 0$, що $\forall z \in R^q$ виконуються нерівності $\alpha\|z\|^{(1)} \leqslant \|z\|^{(2)} \leqslant \beta\|z\|^{(1)}$. Враховуючи цю еквівалентність, викладені далі результати справедливі й для інших норм, введених у скінченно-вимірному просторі.

Для набору вхідних даних $u \in U$ і будь-якого числа $\delta > 0$ визначимо множину збурених вхідних даних

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) \in U \mid \|u(\delta) - u\| < \delta\}.$$

Задача зі збуреними вхідними даними для векторного критерію матиме вигляд:

$$Q(F_{u(\delta)}, X) : \max\{F_{u(\delta)}(x) \mid x \in X\},$$

де $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = (f^{u(\delta)}_1(x), ..., f^{u(\delta)}_\ell(x))$.

Означення 1. Задачу $Q_{Sl}(F_u, X)$ ($Q_P(F_u, X)$) назвемо **стійкою за векторним критерієм**, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ виконується умова $Sl(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(Sl(F_u, X))$ (відповідно $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$.

Тут і далі $O_\varepsilon(B) = \{x \in R^n \mid \inf_{y \in B} \|x - y\| < \varepsilon\}$ — ε-окіл будь-якої множини $B \subset R^n$.

Нагадаємо деякі відомі поняття, що будуть використовуватися нами надалі у зв'язку з дослідженням питань стійкості задачі $Q_{Sl}(F_u, X)$ та регуляризації задачі $Q_P(F_u, X)$) за можливих збурень вхідних даних і характеризують властивості неперервності і замкненості точково-множинних відображень.

Нехай $\Gamma: U \to 2^X$ — точково-множинне відображення, яке кожній точці $u \in U$ ставить у відповідність деяку підмножину $\Gamma(u)$ множини X (наприклад, підмножину $S\ell(F_u, X)$ або $P(F_u, X)$). Точково-множинне відображення Γ вважається **напівнеперервним зверху за Хаусдорфом** у деякій точці $\overline{u} \in U$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(\overline{u})$: $\Gamma(u(\delta)) \subset O_\varepsilon(\Gamma(\overline{u}))$.

Враховуючи означення 1, відзначимо, що стійкість за векторним критерієм задачі $Q_{Sl}(F_{\overline{u}}, X)$ ($Q_P(F_{\overline{u}}, X)$), де $\overline{u} \in U$, означає, що точково-множинне відображення $Sl: U \to 2^X$, $u \to Sl(u) = Sl(F_u, X)$ (відповідно відображення $P: U \to 2^X$, $\quad u \to P(u) = P(F_u, X)$) є напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у точці $\overline{u} \in U$.

Відображення $\Gamma: U \to 2^X$ називається **напівнеперервним зверху за Бержем** у точці $u \in U$ за умови, що для будь-якої відкритої множини $\Omega \subset X$, такої, що $\Gamma(u) \subset \Omega$, $\exists \delta = \delta(\Omega) > 0$, таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u): \Gamma(u(\delta)) \subset \Omega$. **Замкненість** відображення Γ у точці $u \in U$ означає, що для будь-яких послідовностей $\{u_s\} \subset U$ та $\{x_s\} \subset X$ таких, що $\lim_{s \to \infty} u_s = u$, $\lim_{s \to \infty} x_s = x^o \in X$, з належностей $x_s \in \Gamma(u_s)$, $s \in N$, випливає належність $x^o \in \Gamma(u)$.

Сформулюємо згідно з [4] дві елементарні властивості точково-множинних відображень, які використаємо далі під час доведення теореми 1 про напівнеперервність зверху за Хаусдорфом точково-множинного відображення $Sl: U \to 2^X$, $\quad u \to Sl(u) = Sl(F_u, X)$.

Властивість 1. Якщо множина X є компактом (тобто обмеженою і замкненою), то із замкненості точково-множинного відображення $\Gamma: U \to 2^X$ у деякій точці $u \in U$ випливає його напівнеперервність зверху за Бержем у цій точці.

Властивість 2. З напівнеперервності зверху за Бержем точково-множинного відображення $\Gamma: U \to 2^X$ у точці $u \in U$ випливає його напівнеперервність зверху за Хаусдорфом у цій точці.

Теорема 1. *Нехай допустима множина X задачі $Q(F_u, X)$, де $u \in U$, є компактом. Тоді точково-множинне відображення $Sl: U \to 2^X$, є замкненим і напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у точці $u \in U$.*

Доведення. Доведемо спочатку замкненість точково-множинного відображення $Sl: U \to 2^X$ у точці $u = (D, C) \in U$ за умови, що множина X є компактом. Розглянемо дві будь-які послідовності $\{u_s\} \subset U$ та $\{x_s\} \subset X$, такі, що

$$\lim_{s \to \infty} u_s = u, \ \lim_{s \to \infty} x_s = x^o \in X, \tag{4}$$

$u_s = (D^s, C^s)$, $D^s = (D_1^s, ..., D_\ell^s) \in R^{n \times n \times \ell}$, $C^s = [c_{ij}^s] \in R^{\ell \times n}$, $x_s \in Sl(F_{u_s}, X)$, $s \in N$. Останні належності означають, що $\forall (y \in X, s \in N) \ \exists i \in N_\ell$:

$$\langle y, D_i^s y \rangle + \langle c_i^s, y \rangle \leqslant \langle x_s, D_i^s x_s \rangle + \langle c_i^s, x_s \rangle, \tag{5}$$

де $c_i^s = (c_{i1}^s, ..., c_{in}^s) \in R^n$.

Покажемо, що $x^o \in Sl(F_u, X)$. Нехай (від супротивного) $\exists z \in X : F_u(z) > F_u(x^o)$, тобто $\forall i \in N_\ell : \langle z, D_i z\rangle + \langle c_i, z\rangle > \langle x^0, D_i x^0\rangle + \langle c_i, x^o\rangle$. Тоді виходячи з формул (4), а також враховуючи порядкові і арифметичні властивості границь послідовностей точок та еквівалентність збіжності послідовностей у будь-якому дійсному векторному просторі з покоординатною їхньою збіжністю [9], приходимо до висновку, що існує такий номер $s_o \in N$, що $\forall s > s_o$ і $\forall i \in N_\ell$ справедлива нерівність

$$\langle z, D_i^s z\rangle + \langle c_i^s, z\rangle > \langle x_s, D_i^s x_s\rangle + \langle c_i^s, x_s\rangle \,. \tag{6}$$

Проте з формул (5) випливає, що $\forall s \in N \;\; \exists i \in N_\ell : \langle z, D_i^s z\rangle + \langle c_i^s, z\rangle \leqslant \langle x_s, D_i^s x_s\rangle + \langle c_i^s, x_s\rangle$. Отже, дістали протиріччя з нерівністю (6), яке доводить замкненість відображення $Sl : U \to 2^X$ у точці $u \in U$. Звідси, враховуючи наведені вище властивості 1 і 2 точково-множинних відображень і припущення щодо компактності множини X, випливає напівнеперервність зверху за Бержем відображення $Sl : U \to 2^X$ у точці $u \in U$, з якої, в свою чергу, випливає напівнеперервність зверху за Хаусдорфом цього відображення. Доведення завершено.

Наслідок 1. Якщо допустима множина X задачі $Q(F_u, X)$, де $u \in U$, є компактом, то $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $S\ell(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon S\ell(F_u, X)$, тобто задача $Q_{Sl}(F_u, X)$ на відшукання множини Слейтера є стійкою за векторним критерієм.

Відносно умов стійкості задачі $Q_P(F, X)$ пошуку множини Парето нагадаємо такі відомі твердження.

Теорема 2 [7]. *Якщо допустима множина X задачі $Q_P(F, X)$ є компактом, тоді достатньою умовою стійкості задачі за векторним критерієм є виконання рівності*

$$S\ell(F, X) = \mathrm{cl}(P(F, X)), \tag{7}$$

де $\mathrm{cl}B$ *— замикання будь-якої множини* $B \subset R^n$.

Зауважимо, що теорема 2 справедлива також для задачі у більш загальній постановці [8], а саме: на часткові критеріальні функції, що складають векторний критерій оптимізації, накладається лише умова неперервності, а множина $X \subset R^n$ має довільну структуру. В роботах [3, 4] доведено необхідність виконання умови (7) для стійкості задачі оптимізації за Парето у випадку, коли векторний критерій складається з лінійних функцій.

Розглянемо підхід до регуляризації можливо нестійкої частково цілочислової задачі $Q_P(F, X)$ для випадку, коли множина X її допустимих розв'язків є непорожнім компактом, а векторний критерій F оптимізації складається з лінійних функцій

$$f_i(x) = \langle c_i, x\rangle \,, \;\; i \in N_\ell \,. \tag{8}$$

За такої умови набір u вхідних даних, які можуть підлягати збуренню, складається з елементів матриці C , тобто $u = C \subset U \subset R^{\ell \times n}$. Позначимо таку задачу $Q_P(F_C, X)$.

Якщо припустити, що для задачі $Q_P(F_C, X)$ виконується рівність $S\ell(F_C, X) = \mathrm{cl}(P(F_C, X))$ і, отже, у відповідності до теореми 2 вона є напевно стійкою до збурень елементів матриці C, тоді при її розв'язанні отримаємо розв'язки, близькі до істинних, навіть у випадку, коли мають місце досить невеликі помилки в поданні матриці C.

Якщо припустити, що задача $Q_P(F_C, X)$ не є стійкою, тоді за означенням 1 $\exists \varepsilon > 0$, таке, що $\forall \delta > 0$ знайдеться матриця $C(\delta) \in O_\delta(C) = \{C(\delta) \in U \mid \|C(\delta) - C\| < \delta\}$, для якої виконується нерівність $P(F_{C(\delta)}, X) \setminus O_\varepsilon P(F_C, X) \neq \varnothing$. У цьому разі при розв'язанні задачі $Q_P(F_{C(\delta)}, X)$ з можливими збуреннями (помилками, неточностями) у вхідних даних векторного критерію існує вірогідність отримати такі її оптимальні розв'язки, які не є Парето-оптимальними для задачі $Q_P(F_C, X)$. Щоб запобігти цьому, пропонується перейти від розв'язання можливо нестійкої задачі $Q_P(F_C, X)$ оптимізації за Парето до розв'язання напевно стійкої задачі $Q_{S\ell}(F_{C^\tau}, X)$ на відшукання розв'язків, оптимальних за Слейтером, в якій матриця C^τ коефіцієнтів векторного критерію є спеціальним чином збуреною (зміненою) у порівнянні з початковою матрицею C, а τ — параметр збурення. При цьому будь-який оптимальний за Слейтером розв'язок задачі $Q_{S\ell}(F_{C^\tau(\delta)}, X)$ з можливими збуреннями у матриці C^τ буде одночасно шуканим Парето-оптимальним розв'язком початкової задачі $Q_P(F_C, X)$, тобто $\forall \varepsilon >\ \ \exists \delta > 0$, таке, що $\forall C^\tau(\delta) \in O_\delta(C^\tau)$: $S\ell(F_{C^\tau(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon P(F_{C^\tau}, X)$.

Для обґрунтування даного способу регуляризації можливо нестійкої задачі $Q_P(F_C, X)$ застосуємо одне з положень теорії збурених конусів перспективних напрямків, представленої, зокрема, в роботах [1–4, 6]. Це положення, сформульоване далі у твердженні 1, з'ясовує співвідношення, що виникає при певних збуреннях матриці C між конусом $K = \{x \in R^n \mid Cx \geqslant 0\}$, його лінійною підмножиною $K_0 = \{x \in R^n \mid Cx = 0\}$ і внутрішністю $\operatorname{int} K = \{x \in R^n \mid Cx > 0\}$. Виходячи з формул (1) і (2), приходимо до висновку, що $\forall x \in X$:

$$x \in P(F_C, X) \Leftrightarrow (x + (K \setminus K_0)) \cap X = \varnothing, \tag{9}$$

$$x \in Sl(F_C, X) \Leftrightarrow (x + \operatorname{int} K) \cap X = \varnothing. \tag{10}$$

Збуримо матрицю С, змінивши кожен її вектор-рядок $c_i, i \in N_\ell$, на такий: $c_i^\tau = c_i - \tau w$. Тут $\tau \in R^1$ — параметр збурення, $w \in R^n$ — внутрішня точка опуклої оболонки множини $\{c_1, ..., c_\ell\}$ векторів-рядків матриці C, $w = \sum_{i \in N_\ell} \mu_i c_i$, $\sum_{i \in N_\ell} \mu_i = 1$, $\mu_i > 0$ $(i \in N_\ell)$. Збуреній матриці $C^\tau = [c_{ij}^\tau] \in R^{\ell \times n}$ поставимо у відповідність опуклі конуси $K^\tau = \{x \in R^n \mid C^\tau x \geqslant 0\}$ і $K_0^\tau = \{x \in R^n \mid C^\tau x = 0\}$, отримані шляхом збурення конусів K та K_0.

Твердження 1. *Якщо* $\tau < 0$, *то має місце включення* $K \setminus K_0 \subset \operatorname{int} K^\tau$.

Доведення. Нехай x — будь-яка точка множини $K \setminus K_0$. Тоді $\forall i \in N_\ell$: маємо $c_i x \geqslant 0$ і крім того $\exists k \in N_\ell$: $\langle c_k, x \rangle > 0$. Враховуючи ці нерівності, дістаємо таку оцінку скалярного добутку $\langle w, x \rangle = \langle \sum_{i \in N_\ell} \mu_i c_i, x \rangle = \sum_{i \in N_\ell} \mu_i \langle c_i, x \rangle > 0$. Отже, $\forall \tau < 0$, маємо також $\langle c_i^\tau, x \rangle = \langle (c_i - \tau w), x \rangle = \langle c_i, x \rangle -$ $= \langle c_i, x \rangle - \tau \langle w, x \rangle > 0$, $i \in N_\ell$, що означає належність $x \in \operatorname{int} K^\tau$.

Наступне твердження разом з наслідком 1 теореми 1 складає підґрунтя запропонованого підходу до регуляризації за векторним критерієм можливо нестійкої частково цілочислової задачі $Q_P(F_C, X)$ з лінійними частковими критеріальними функціями вигляду (8).

Твердження 2 [2, 4]**.** *Для будь-якого* $\tau < 0$ *справджується включення*

$$S\ell(F_{C^\tau}, X) \subset P(F_C, X). \tag{11}$$

Згідно з наслідком 1 теореми 1 і твердженням 2 заключаємо, що у випадку, коли множина X є непорожнім компактом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, таке, що $S\ell(F_{C^\tau(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon S\ell(F_{C^\tau}, X) \subset O_\varepsilon P(F_C, X)$ $\forall C^\tau(\delta) \in O_\delta(C^\tau)$ і $\forall \tau < 0$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Задача частично целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости. *Кибернетика*. 1991. № 1. С. 58–61.
2. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ*. 1993. № 3. С. 172–176.
3. Козерацкая Л.Н. Задачи векторной оптимизации: устойчивость в пространстве решений и в пространстве альтернатив. *Кибернетика и систем. анализ*. 1994. № 6. С. 122–133.
4. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
5. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений. *Кибернетика и систем. анализ*. 2005. № 4. С. 90–100. https://doi.org/10.1007/s10559-005-0090-z
6. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Свойства возмущенных конусов, упорядочивающих множество допустимых решений векторной оптимизационной задачи. *Кибернетика и систем. анализ*. 2014. **50**, № 5. С. 71–77. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9661-1
7. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість за векторним критерієм задачі частково цілочислової оптимізації з квадратичними критеріальними функціями. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2020. № 10. С. 15–21. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.015
8. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Многокритериальная задача оптимизации: устойчивость к возмущениям входных данных векторного критерия. *Кибернетика и систем. анализ*. 2020. **56**, № 6. С. 107–114. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00315-9
9. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Вища школа. 1992. Часть.1. 495 с.

Надійшло до редакції 16.05.2022

REFERENCES

1. Kozeratskaya, L. N., Lebedeva, T. T. & Sergienko, T. I. (1991). Mixed integer vector optimization: Stability issues. Cybernetics and Systems Analysis, 27, No. 1, pp. 76-80.
2. Kozeratskaya, L. N., Lebedeva, T. T. & Sergienko, T. I. (1993). Regularization of integer vector optimization problems, Cybernetics and Systems Analysis, 29, No. 3, pp. 455-458.
3. Kozeratskaya, L. N. (1994). Vector optimization problems: Stability in the decision space and in the space of alternatives. Cybernetics and Systems Analysis, 30, No. 6, pp. 891-899.
4. Sergienko, I. V., Kozeratskaya, L. N. & Lebedeva, T. T. (1995). Stability and parametric analysis of discrete optimization problems, Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
5. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2005). Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. Cybernetics and Systems Analysis, 41, No. 4, pp. 551-558. https://doi.org/10.1007/s10559-005-0090-z
6. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2014). Properties of perturbed cones ordering the set of feasible solutions of vector optimization problem. Cybernetics and Systems Analysis, 50, No. 5, pp. 712-714 (in Ukrainian). https://doi.org/10.1007/s10559-014-9661-1
7. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2020). Stability by the vector criterion of a mixed integer optimization problem with quadratic criterial functions. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 10, pp. 15-21 (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.015
8. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2020). Multi-Objective Optimization Problem: Stability against Perturbations of Input Data in Vector-Valued Criterion. Cybernetics and Systems Analysis, 56, No. 6, pp. 953-958. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00315-9
9. Lyashko, I. I., Emelyanov, V. F. & Boyarcyuk, O. K. (1992). Mathematical analysis. Part.1. Kyiv: Visha shcola (in Ukrainian).

Received 16.05.2022

T.T. Lebedeva, https://orcid.org//0000-0002-0041-2174
N.V. Semenova, https://orcid.org// 0000-0001-5808-1155
T.I. Sergienko, https://orcid.org//0000-0003-0396-3315

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv

e-mail: lebedevatt@gmail.com, nvsemenova.@meta.ua, taniaser62@gmail.com

STABILITY AND REGULARIZATION OF PARTIALLY INTEGER PROBLEMS
OF VECTOR OPTIMIZATION WITH POSSIBLE PERTURBATIONS OF CRITERIA

New results related to the study of stability and regularization of partially integer vector optimization problems with possible perturbations of the input data of a vector criterion consisting of quadratic or linear functions are presented. The stability of problems with quadratic criteria for the case of finding solutions that are optimal according to Slater is proved. For the Pareto optimization case, an approach to the regularization of partially integer problems with linear criterion functions is developed.

Keywords: *vector integer optimization problem, vector criterion, stability, regularization, Pareto-optimal solutions, set of Slater, perturbations of initial data.*