

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.065>

УДК 539.421

М.Ф. Селіванов, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

П.В. Фернаті, <https://orcid.org/0000-0002-5521-2225>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: mfs@ukr.net, pavel147223@gmail.com

Моделювання квазістатичного поширення тріщини у в'язкопружному ортотропному середовищі в рамках підходу інкременталізації конститутивних рівнянь

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

Розглядається алгоритм для моделювання процесу розвитку тріщини повзучості у в'язкопружному ортотропному середовищі. Цей алгоритм поєднує в'язкопружну інкрементну формулу та процедуру моделювання квазістатичного руйнування; алгоритм реалізовано в рамках методу скінченних елементів і проілюстровано числовим прикладом визначення зміни напружено-деформованого стану в околі зони передруйнування з часом. Як модель тріщини вибрано модель когезійної зони з нерівномірним законом зчеплення–відриву, яка описує наявну біля фронту тріщини зону передруйнування. Зростання тріщини описується в рамках деформаційного критерію. В числовому прикладі розглянуто поширення крайової тріщини в пластині з в'язкопружного ортотропного матеріалу, модулі релаксації якого описано однією експоненціальною функцією. Як закон зчеплення–відриву вибрано близький до рівномірного закон згладженої трапецеїдальної форми, що задовольняється для кожного дискретного моменту часу, знайденого запропонованим алгоритмом з урахуванням поточної геометрії тріщини.

Ключові слова: в'язкопружне ортотропне тіло, інкрементне в'язкопружне формулювання, метод скінченних елементів, відтерміноване руйнування, повільне зростання тріщини.

Постановка задачі. Мотивацією для поточної роботи є розробка ефективного алгоритму моделювання інкубації та квазістатичного поширення тріщини вздовж наперед відомого шляху в елементі конструкції зі спадковими механічними властивостями. В роботі побудовано алгоритм моделювання відтермінованого руйнування та поширення тріщини для плоского елемента конструкції з в'язкопружного ортотропного матеріалу за допомогою (i) надійного числового інструменту для прогнозування напружено-деформованого стану тіла з матеріалу зі спадковими характеристиками та (ii) обґрунтованих моделей квазістатичного поширення тріщини.

Цит у в а н н я: Селіванов М.Ф., Фернаті П.В. Моделювання квазістатичного поширення тріщини у в'язкопружному ортотропному середовищі в рамках підходу інкременталізації конститутивних рівнянь. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 2. С. 65–75. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.065>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Запропонований в [1] підхід дав поштовх до початку досліджень квазістатичного поширення тріщин у в'язкопружному ортотропному середовищі. Цей підхід було побудовано у припущенні незначного розміру частково зруйнованої області біля фронту тріщини (зони передруйнування). В основі підходу покладено конститутивні співвідношення у формі Больцмана–Вольтерра та модель Баренблата–Дагдейла [2, 3], що передувала появі моделі зони зчеплення [4], згідно з якою сили зчеплення пов'язані з розкриттям вдовж зони законом зчеплення–відриву (ЗЗВ). Закон зростання тріщини було отримано як розв'язок інтегрального рівняння, що містить функції повзучості, які описують зміну з часом розкриття тріщини. Ці функції можна отримати в рамках принципу пружно-в'язкопружної аналогії з відповідного пружного розв'язку задачі. Звісно, такий підхід можливо реалізувати лише для аналітичних розв'язків механіки тріщин. Для застосування числових підходів при дослідженні змінних з часом деформівних властивостей матеріалу поряд з принципом пружно-в'язкопружної аналогії широко використовується метод інкременталізації конститутивних співвідношень. Огляд підходів скінченно-елементного моделювання ізотропних і трансверсально-ізотропних в'язкопружних матеріалів наведено в [5]. Для реалізації коду скінченних елементів для визначення напружено-деформованого стану елемента конструкції з лінійно в'язкопружного матеріалу було запропоновано підхід внутрішньої змінної, який вимагає лише маніпулювання величинами, які оцінюються в точках інтегрування. Підхід внутрішньої змінної для класу задач, що розглядаються, вперше було використано в [6] для ортотропних в'язкопружних матеріалів. Складові конститутивного рівняння в інтегральній формі було перетворено в інкрементну форму. Це дало змогу впровадити процедуру розв'язання задач лінійної в'язкопружності у формулюванні методу скінченних елементів. Авторами даної роботи цей підхід було використано для дослідження концентрації напружень біля отвору у в'язкопружній пластині в умовах плоского напруженого стану [7] і просторовій задачі [8]. Далі цей підхід буде поширено на моделювання зростання тріщини нормального відриву внаслідок спадкових властивостей ортотропного тіла.

Зростання тріщини за наявності в'язкопружних властивостей матеріалу вперше описано в [9] в рамках моделі Баренблата–Дагдейла, виходячи з рівняння енергетичного балансу:

$$\int_{\lambda}^{\beta} \sigma(x_1, t) \frac{\partial \Delta(x_1, t)}{\partial t} dx_1 = \phi \frac{d\lambda(t)}{dt}, \quad (1)$$

де t – час; $\sigma(x_1, t)$ – сили зчеплення вздовж зони їх прикладання; ϕ – енергія руйнування; $\Delta(x_1, t)$ – в'язкопружне розкриття в зоні зчеплення. Залежно від моделі тріщини, зчеплення σ може бути як функцією координати, так і функцією розкриття $\Delta(x_1, t)$. Положення вершини зони зчеплення β у кожний момент часу має визначатись умовою скінченності напружень у точці $x_1 = \beta$. Таким чином, задачу було зведено до аналізу локального балансу енергії в зоні передруйнування.

Якщо в (1) перейти до рухомої системи координат ($\xi = x_1 - \lambda$), за умови незалежності розкриття від часу в рухомій системі координат, отримаємо

$$\int_0^{\Lambda_{\max}} \sigma(x_1, t) \frac{\partial \Delta(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = \phi, \quad (2)$$

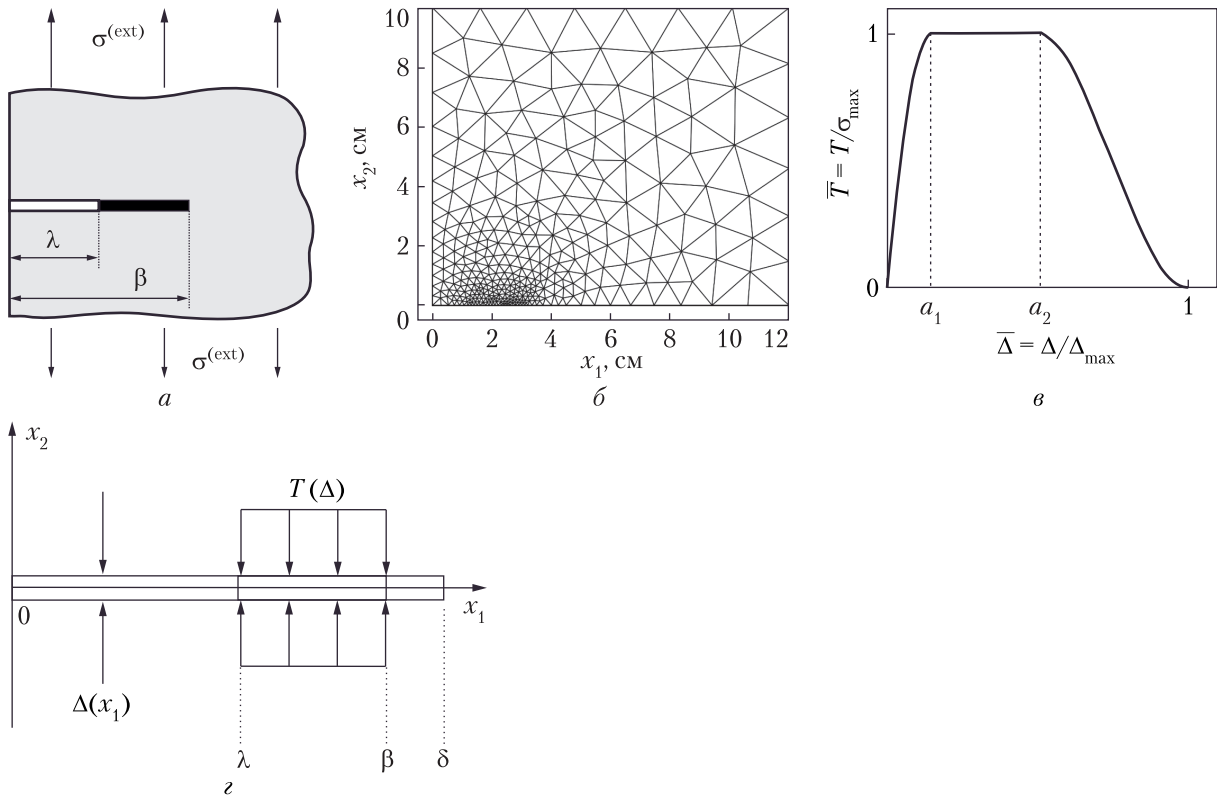


Рис. 1

де величина Δ_{\max} є розкриттям у вершині, що відповідає стану граничної рівноваги. Критерій руйнування (2), запропонований в [10], часто називається критерієм критичної роботи зчеплення.

Критерій енергетичного балансу (1) збігається з критерієм критичного розкриття у випадку рівномірного розподілу зчеплення $\sigma(x_1, t) = \sigma_{\max}$

$$\Delta(\lambda(t), t) = \Delta_{\max}, \quad (3)$$

де у випадку рівномірного розподілу зчеплення $\Delta_{\max} = \phi / \sigma_{\max}$.

У даній роботі деформаційний критерій (3) буде застосовано в рамках залежності зчеплення від розкриття згідно з законом, близьким до рівномірного.

Розрахунки проведемо для крайової тріщини (рис. 1, а) у пластині скінченних розмірів, геометрія верхньої половини якої разом з використаною сіткою методу скінченних елементів наведена на рис. 1, б. Тріщину розташовано вздовж осі x_1 на відрізку $(0, \lambda)$. З огляду на симетрію розглядатимемо верхню частину пластини. Розтягувальне навантаження $\sigma^{(\text{ext})}$ рівномірно розподілено вздовж верхньої та нижньої границі. Об'ємні сили відсутні. Матеріал поза зоною руйнування вважаємо лінійно в'язкопружним ортотропним із залежними від часу модулями E_{11} , E_{22} , G_{12} і незалежним від часу ν_{12} . Тіло знаходиться в однорідному температурному полі, переміщення є малими.

Система рівнянь для визначення напружено-деформованого стану тіла:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \sigma_{22} &= \sigma^{(\text{ext})}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \sigma_{ij} &= \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ і $C_{ijkl}(t)$ — компоненти тензорів напружень, деформацій та функцій релаксації; $u_i(\mathbf{x}, t)$ — компоненти векторів переміщень; Ω — об'єм тіла; $\partial\Omega$ — частина поверхні, де задані зовнішні навантаження. На відрізку когезії $0 < x_1 < \delta$, $x_2 = 0$ граничні умови мають такий вигляд:

$$\sigma_{22} = -T(2u_2), \quad (5)$$

де T — заданий ЗЗВ, параметр δ обирається таким чином, щоб зона зчеплення, розмір якої заздалегідь невідомий, належала відрізку когезії. Далі наведемо роз'яснення до такого підходу до розв'язання задачі. Для дослідження відшарування та поширення тріщин у суцільному тілі використовуються внутрішні (когезійна взаємодія для простого режиму руйнування відсутня за нульового розкриття) і зовнішні (жорсткі) моделі. Остання з вказаних моделей є фізично коректною — за її допомогою можна забезпечити умову скінченності напружень у тілі. Побудована в рамках лінійної теорії пружності ця модель характеризується максимально можливою когезійною взаємодією за нульового розкриття (треба покласти $a_1 = 0$ для відповідного ЗЗВ, проілюстрованого на рис. 1, v для внутрішнього закону). Використання зовнішньої моделі вимагає знаходження довжини зчеплення з умови скінченності напружень, що ускладнює розв'язання задачі [11]. Якщо довжину зчеплення взяти більшою за необхідну — розв'язок задачі розбігається, якщо меншою — розв'язок не буде фізично коректним [12] (наслідок неліквідованої сингулярності напружень). Уникнути явного знаходження довжини зчеплення за побудови розв'язку МСЕ можна наближенням закону зовнішнього типу законом внутрішнього типу з достатньо малою ділянкою зміцнення (такий підхід використано в даній роботі). При цьому довжину когезійного відрізка δ треба брати достатньо великою, на що наголошувалось вище.

Розв'язання задачі. Інтегральний зв'язок між компонентами тензора напружень і деформацій для лінійного в'язкопружного матеріалу, що не старіє (4), в умовах плоского напруженого стану запишемо в матричній формі

$$\sigma_i = \int_{-\infty}^t C_{ik}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \tau} d\tau, \quad (6)$$

де $\sigma_i = \sigma_i(\mathbf{x}, t)$ та $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\mathbf{x}, t)$ — компоненти векторів

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T,$$

ненульові компоненти симетричної матриці \mathbf{C} можна отримати, використовуючи принцип пружно-в'язкопружної аналогії, з виразів для відповідних пружних величин

$$C_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{33} = G_{12}$$

$$(\nu_{12}E_{22} = \nu_{21}E_{11}).$$

Для імплементації в'язкопружної моделі в розрахункову схему МСЕ запишемо напруження в поточний момент часу

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n-1)} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)}, \quad (7)$$

де $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_n)$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t_n)$ ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ – внутрішня змінна задачі), $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t_n)$,

$$\tilde{\sigma}_i^{(n)} = - \int_{-\infty}^{t_{n-1}} [C_{ik}(t_n - \tau) - C_{ik}(t_{n-1} - \tau)] \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \tau} d\tau,$$

$$\hat{\sigma}_i^{(n)} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} C_{ik}(t_n - \tau) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \tau} d\tau.$$

Будемо визначати вектор інкременту переміщень $\Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{q}^{(n)}$ та деформацій $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{q}^{(n)}$ в елементі з дискретизованої системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується для невідомих приростів вузлових переміщень, $\Delta \mathbf{q}^{(n)}$:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{F}^t - \mathbf{F}^{(n-1)} + \tilde{\mathbf{F}}^{(n)},$$

де

$$\mathbf{K}^{(n)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{E}}^{(n)} \mathbf{B} dV,$$

$$\mathbf{F}^t = \int_{\partial \Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS, \quad \mathbf{F}^{(n)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{(n)} dV, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(n)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} dV,$$

\mathbf{B} – стандартна матриця деформації–переміщення, яка пов'язує деформації з вектором вузлового переміщення; \mathbf{T} – вектор поверхневих сил; \mathbf{N} – вектор функцій форм; $\mathbf{K}^{(n)}$ – інкрементна матриця жорсткості; Ω^e – об'єм елемента; $\partial \Omega^e$ – його границя.

Якщо функції релаксації матеріалу визначено у формі ряду Проні–Діріхле (далі вказуватимемо індекси, за якими йде підсумовування; за іншими індексами, що повторюються, підсумовування немає)

$$C_{ik}(t) = E_{ik}^\infty + \sum_m E_{ik}^{(m)} \exp\{-t / \rho_{ik}^{(m)}\}, \quad (8)$$

то внутрішню змінну можна визначати рекурсивно:

$$\tilde{\sigma}_i^{(n)} = \sum_m \sum_k (1 - \zeta_{ik}^{(m,n)}) S_{ik}^{(m,n)}, \quad n = 1, \dots,$$

$$S_{ik}^{(m,0)} = E_{ik}^{(m)} \epsilon_k^{(0)},$$

$$S_{ik}^{(m,n)} = \zeta_{ik}^{(m,n)} S_{ik}^{(m,n)} + \eta_{ik}^{(m,n)} (1 - \zeta_{ik}^{(m,n)}) \Delta \epsilon_k^{(n)}, \quad n = 1, \dots,$$

елементи матриці $\tilde{\mathbf{E}}^{(n)}$,

$$\tilde{E}_{ik}^{(n)} = E_{ik}^{\infty} + \sum_m \eta_{ik}^{(m,n)} (1 - \zeta_{ik}^{(m,n)}),$$

$$\zeta_{ik}^{(m,n)} = \exp\{-\Delta t_n / \rho_{ik}^{(m)}\}, \quad \eta_{ik}^{(m,n)} = \frac{E_{ik}^{(m)} \rho_{ik}^{(m)}}{\Delta t_n}.$$

Величини $S_{ik}^{(m,n)}$ рекурентно визначаються в точках інтегрування на кожному часовому інтервалі. Матриця $\mathbf{K}^{(n)}$ не потребує переобчислення для кожного n за рівномірного розбиття інтервалу часу, на якому проводиться дослідження.

Далі проведемо синтез схем дослідження довготривалого деформування і поширення тріщини. Для дослідження напружено-деформованого стану використані конститутивні співвідношення в інтегральній формі Больцмана—Вольтерра (6). Інтеграли в конститутивних рівняннях перетворено до інкрементної форми на часовій сітці згідно з (7). На кожному часовому інтервалі задача розв'язується відносно приростів переміщень. Функції релаксації модулів в'язкопружного ортотропного матеріалу описано в експоненціальній формі. Для цих модулів за допомогою принципу пружно-вязкопружної аналогії побудовано аналітичні вирази для конститутивної матриці МСЕ; аналітичні вирази для параметрів конститутивних співвідношень (8) наведено в [7]. Для ітерації $\Delta t_{n(l)}$ приросту часу Δt_n , який визначається на кожному кроці алгоритму, задовольняються граничні умови на відрізьку когезії (5). Тобто для $n > 0$ розв'язується внутрішня і зовнішня нелінійні задачі — відносно невідомих сил когезії і приросту часу Δt відповідно.

На першому кроці ($n = 0$) розв'язується задача 1 для миттєвих в'язкопружних модулів (пружна задача), (рис. 2).

Задача 1. Для заданого рівня зовнішнього навантаження $\sigma^{(\text{ext})}$ знайти поле переміщень \mathbf{u} , що задовольняє ЗЗВ $\sigma^{(\text{coh})} = T(2\mathbf{u}^{(\text{coh})})$, де $\sigma^{(\text{coh})}$ та $\mathbf{u}^{(\text{coh})}$ — сила когезії та вертикальне переміщення вздовж лінії когезії, T є заданим ЗЗВ.

Якщо відносне розкриття у вершині тріщини $\bar{\Delta}_0$ не перевищує одиниці, починається дослідження так званого відтермінованого руйнування, яке притаманне тілам зі спадковими властивостями. Інкубаційний період розвитку тріщини характеризується збільшенням розкриття в її вершині без зміни довжини λ . Таким чином, у разі прикладання докритичного (для відповідної пружної задачі) рівня навантаження зростання тріщини деякий час не відбувається. За обмеженої повзучості можна обчислити такий рівень навантаження, за якого розвиток тріщини не відбуватиметься взагалі. Розділимо інтервал $(\bar{\Delta}_0, 1)$ і будемо

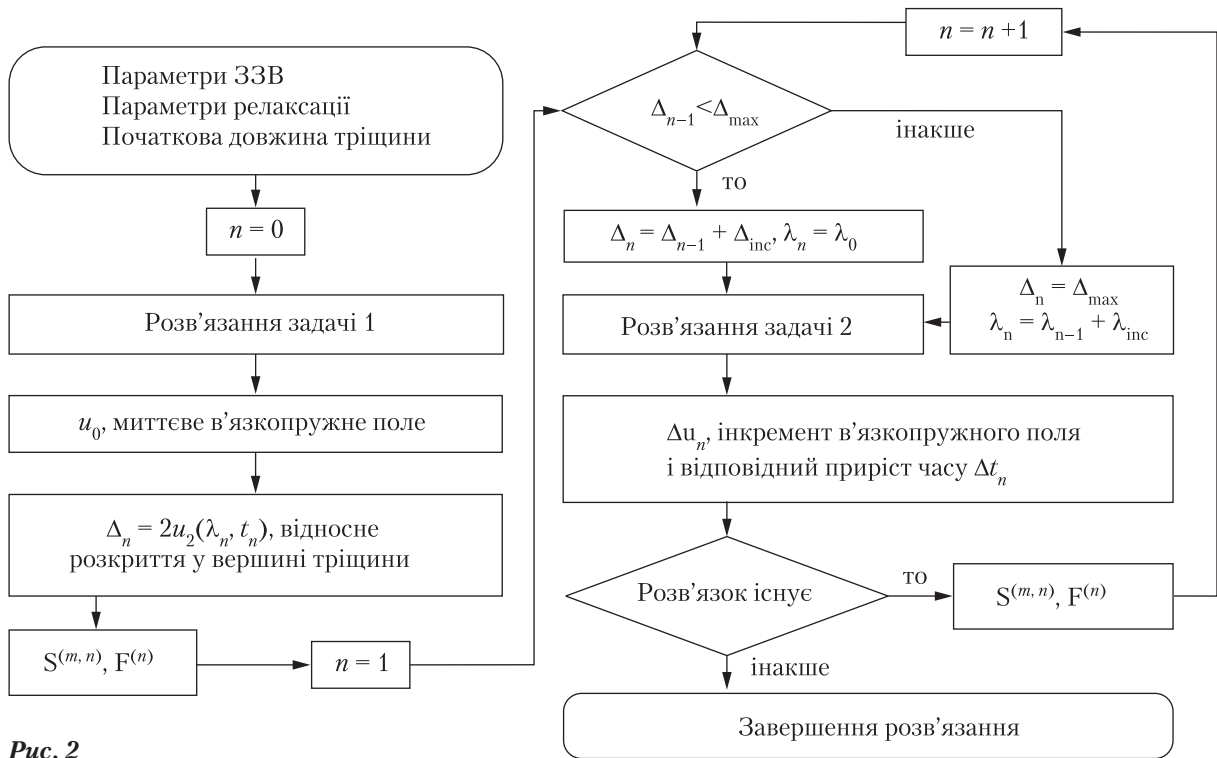


Рис. 2

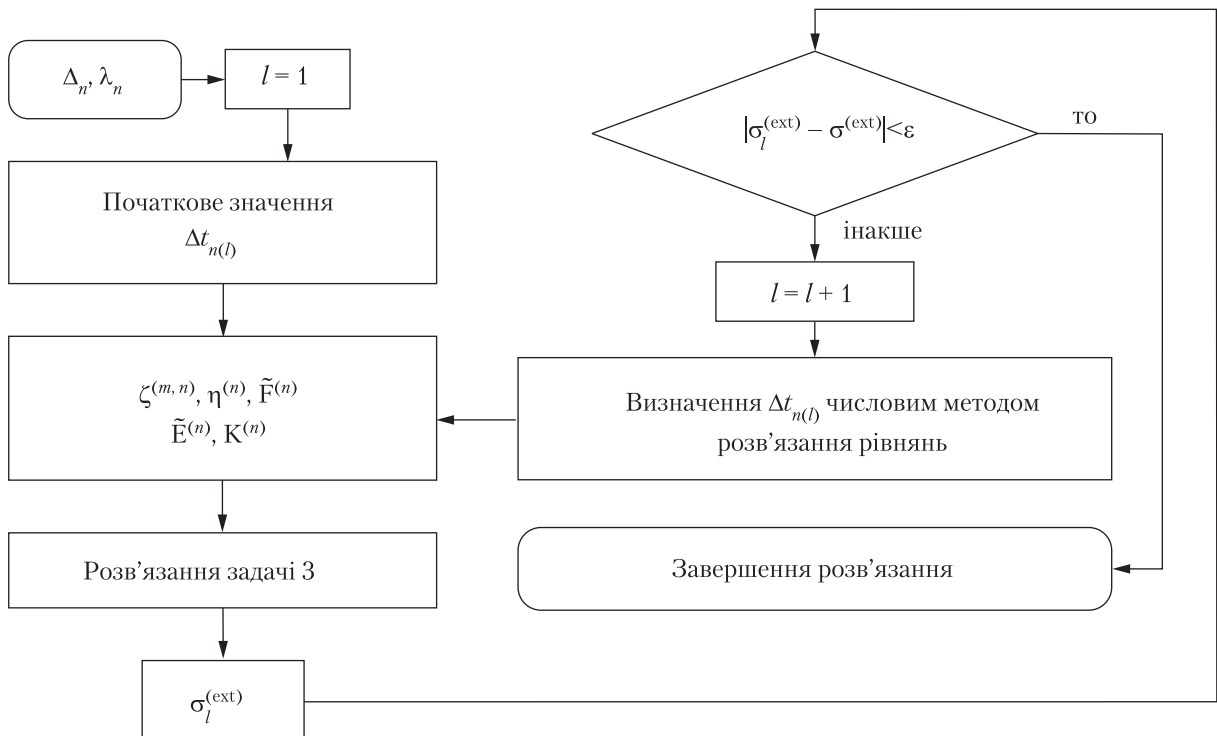


Рис. 3

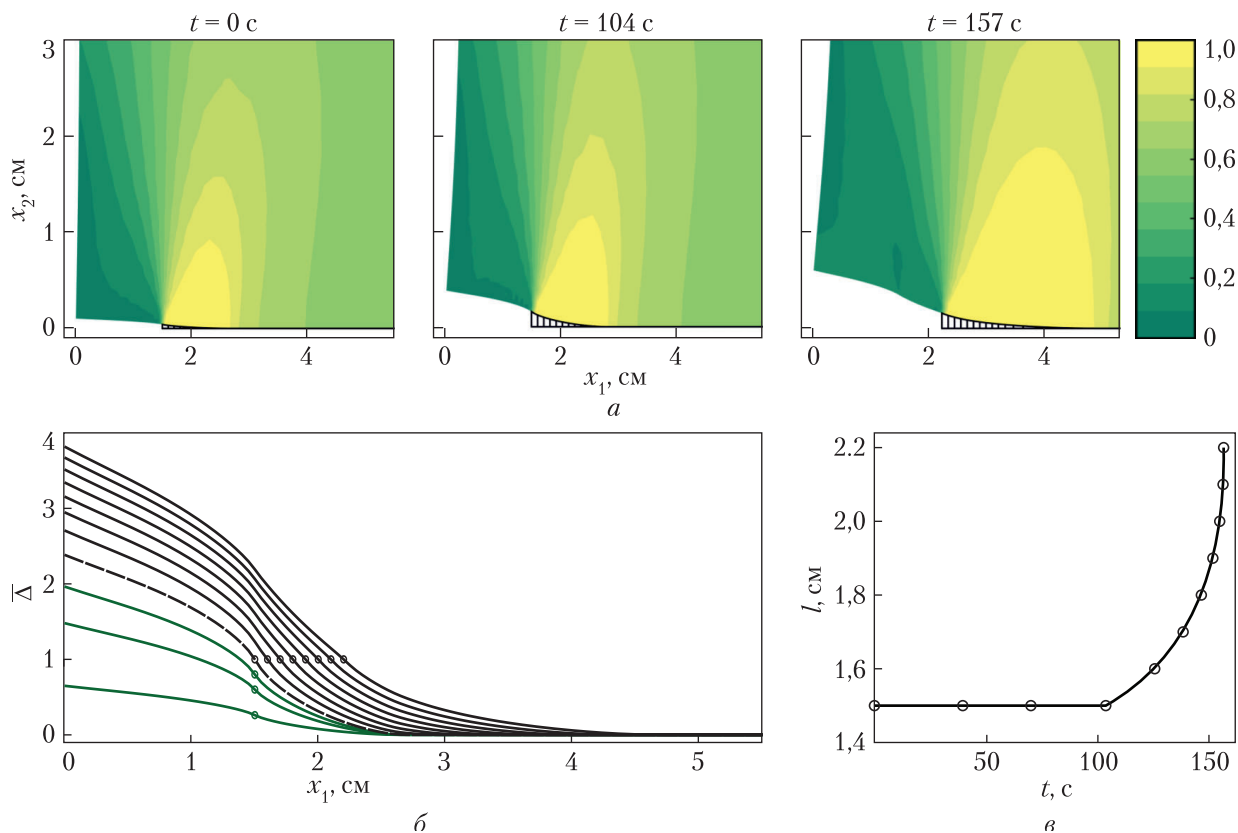


Рис. 4

послідовно визначати прирости часу, що відповідають кожному інкременту розкриття Δ_{inc} . Час, який відповідає останньому приросту, визначатиме час відтермінованого руйнування (або тривалість інкубаційного періоду зростання тріщини). Далі починається дослідження зростання тріщини. Для кожного інкременту довжини тріщини λ_{inc} визначатиме відповідний приріст часу. На рис. 3 проілюстровано схему розв'язання задачі 2 (для $n \geq 1$), у рамках якої виокремлена допоміжна задача 3.

Задача 3. Для заданого розкриття у вершині тріщини $2u_2(\lambda, 0)$ знайти поле переміщень \mathbf{u} , що задовольняє ЗЗВ: $\sigma^{(\text{coh})} = T(2\mathbf{u}^{(\text{coh})})$, і відповідний рівень зовнішнього навантаження $\sigma^{(\text{ext})}$.

Числовий розв'язок. Числові розв'язки отримаємо для таких значень параметрів довготривалого деформування: $E_{22}^0 = E_{22}^\infty + E_{22}^1 = 24$ ГПа, $E_{22}^\infty = 6$ ГПа, $E_{11}^0 = E_{11}^\infty + E_{11}^1 = 8$ ГПа, $E_{11}^\infty = 1$ ГПа, $G_{12}^0 = G_{12}^\infty + G_{12}^1 = 3$ ГПа, $G_{12}^\infty = 0,4$ ГПа, $\nu_{21} = 0,3$, $\rho = 20$ с.

Визначення сил когезії проведемо для згладженого трапецеїдального ЗЗВ (ефективний закон проілюстровано на рис. 1, в)

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = \begin{cases} a_1^{-1}\bar{\Delta}(2 - a_1^{-1}\bar{\Delta}), & \bar{\Delta} \in [0, a_1), \\ 1, & \bar{\Delta} \in [a_1, a_2], \\ (1 - \bar{\Delta})^2(1 + 2\bar{\Delta} - 3a_2)(1 - a_2)^{-3}, & \bar{\Delta} \in (a_2, 1]. \end{cases} \quad (9)$$

Після введення сталої $\omega = \int_0^1 \bar{T}(\bar{\Delta}) d\bar{\Delta} = \frac{1}{6}(3 - 2a_1 + 3a_2)$ можна визначити внутрішній параметр моделі $\Delta_{\max} = \phi / (\omega \sigma_{\max})$, яку було вибрано критеріальною величиною. Стала $\omega \in (0, 1)$ є однією з мір відхилення ЗЗВ від рівномірного, який відповідає моделі Дагдейла [2]. Оберемо такі параметри закону: $\phi = 150$ Н/м, $\sigma_{\max} = 5$ МПа, $a_1 = 0,002$, $a_2 = 0,9$.

Початкова довжина тріщини $\lambda_0 = 1,5$ см, інтенсивність зовнішнього навантаження $\sigma^{(\text{ext})} = 0,5\sigma_{\max}$.

На рис. 4, а проілюстровано поле напруження σ_{22} в околі зони зчеплення, яка зображена в деформованому стані областю з вертикальним пунктиром, кожна риска якого відповідає вузлу сітки. Використана сітка наведена на рис. 1, б; вона визначена 1277 вузлами з 604 шеститочковими трикутними елементами. Три наведені поля відповідають початковому моменту часу, часу відтермінованого руйнування та закінченню квазістатичного розвитку тріщини. На рис. 4, б проілюстровано відриви для моментів часу, які визначені поточними значеннями розкриття у вершині тріщини Δ_n та її довжини λ_n . Як інкремент довжини використано довжину між сусідніми вузлами сітки. Пунктирна крива відповідає початку поширення тріщини. Точки на кривих описують поточне розкриття у вершині тріщини — воно менше за критичне під час інкубації і дорівнює йому під час поширення. На рис. 4, в зображено залежність від часу довжини тріщини.

Таким чином, нами розроблено та проілюстровано алгоритм для прогнозування розкриття тріщини, що зростає вздовж площин геометричної симетрії в'язкопружного ортотропного середовища. В основу алгоритму покладено (i) метод інкременталізації конститутивних рівнянь, що використовується для прогнозування довготривалого деформування в'язкопружних анізотропних середовищ, (ii) модель тріщини із зоною зчеплення, в основі якої лежить нерівномірний закон зчеплення—відриву, та (iii) деформаційний критерій розвитку тріщини. Обґрунтовано використання вибраних методів і критеріїв та їх синтез в рамках алгоритму. В процесі поширення тріщини виокремлено три етапи: 1 — миттєвий (за незначного рівня зовнішнього навантаження тріщина розкривається внаслідок пружних властивостей матеріалу); 2 — інкубація тріщини (за рахунок в'язкопружних властивостей матеріалу відбувається зростання розкриття тріщини до критичного рівня); 3 — квазістатичний розвиток тріщини, під час якого тріщина послідовно розриває суцільний матеріал, формуючи нову зону передруйнування на лінії свого розвитку. Числові приклади ілюструють перерозподіл з часом напружень в околі зони зчеплення, зміну з часом розкриття та довжини тріщини.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Brockway G.S., Schapery R.A. Some viscoelastic crack growth relations for orthotropic and prestained media. *Eng Fract Mech.* 1978. **10**. С. 453—468. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(78\)90057-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(78)90057-7)
2. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids.* 1960. **8**. С. 100—104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
3. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* 1962. **7**. С. 55—129. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)
4. Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.* 1976. № 6. С. 773—781. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7)
5. Zobeiry N., Malek S., Vaziri R., Poursartip A. A differential approach to finite element modelling of isotropic and transversely isotropic viscoelastic materials. *J. Mech. Mater.* 2016. **97**. P. 76—91. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.02.013>

6. Zocher M.A., Groves S.E., Allen D.H. A three dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1997. **40**. № 12. P. 2267–2288.
[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970630\)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970630)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P)
7. Селіванов М.Ф., Кульбачний Є.Р., Онищенко Д.Р. Дослідження зміни концентрації напружень з часом у в'язкопружному ортотропному тілі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 10. С. 28–34.
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.028>
8. Селіванов М.Ф., Фернати П.В. Дослідження зміни концентрації напружень у просторовій пластині з в'язкопружного трансверсально ізотропного матеріалу. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 1. С. 33–39.
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.033>
9. Knauss W.G. Delayed failure – the Griffith problem for linearly viscoelastic materials. *Int. J. Fract. Mech.* 1970. **6**. С. 7–20. <https://doi.org/10.1007/BF00183655>
10. Schapery R.A. A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media. I. Theoretical development. *Int. J. Fract.* 1975. **11**. С. 141–159. <https://doi.org/10.1007/BF00034721>
11. Selivanov M. Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.* 2019. **72**. С. 104–128. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013>
12. Селіванов М.Ф., Процан В.В. Вплив неврахування умови плавності змикання берегів тріщини при визначенні критичного навантаження. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3. С. 28–35.
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.028>

Надійшло до редакції 07.12.2022

REFERENCES

1. Brockway, G. S. & Schapery, R. A. (1978). Some viscoelastic crack growth relations for orthotropic and prestrained media. *Eng. Fract. Mech.*, 10, pp. 453-468. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(78\)90057-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(78)90057-7)
2. Dugdale, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids.*, 8, pp. 100-104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
3. Barenblatt, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7, pp. 55-129. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)
4. Hillerborg, A., Modeer, M. & Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.*, 6, pp. 773-781. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7)
5. Zobeiry, N., Malek, S., Vaziri, R. & Poursartip, A. (2016). A differential approach to finite element modelling of isotropic and transversely isotropic viscoelastic materials. *J. Mech. Mater.*, 97, pp. 76-91. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.02.013>
6. Zocher, M. A., Groves, S. E. & Allen, D. H. (1997). A three dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 40, No. 12, pp. 2267-2288. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970630\)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970630)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P)
7. Selivanov, M., Kulbачnyy, Y. & Onishchenko, D. (2020). Determining the change of stress concentration with time in a viscoelastic orthotropic solid. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No 10, pp. 28-34 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.028>
8. Selivanov, M. & Fernati, P. (2023). Determining the change of stress concentration with time in a 3-D viscoelastic transverse isotropic plate. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 1, pp. 33-39 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.033>
9. Knauss, W. G. (1970). Delayed failure – the Griffith problem for linearly viscoelastic materials. *Int. J. Fract. Mech.*, 6, pp. 7-20. <https://doi.org/10.1007/BF00183655>
10. Schapery, R. A. (1975). A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media. I. Theoretical development. *Int. J. Fract.*, 11, pp. 141-159. <https://doi.org/10.1007/BF00034721>
11. Selivanov, M. (2019). Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.*, 72, pp. 104-128. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013>
12. Selivanov, M. & Protsan, V. (2020). The impact of neglecting the smooth crack closure condition when determining the critical load. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 28-35 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.028>

Received 07.12.2022

M.F. Selivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

P.V. Fernati, <https://orcid.org/0000-0002-5521-2225>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: mfs@ukr.net, pavel147223@gmail.com

MODELLING THE QUASI-STATIC CRACK PROPAGATION
IN A VISCOELASTIC ORTHOTROPIC MEDIUM USING THE INCREMENTALIZATION
OF CONSTITUTIVE EQUATIONS

The algorithm for modelling the process of creep crack in a viscoelastic media is discussed in this paper. The algorithm combines the viscoelastic incremental formulation and procedure of quasistatic fracture modelling; it is implemented by the finite element method and illustrated by the numerical example of determining a change with time of a stressed state in the vicinity of the failure zone. The cohesive zone model with nonuniform traction–separation law is used as a crack model that accounts for the failure zone at a crack tip. The deformational criterion is chosen to define a crack critical state. The growth of an edge crack in a viscoelastic orthotropic plate with relaxation moduli defined by a single exponential function is illustrated in the numerical example. The close-to-uniform traction–separation law of smoothed trapezoidal form is used within the cohesive zone model approach and satisfied for each discrete moment which is found by the proposed algorithm given the current crack geometry.

Keywords: *viscoelastic orthotropic solid, incremental viscoelastic formulation, finite element method, delayed fracture, quasistatic crack growth.*