https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.017
УДК 512.61 : 519.61

І.В. Сергієнко, https://orcid.org/0000-0002-1118-7451

О.М. Хіміч, https://orcid.org/0000-0001-9284-139X

Н.А. Варенюк, https://orcid.org/0000-0002-9294-0774

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
E-mail: aik@public.icyb.kiev.ua, khimich505@gmail.com, nvareniuk@ukr.net

Зважені псевдообернені матриці з індефінітними виродженими вагами

Представлено академіком НАН України О.М. Хімічем

Досліджено зважені псевдообернені матриці з виродженими знаконевизначеними вагами. Визначено необхідні й достатні умови існування та єдиності цих матриць. Наведено означення зважених псевдообернених матриць з індефінітними виродженими вагами в термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів матриць, що симетризуються. Отримано розвинення зважених псевдообернених матриць із змішаними вагами в матричні степеневі ряди і добутки, граничні зображення цих матриць.

Ключові слова: *зважені псевдообернені матриці, вагові матриці, матриці з індефінітними й виродженими вагами, матричні степеневі ряди і добутки, граничні зображення матриць.*

Визначення зваженої псевдооберненої матриці з додатно означеними вагами вперше було наведено в роботі [1]. У [2] введено поняття косої псевдооберненої матриці. В [3] показано, що множина зважених псевдообернених матриць, визначених в [1], збігається з множиною косих псевдообернених матриць, визначених в [2]. У [4] наведено визначення зваженої псевдооберненої матриці з виродженими вагами (з додатно напіввизначеними ваговими матрицями). Там же визначено необхідні й достатні умови існування розглянутого варіанта псевдообернених матриць із виродженими вагами. У роботі [5 та ін.] досліджено інші варіанти псевдообернених матриць із виродженими вагами. У [6] введено поняття *ML*-зваженої псевдооберненої матриці. У [7] зазначено умови існування зважених псевдообернених матриць із індефінітними невиродженими вагами. Робота [8] присвячена дослідженню зважених псевдообернених матриць із невиродженими знаконевизначеними вагами. У [9] отримано зображення зважених псевдообернених матриць зі змішаними ваговими матрицями через псевдообернені матриці Мура—Пенроуза і через інші псевдообернені матриці. В [10]

Ц и т у в а н н я: Сергієнко І.В., Хіміч О.М., Варенюк Н.А. Зважені псевдообернені матриці з індефінітними виродженими вагами. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 6. С. 17—27.
https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.017

наведено розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди й добутки. Вплив збурення вихідних даних на розв'язки задач обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків з додатно означеними вагами проаналізовано в [11]. В [12 та ін.] розглянуто зважене сингулярне розкладання квантерніонної матриці.

У цій статті визначається й досліджується зважена псевдообернена матриця з виродженими знаконевизначеними вагами.

Позначимо $\mathbb{R}^n$ n-вимірний векторний простір над полем дійсних чисел, де вектори суть матриці розміру $n\times 1$. Нехай H — симетрична додатно означена, додатно напіввизначена, або ж знаконевизначена матриця. В $\mathbb{R}^n$ введемо скалярний добуток за формулою

$$(u,v)_H = (Hu,v)_I ,$$

де $(u,v)_I = u^T v$, I — одинична матриця. Якщо метрична матриця H додатно означена або додатно напіввизначена, то звичайним чином можна нормувати простір $\mathbb{R}^n$, поклавши $\|u\|_H = (u,u)_H^{1/2}$. У першому випадку функція $\|u\|_H$ буде визначати норму, а в другому — напівнорму.

Визначимо зважену норму прямокутної матриці із симетричними невиродженими ваговими матрицями. Нехай $A\in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $H = H^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ і $V = V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці. Для множини матриць A норму введемо співвідношенням

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|AVx\|_{H^2}}{\|x\|_{I_n}} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|HAVx\|_{I_m}}{\|x\|_{I_n}} = \sup_{x\neq 0}\frac{(VA^T H^2 AVx, x)_{I_m}^{1/2}}{\|x\|_{I_n}} , \tag{1}$$

де $x\in \mathbb{R}^n$, а нижній індекс при одиничній матриці означає її порядок.

У [8] показано, що функція (1) є адитивною (узагальненою) матричною нормою, яка визначається за формулою

$$\|A\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T H^2 AV)]^{1/2}, \tag{2}$$

де $\lambda_{\max}(L)$ — максимальне власне значення матриці L.

Із (2) випливає, що при $H = I_m$, $V = I_n$ функція (1) визначає звичайну спектральну норму матриці A.

Нехай $A\in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $H = H^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ і $V = V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — вироджені матриці. Припускаємо, що виконуються умови

$$\operatorname{rank}(HA) = \operatorname{rank}(A), \quad \operatorname{rank}(AV) = \operatorname{rank}(A). \tag{3}$$

Покажемо, що у разі виконання умов (3) ранги матриць $VA^T H^2 AV$ і A збігаються. Нехай $\operatorname{rank}(A) = r$. На підставі першої умови з (3) маємо

$$\operatorname{rank}(A^T H^2 A) = \operatorname{rank}\{(HA)^T HA\} = r .$$

Використовуючи нерівність Фробеніуса [13] і нерівність для рангів добутку матриць, одержимо

$$\operatorname{rank}(VA^T) + \operatorname{rank}(A^T H^2 A) \leqslant \operatorname{rank}(A^T) + \operatorname{rank}(VA^T H^2 A) \leqslant 2\operatorname{rank}(A),$$

звідки на підставі останньої рівності і другої умови в (3) маємо

$$\operatorname{rank}(VA^T) = \operatorname{rank}(A) \leqslant \operatorname{rank}(VA^T H^2 A) \leqslant \operatorname{rank}(A),$$

тобто

$$\operatorname{rank}(VA^T H^2 A) = \operatorname{rank}(A).$$

З іншого боку, на основі нерівності Фробеніуса

$$\operatorname{rank}(VA^T H^2 A) + \operatorname{rank}(AV) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(VA^T H^2 AV),$$

звідки, враховуючи другу умову в (3) і останню рівність, маємо

$$\operatorname{rank}(VA^T H^2 AV) = \operatorname{rank}(A), \tag{4}$$

що й потрібно було показати.

Матриця $VA^T H^2 AV$ є симетричною додатно напіввизначеною. Нехай виконується умова (4). Тоді ненульова матриця $VA^T H^2 AV$ у разі виконання умов (3) має не тільки нульові власні значення, і з урахуванням (2) матрична норма (1) задовольняє першу аксіому матричних норм. Аналогічно тому, як це зроблено в [8], для зважених матричних норм з індефінітними невиродженими вагами, можна показати, що у випадку вироджених вагів виконуються й інші аксіоми матричних норм (крім кільцевої властивості). Отже, має місце лема.

Лема 1. *Нехай* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $H = H^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *і* $V = V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— вироджені матриці й виконуються умови* (3). *Тоді функція* (1) *є адитивною (узагальненою) матричною нормою.*

Легко бачити, що умови (3) є не тільки достатніми, але й необхідними.

Отримано такі співвідношення для матричних норм.

Лема 2. *Нехай* $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, *а* $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *— симетричні вироджені матриці й виконується одна з умов*

$$AMM_{II}^{+} = AM_{II}^{+}M = A, \quad MM_{II}^{+}B = M_{II}^{+}MB = B,$$

тоді мають місце співвідношення

$$\|AB\|_{HV} \leqslant \|A\|_{HM} \|B\|_{M_{II}^{+}V}, \quad \|AB\|_{HV} \leqslant \|A\|_{HM_{II}^{+}} \|B\|_{MV},$$

де M_{II}^{+} *— псевдообернена матриця Мура—Пенроуза до матриці М.*

Лема 3. *Нехай* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *й* $C_{II}^{+} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— вироджені знаконевизначені симетричні матриці й виконуються умови*

$$\operatorname{rank}(A^T BA) = \operatorname{rank}(A), \quad \operatorname{rank}(AC_{II}^{+}A^T) = \operatorname{rank}(A),$$

тоді ранги матриць A і $A^T BAC_{II}^{+}A^T$ *збігаються.*

Для доведення теореми існування єдиної зваженої псевдооберненої матриці з індефінітними виродженими вагами використовувалося таке твердження [5].

Лема 4. *Нехай для квадратних матриць K, L, M виконуються умови KM = MK, LM = ML. Тоді з рівності* $KM^2 = LM^2$ *випливає рівність KM = LM.*

Визначимо матриці, що симетризуються додатно напіввизначеними симетризаторами.

Означення 1. Квадратну матрицю U називатимемо такою, що симетризується зліва або справа за допомогою симетричних додатно напіввизначених матриць M і N, якщо виконуються відповідно умови

$$MU = U^T M, \ \operatorname{rank}(MU) = \operatorname{rank}(U);$$

$$UN = NU^T, \ \operatorname{rank}(UN) = \operatorname{rank}(U).$$

У низці робіт визначалися матриці, які симетризуються, і вивчалися їх властивості. Як симетризатори в основному виступають додатно означені матриці, а в роботах [14, 15] вивчалися H-симетричні матриці, де H передбачається ермітовою або симетричною невиродженою знаконевизначеною матрицею.

Означення 2. Матрицю Q, що визначається рівністю $Q^T HQ = I$, де H — симетрична додатно означена матриця, називатимемо H-зваженою ортогональною або ортогональною з вагою H.

Означення 3. Матрицю Q, що визначається рівністю $Q^T HQ = I(H)$, де H — симетрична додатно напівввизначена матриця, $I(H)$ — матриця інерції для H, називатимемо H-зваженою псевдоортогональною або псевдоортогональною з вагою H.

В [13] визначено умови, за яких матриця-добуток двох ермітових матриць буде матрицею, яка діагоналізується (є матрицею простої структури). Сформулюємо цей результат у вигляді леми для добутку двох симетричних дійсних матриць.

Лема 5. *Нехай A і B — симетричні матриці, причому одна з матриць додатно означена. Тоді власні значення матриці AB суть дійсні числа, при цьому матриця AB має просту структуру.*

Для подальшого дослідження зважених псевдообернених матриць, а саме для їх розвинення в матричні степеневі ряди й матричні степеневі добутки, важливе значення матиме така лема.

Лема 6. *Матриця $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, яка симетризується зліва додатно напіввизначеним симетризатором $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, за виконання умови*

$$H_{II}^{+} HL = L$$

зводиться до діагональної форми за допомогою G-зваженого ортогонального перетворення, тобто існують такі невироджені матриці U і G,

$$U^T GU = I,$$

що

$$U^T GLU = \Lambda, \quad U^T HLU = \Lambda, \tag{5}$$

а матриця L зображається у вигляді

$$L = U \Lambda U^T G, \tag{6}$$

де $G = QD^2Q^T$, Q — ортогональна матриця, яка діагоналізує матрицю H, тобто $Q^T HQ = \Phi$, $\Phi = DI(H)D = \operatorname{diag}(\varphi_i)$, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r > 0$, $\varphi_{r+1}, ..., \varphi_n = 0$ — власні значення матриці H, r — ранг матриці H, $D = \operatorname{diag}(+\sqrt{\varphi_1}, ..., +\sqrt{\varphi_r}, 1, ..., 1)$, $I(H)$ — матриця інерції для H. Стовпці матриці U утворюють лінійно незалежну систему власних векторів матриці L, а діагональні елементи матриці Λ є відповідними власними значеннями матриці L.

Наслідок 1. *Нехай* $F = L + \delta I$ *, де матриця* L *задовольняє умови леми* 6, *а* δ *— числовий параметр, тоді матриця* F *буде симетризованою зліва симетризатором* H *і формули* (5), (6) *для матриці* F *набудуть вигляду*

$$U^T G F^k U = (\Lambda + \delta I)^k,\ \ U^T H F^k U = (\Lambda + \delta I)^k,\ \ F^k = U(\Lambda + \delta I)^k U^T G,\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

а для випадку невиродженої матриці F *маємо*

$$U^T G F^{-k} U = (\Lambda + \delta I)^{-k},\ \ U^T H F^{-k} U = (\Lambda + \delta I)^{-k},\ \ F^{-k} = U(\Lambda + \delta I)^{-k} U^T G,\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

де матриці G, H, U *визначено в лемі* 6.

Наслідок 2. *Нехай матриця* $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *задовольняє умову* $L H_{II}^{+} H = L$ *, тоді* $L = L G^{-1} H$ *, де матриці* G, H *визначено в лемі* 6.

Лема 7. *Для довільних матриць* $(P + \delta I)^{-k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *,* $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *і дійсного числа* $-\infty < \delta < \infty$ *має місце тотожність*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \{I + \delta^{2^k} (P + \delta I)^{-(2^k)}\} (P + \delta I)^{-1} W = \sum_{k=1}^{2^n} \delta^{k-1} (P + \delta I)^{-k} W,\ \ n = 1, 2, \ldots .$$

Лема 8. *Для довільних матриць* $(L + \delta I)^{-k} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *,* $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *і дійсного числа* $-\infty < \delta < \infty$ *має місце тотожність*

$$M (L + \delta I)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{I + \delta^{2^k} (L + \delta I)^{-(2^k)}\} = M \sum_{k=1}^{2^n} \delta^{k-1} (L + \delta I)^{-k},\ \ \ n = 1, 2, \ldots .$$

Розглянемо питання існування та єдиності розв'язку системи матричних рівнянь.

Нехай $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ і $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симетричні знаконевизначені вироджені матриці. Зважену псевдообернену матрицю до матриці A визначимо як матрицю, що задовольняє систему матричних рівнянь

$$AXA = A,\ \ XAX = X,\ \ (BAX)^T = BAX,\ \ (CXA)^T = CXA. \tag{7}$$

Встановлено необхідні й достатні умови існування єдиного розв'язку системи матричних рівнянь (7), а також отримано зображення зваженої псевдооберненої матриці з індефінітними виродженими вагами в термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів матриць, що симетризуються.

Теорема 1. *Для того щоб система* (7) *мала єдиний розв'язок* $X = A_{BC}^{+}$ *, необхідно й достатньо, щоб виконувалися умови*

$$\operatorname{rank}(A^T B A) = \operatorname{rank}(A),\ \ \ \ \operatorname{rank}(A C_{II}^{+} A^T) = \operatorname{rank}(A),\ \ \ A C_{II}^{+} C = A, \tag{8}$$

причому матрицю A_{BC}^{+} *, що задовольняє* (7), (8), *можна записати у вигляді*

$$A_{BC}^{+} = C_{II}^{+} S A^T B, \tag{9}$$

де $S = f(A^T B A C_{II}^{+})$ *— многочлен від матриці* $A^T B A C_{II}^{+}$ *вигляду*

$$S = -\alpha_k^{-1} [(A^T B A C_{II}^{+})^{k-1} + \alpha_1 (A^T B A C_{II}^{+})^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} I], \tag{10}$$

$\alpha_p, p = 1, ..., n$ — *коефіцієнти характеристичного многочлена* $f(\lambda) = \det[\lambda I - A^T BAC_{II}^+]$, *а* α_k — *останній, відмінний від нуля коефіцієнт цього многочлена,* C_{II}^+ — *псевдообернена матриця Мура—Пенроуза до матриці C.*

Наслідок 3. *Зважена псевдообернена матриця із знаконевизначеними виродженими вагами, що записується системою матричних рівнянь* (7) *за виконання умов* (8), *може бути також записана у такому вигляді:*

$$A_{BC}^+ = S_1 C_{II}^+ A^T B = C_{II}^+ A^T B S_2 = C_{II}^+ A^T S_3 B,$$

де S_1, S_2, S_3 — многочлени від матриць, що симетризуються:

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}[(C_{II}^+ A^T BA)^{k-1} + \alpha_1 (C_{II}^+ A^T BA)^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} I],$$

$$S_2 = -\alpha_k^{-1}[(AC_{II}^+ A^T B)^{k-1} + \alpha_1 (AC_{II}^+ A^T B)^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} I],$$

$$S_3 = -\alpha_k^{-1}[(BAC_{II}^+ A^T)^{k-1} + \alpha_1 (BAC_{II}^+ A^T)^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} I].$$

Наслідок 4. *Із* (9), (10) *випливає, що індепотентні матриці* $A_{BC}^+ A$ *й* AA_{BC}^+, *які симетризуються, можна записати у такому вигляді:*

$$A_{BC}^+ A = C_{II}^+ S A^T BA = f(C_{II}^+ A^T BA) = -\alpha_k^{-1}[(C_{II}^+ A^T BA)^k +$$

$$+ \alpha_1 (C_{II}^+ A^T BA)^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1}(C_{II}^+ A^T BA)],$$

$$AA_{BC}^+ = AC_{II}^+ S A^T B = f(AC_{II}^+ A^T B) = -\alpha_k^{-1}[(AC_{II}^+ A^T B)^k +$$

$$+ \alpha_1 (AC_{II}^+ A^T B)^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1}(AC_{II}^+ A^T B)].$$

Наслідок 5. *Із* (9) *випливають рівності* $A^T BAA_{BC}^+ = A^T B$, $A_{BC}^+ AC_{II}^+ A^T = C_{II}^+ A^T$.

Наслідок 6. *У разі* $\operatorname{rank}(A) = 1$ *маємо формулу* $A_{BC}^+ = [\operatorname{tr}(A^T BAC_{II}^+)]^{-1} C_{II}^+ A^T B$ *для обчислення зважених псевдообернених матриць зі знаконевизначеними виродженими вагами, де* $\operatorname{tr}(L)$ — *слід матриці L.*

Зауваження 1. Відзначимо, що в [5] установлено, що $\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(A)$, $AC_{II}^+ C = A$ є необхідними й достатніми умовами існування єдиного розв'язку системи матричних рівнянь (7), коли вагові матриці додатно напіввизначені.

Розглянемо два випадки зважених псевдообернених матриць із виродженими симетричними вагами, а саме: 1) матриця *C* додатно напіввизначена, а матриця *B* — знаконевизначена вироджена; 2) матриця *B* додатно напіввизначена, а матриця *C* — знаконевизначена вироджена.

Із теореми 1 і зауваження 1 для вказаних вище матриць випливають твердження.

Теорема 2. *Нехай у системі матричних рівнянь* (7) *матриця C додатно напіввизначена, а матриця B — знаконевизначена вироджена, тоді, щоб система* (7) *мала єдиний розв'язок*

$X = A_{BC}^{+}$, *необхідно й достатньо, щоб виконувалися умови*

$$\operatorname{rank}(A^T BA) = \operatorname{rank}(A), \ \ AC_{II}^{+}C = A, \tag{11}$$

причому матриця A_{BC}^{+}, яка *задовольняє* (7), (8), *може бути записана у вигляді*

$$A_{BC}^{+} = C_{II}^{+} S A^T B,$$

де $S = f(A^T BAC_{II}^{+})$ *— многочлен від матриці* $A^T BAC_{II}^{+}$ *вигляду*

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^T BAC_{II}^{+})^{k-1} + \alpha_1 (A^T BAC_{II}^{+})^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} I],$$

α_p, $p = 1, ..., n$ *— коефіцієнти характеристичного многочлена* $f(\lambda) = \det[\lambda I - A^T BAC_{II}^{+}]$, *а* α_k *— останній, відмінний від нуля коефіцієнт цього многочлена,* C_{II}^{+} *— псевдообернена матриця Мура—Пенроуза до матриці С.*

Теорема 3. *Нехай у системі матричних рівнянь* (7) *матриця В додатно напіввизначена, а матриця С — знаконевизначена вироджена, тоді, щоб система* (7) *мала єдиний розв'язок* $X = A_{BC}^{+}$, *необхідно й достатньо, щоб виконувалися умови*

$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(A), \quad \operatorname{rank}(AC_{II}^{+}A^T) = \operatorname{rank}(A), \quad AC_{II}^{+}C = A, \tag{12}$$

причому матрицю A_{BC}^{+}, що *задовольняє* (7), (8), *можна зобразити у вигляді*

$$A_{BC}^{+} = C_{II}^{+} S A^T B,$$

де $S = f(A^T BAC_{II}^{+})$ *— многочлен від матриці* $A^T BAC_{II}^{+}$ *вигляду*

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^T BAC_{II}^{+})^{k-1} + \alpha_1 (A^T BAC_{II}^{+})^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} I],$$

α_p, $p = 1, ..., n$ *— коефіцієнти характеристичного многочлена* $f(\lambda) = \det[\lambda I - A^T BAC_{II}^{+}]$, *а* α_k *— останній, відмінний від нуля коефіцієнт цього многочлена,* C_{II}^{+} *— псевдообернена матриця Мура—Пенроуза до матриці С.*

Далі будемо розглядати систему матричних рівнянь (7) за виконання умов

$$B_{II}^{+}BA = A, \quad \operatorname{rank}(AC_{II}^{+}A^T) = \operatorname{rank}(A), \quad AC_{II}^{+}C = A, \tag{13}$$

тобто, перша умова в (12) замінена на більш жорстку умову, з якої очевидним чином випливає перша умова в (12).

Наведемо розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами в матричні степеневі ряди й матричні степеневі добутки. Спочатку розглянемо випадок, коли матриця C — додатно напіввизначена, а B — вироджена знаконевизначена, тобто розвинення зважених псевдообернених матриць, що задовольняють систему матричних рівнянь (7) за виконання умов (11). Такий вибір зважених псевдообернених матриць обумовлений твердженням леми 6 і її наслідків.

Теорема 4. *Для довільної матриці* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *симетричної знаконевизначеної виродженої матриці* $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, *симетричної додатно напіввизначеної матриці* $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *й дійсного* *числа* δ, що *задовольняє умову* $0<|\delta|<\frac{1}{2}\mu(C_{II}^{+}A^{T}BA)$, *мають місце співвідношення*

$$A_{BC}^{+}=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta E)^{-k}C_{II}^{+}A^{T}B\,, \tag{14}$$

$$\left\|A_{BC}^{+}-A_{\delta,p}^{+}\right\|_{G^{1/2}V}\leqslant|\delta|^{p}(\mu(C_{II}^{+}A^{T}BA)-|\delta|)^{-p}\left\|A_{BC}^{+}\right\|_{G^{1/2}V}\,, \tag{15}$$

де A_{BC}^{+} *— зважена псевдообернена матриця, що задовольняє умови* (7), (11), $A_{\delta,p}^{+}=\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta E)^{-k}C_{II}^{+}A^{T}B$, $p=1,2,\ldots$, $\mu(L)=\min\{|\lambda|:\lambda\neq 0\in\sigma(L)\}$, λ_i *— власні значення матриці* $C_{II}^{+}A^{T}BA$, *матриця* G *визначена в лемі* 6, $V=V^{T}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ *— будь-яка невироджена матриця.*

За виконання припущень теореми 4 на підставі леми 7 і формули (14) маємо таке розвинення зваженої псевдооберненої матриці зі знаконевизначеною симетричною виродженою ваговою матрицею $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ і додатно напіввизначеною матрицею $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ у матричний степеневий добуток:

$$A_{BC}^{+}=\prod_{k=0}^{\infty}\{I+\delta^{2^k}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta I)^{-(2^k)}\}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta I)^{-1}C_{II}^{+}A^{T}B\,.$$

Позначимо $A_{\delta,n}^{+}=\prod_{k=0}^{n-1}\{I+\delta^{2^k}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta I)^{-(2^k)}\}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta I)^{-1}C_{II}^{+}A^{T}B$, $n=1,2,\ldots$. Тоді на підставі леми 7 і оцінки (15) одержимо

$$\left\|A_{BC}^{+}-A_{\delta,n}^{+}\right\|_{G^{1/2}V}\leqslant\delta^{2^n}(\mu(C_{II}^{+}A^{T}BA)-|\delta|)^{-(2^n)}\left\|A_{BC}^{+}\right\|_{G^{1/2}V}\,. \tag{16}$$

З оцінки (15) випливає, що для будь-якого $p=1,2,\ldots$ маємо таке граничне зображення зваженої псевдооберненої матриці:

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta I)^{-k}C_{II}^{+}A^{T}B\,, \tag{17}$$

а з оцінки (16) для будь-якого $n=1,2,\ldots$ маємо

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to 0}\prod_{k=0}^{n-1}\{I+\delta^{2^k}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta I)^{-(2^k)}\}(C_{II}^{+}A^{T}BA+\delta I)^{-1}C_{II}^{+}A^{T}B\,. \tag{18}$$

Розглянемо випадок, коли матриця C — вироджена знаконевизначена, а B — додатно напіввизначена, тобто обґрунтуємо розвинення зважених псевдообернених матриць, що задовольняють систему матричних рівнянь (7) за виконання умов (13).

Теорема 5. *Для довільної матриці* $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, *симетричної додатно напіввизначеної матриці* $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, *симетричної знаконевизначеної виродженої матриці* $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *і дійсного* *числа* δ *, що задовольняє умову* $0<|\delta|<\frac{1}{2}\mu(AC_{II}^{+}A^{T}B)$ *, мають місце співвідношення*

$$A_{BC}^{+}=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}C_{II}^{+}A^{T}B(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-k}, \tag{19}$$

$$\left\|A_{BC}^{+}-A_{\delta,p}^{+}\right\|_{HG^{-1/2}}\leqslant|\delta|^{p}(\mu(AC_{II}^{+}A^{T}B)-|\delta|)^{-p}\left\|A_{BC}^{+}\right\|_{HG^{-1/2}}, \tag{20}$$

де A_{BC}^{+} *— зважена псевдообернена матриця, що задовольняє умови* (7), (13), $A_{\delta,p}^{+}=$ $=\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}C_{II}^{+}A^{T}B(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-k}$, $p=1,2,\ldots$, $\mu(L)$ *визначено в теоремі* 4, λ_i *— власні значення матриці* $AC_{II}^{+}A^{T}B$ *, матрицю G визначено в лемі* 6, $H=H^{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *— будь-яка невироджена матриця.*

За виконання припущень теореми 5 на підставі леми 8 і формули (19) маємо таке розвинення зваженої псевдооберненої матриці з додатно напіввизначеною симетричною ваговою матрицею $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ і знаконевизначеною симетричною виродженою ваговою матрицею $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ у матричний степеневий добуток:

$$A_{BC}^{+}=C_{II}^{+}A^{T}B(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{I+\delta^{2^{k}}(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-(2^{k})}\}.$$

Позначимо

$$A_{\delta,n}^{+}=C_{II}^{+}A^{T}B(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{I+\delta^{2^{k}}(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-(2^{k})}\},\ n=1,2,\ldots.$$

Тоді на підставі леми 8 і співвідношення (20) одержимо

$$\left\|A_{BC}^{+}-A_{\delta,n}^{+}\right\|_{HG^{-1/2}}\leqslant\delta^{2^{n}}(\mu(AC_{II}^{+}A^{T}B)-|\delta|)^{-(2^{n})}\left\|A_{BC}^{+}\right\|_{HG^{-1/2}}. \tag{21}$$

З оцінки (20) випливає, що для будь-якого p = 1,2,... маємо таке граничне зображення зваженої псевдооберненої матриці:

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to0}C_{II}^{+}A^{T}B\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-k}, \tag{22}$$

а з оцінки (21) для будь-якого n = 1,2,... маємо

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to0}C_{II}^{+}A^{T}B(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{I+\delta^{2^{k}}(AC_{II}^{+}A^{T}B+\delta I)^{-(2^{k})}\}. \tag{23}$$

Таким чином, із граничних зображень (17), (18), (22), (23), зважених псевдообернених матриць випливає, що при досить малому параметрі δ матриці A_{BC}^{+} й $A_{\delta,p}^{+}$, $A_{\delta,n}^{+}$ можуть як завгодно мало відрізнятися одна від одної і на основі запропонованих граничних зображень можна обчислювати наближення до зважених псевдообернених матриць. Оцінки близькості зважених псевдообернених матриць до їх наближених значень визначаються за допомогою формул (15), (16), (20), (21).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient observation. *J. Am. Stat. Assoc.* 1964. **59**, № 308. P. 1078—1111. https://doi.org/10.1080/01621459.1964.10480751
2. Milne R.D. An oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math.* 1968. **16**, № 5. P. 931—944. https://doi.org/10.1137/0116075
3. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. A note on the oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. **20**, № 2. P. 173—175. https://doi.org/10.1137/0120022
4. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. **21**, № 3. P. 480—482. https://doi.org/10.1137/0121051
5. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2009. **49**, № 8. С. 1347—1363.
6. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore Penrose inverses. *Linear Algebra Appl.* 1974. **9**. P. 155—167. https://doi.org/10.1016/0024-3795(74)90034-2
7. Rao C.R., Mitra S.K. Generalized inverse of matrices and its applications. New York: Wiley, 1971. 240 p.
8. Варенюк Н.А., Галба Е.Ф., Сергиенко И.В., Химич А.Н. Взвешенная псевдоинверсия с индефинитными весами. *Укр. мат. журн.* 2018. **70**, № 6. С. 752—772.
9. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через другие псевдообратные матрицы. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. **54**, № 2. С. 17—25.
10. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. **55**, № 5. С. 67—80.
11. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. **49**, № 3. С. 422—430.
12. Kyrchei I.I. Explicit determinantal representation formulas for the solution of the two-sided restricted quaternionic matrix equation. *J. Appl. Math. Comput.* 2018. **58**, № 1-2. P. 335—365. https://doi.org/10.1007/s12190-017-1148-6
13. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 548 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817
14. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Indefinite linear algebra and applications. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 2005. 357 p.
15. Lancaster P., Rózsa P. Eigenvectors of *H*-selfadjoint matrices. *Z. Angew. Math. Mech.* 1984. **64**, № 9. S. 439—441. https://doi.org/10.1002/zamm.19840640921

Надійшло до редакції 26.07.2022

REFERENCES

1. Chipman, J. S. (1964). On least squares with insufficient observation. J. Am. Stat. Assoc., 59, No. 308, pp. 1078-1111. https://doi.org/10.1080/01621459.1964.10480751
2. Milne, R. D. (1968). An oblique matrix pseudoinverse. SIAM J. Appl. Math., 16, No. 5, pp. 931-944. https://doi.org/10.1137/0116075
3. Ward, J. F., Boullion, T. L. & Lewis, T. O. (1971). A note on the oblique matrix pseudoinverse. SIAM J. Appl. Math, 20, No. 2, pp. 173-175. https://doi.org/10.1137/0120022
4. Ward, J. F., Boullion, T. L. & Lewis, T. O. (1971). Weighted pseudoinverses with singular weights. SIAM J. Appl. Math., 21, No. 3, pp. 480-482. https://doi.org/10.1137/0121051
5. Galba, E. F., Deineka, V. S. & Sergienko, I. V. (2009). Weighted pseudoinverses and weighted normal pseudosolutions with singular weights. Comput. Math. Math. Phys., 49, No. 8, pp. 1281-1297. https://doi.org/10.1134/S0965542509080016
6. Mitra, S. K. & Rao, C. R. (1974). Projections under seminorms and generalized Moore Penrose inverses. Linear Algebra Appl., 9, pp. 155-167. https://doi.org/10.1016/0024-3795(74)90034-2
7. Rao, C. R. & Mitra, S. K. (1971). Generalized inverse of matrices and its applications. New York: Wiley.
8. Varenyuk, N. A., Galba, E. F., Sergienko, I. V. & Khimich, A. N. (2018). Weighted pseudoinversion with indefinite weights. Ukr. Math. J., 70, pp. 866-889. https://doi.org/10.1007/s11253-018-1539-3

9. Galba, E. F. & Vareniuk, N. A. (2018). Representing weighted pseudoinverse matrices with mixed weights in terms of other pseudoinverses. Cybern. Syst. Anal., 54, pp. 185-192. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0019-y
10. Galba, E. F. & Vareniuk, N. A. (2019). Expansions of weighted pseudoinverses with mixed weights into matrix power series and power products. Cybern. Syst. Anal., 55, pp. 760-771. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00186-9
11. Nikolaevskaya, E. A. & Khimich, A. N. (2009). Error estimation for a weighted minimum-norm least squares solution with positive definite weights. Comput. Math. Math. Phys., 49, pp. 409-417. https://doi.org/10.1134/S0965542509030038
12. Kyrchei, I. I. (2018). Explicit determinantal representation formulas for the solution of the two-sided restricted quaternionic matrix equation. J. App. Math. Comput., 58, pp. 335-365. https://doi.org/10.1007/s12190-017-1148-6
13. Horn, R. A. & Johnson, C. R. (1985). Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817
14. Gohberg, I., Lancaster, P. & Rodman, L. (2005). Indefinite linear algebra and applications. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.
15. Lancaster, P. & Rózsa, P. (1984). Eigenvectors of *H*-selfadjoint matrices. Z. Angew. Math. Mech., 64, No. 9, pp. 439-441. https://doi.org/10.1002/zamm.19840640921

Received 26.07.2022

I.V. Sergienko, https://orcid.org/0000-0002-1118-7451
A. M. Khimich, https://orcid.org/0000-0001-9284-139X
N.A. Vareniuk, https://orcid.org/0000-0002-9294-0774

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: aik@public.icyb.kiev.ua, khimich505@gmail.com, nvareniuk@ukr.net

STUDY OF WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES WITH INDEFINITE SINGULAR WEIGHTS

The weighted pseudoinverse matrix with singular indefinite weights is investigated in the paper. The weighted matrix norms with indefinite weights are specified, and inequalities for norms of matrix products are established. It is shown that under certain conditions a matrix symmetrized from the left by a positive semidefinite symmetrizer [symmetrization operator] can be diagonalized by means of weighted orthogonal transformation. The necessary and sufficient conditions for the existence of the version under consideration of pseudoinverse matrices with singular indefinite weights are specified. And on basis of a theorem due to Cayley-Hamilton the representation of the weighted pseudoinverse matrix with indefinite singular weights is obtained in terms of coefficients of characteristic polynomials of symmetrizable matrices. The expansions of weighted pseudoinverse matrices with positive semidefinite and indefinite singular weights in matrix power series and matrix products are derived and investigated based on characteristics of symmetrizable matrices as well as on the representation of pseudoinverse matrices in terms of coefficients of characteristic polynomials of symmetrizable matrices. On the basis of these expansions the limitary representations of weighted pseudoinverse matrices with these weights are obtained.

Keywords: *weighted pseudoinverse matrices with singular indefinite weights, matrix power series, matrix power products, singular indefinite weights, expansions of the weighted pseudoinverse matrices.*