ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.03.023
УДК 539.3

С.Ю. Бабич[1], https://orcid.org/0000-0003-2642-9115
Н.О. Ярецька[2], https://orcid.org/0000-0002-3726-2878

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
[2] Хмельницький національний університет, Хмельницький
E-mail: prikl@inmech.kiev.ua, yaretskano@khmnu.edu.ua

Контактна задача для пружних попередньо напружених циліндрів кругового поперечного перерізу (суцільного та кільцевого) та півпросторів з початковими напруженнями

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

Стаття присвячена контактним задачам для штампів циліндричної та кільцевої форми з попередньо напруженими тілами без врахування сил тертя. До цих задач належать задача про тиск пружного кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями та задача про тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями. Дослідження питань контактної взаємодії твердих тіл, до яких відноситься тематика даної роботи, представлена досить актуальною проблемою, оскільки одним із найбільш поширених на практиці способів передачі зовнішніх навантажень є контактна взаємодія. Дослідження виконано у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Для дослідження задач використовується велика кількість фундаментальних результатів: перетворення Ханкеля, парні інтегральні рівняння, ортогональні поліноми та інші методи теорії контактних задач лінеаризованої теорії пружності.

Ключові слова: *лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, кільцевий штамп, циліндричний штамп, півпростір.*

До проблем, які відносяться до контактних задач для пружних і пластичних тіл без врахування початкових напружень, на даний час одержані результати з широкого кола питань. Всі вони відображені у чисельних виданнях монографічного та навчального характеру, а також у багатьох періодичних виданнях.

Цитування: Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна задача для пружних попередньо напружених циліндрів кругового поперечного перерізу (суцільного та кільцевого) та півпросторів з початковими напруженнями. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 3. С. 23—30. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.03.023

Оскільки практично в усіх елементах сучасних конструкцій і деталях машин присутні початкові напруження, то актуальність досліджень контактної взаємодії з врахування початкових напружень очевидна. Як відомо з [1—5], початкові напруження істотно впливають на основні характеристики контактної взаємодії, особливо для нестисливих тіл.

Основні результати з теорії контактних задач з урахуванням початкових напружень отримані в роботах [1, 2]. А число публікацій з контактної взаємодії попередньо напружених тіл неперервно зростає, що свідчить про актуальність таких досліджень.

В даній статті розглядається задача для пружних попередньо напружених циліндрів кругового поперечного перерізу (суцільного та кільцевого) та півпросторів з початковими напруженнями без врахування сил тертя.

Оскільки в лінійній механіці матеріалів не можна врахувати початкові напруження, то для їх врахування застосовують загальну нелінійну теорію пружності. Але в цьому випадку практично неможливо одержати розв’язок у доступному вигляді. Тому при досить значних початкових напруженнях краще скористатись лінеаризованим варіантом [1, 2]. Тому у [3, 4], як і у даній статті, дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих та нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Нехай пружні тверді тіла контактно взаємодіють із пружним циліндричним або кільцевим штампом. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні.

Для дослідження застосовуємо координати деформівного стану Oy_i $(i=\overline{1,3})$, які пов’язані з лагранжевими координатами x_i $(i=\overline{1,3})$ співвідношеннями: $y_i=\lambda_i x_i$, $(i=\overline{1,3})$, де λ_i $(i=\overline{1,3})$ — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, $\lambda_i=\text{const}$. Вісь y_3 спрямована по нормалі до межі контакту.

У дослідженні розглядаємо пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу [1]. У випадку ортотропних тіл вважаємо, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямком осей координат у деформованому стані y_i $(i=\overline{1,3})$.

Нехай початковий деформований стан є однорідним, а межа контакту пружних тіл розміщується у площині $y_3=\text{const}$. Будемо вважати, що початкові напруження діють вздовж межі контакту.

Будемо вважати, що початкові стани тіл, що взаємодіють — однорідні, й для них виконуються співвідношення [1—3]

$$y_m=x_m+U_m^0,\qquad U_m^0=\delta_{mi}(\lambda_m-1)\lambda_i^{-1}y_i\qquad (i,m=\overline{1,3}),$$

де δ_{mi} — символ Кронекера.

Тоді основне рівняння у переміщеннях [1, 2] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha}U_\alpha=0,\ \ L'_{m\alpha}=\omega'_{ij\alpha\beta}\,\partial^2\big/\partial y_i\partial y_\beta\ \ (i,m,\alpha,\beta=\overline{1,3}),\tag{1}$$

а для нестисливих тіл виконується умова нестисливості

$$L'_{m\alpha}U_\alpha+q'_{\alpha m}\,\partial p'\big/\partial y_\alpha=0,\qquad L'_{m\alpha}=\kappa'_{im\alpha\beta}\,\partial^2\big/\partial y_i\partial y_\beta,\tag{2}$$

$$q'_{ij}\,\partial U_j\big/\partial y_i=0,\ \ q'_{ij}=\lambda_i q_{ij}\qquad (i,\ j,\ m,\ \alpha,\ \beta=\overline{1,3}).$$

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при $y_i = \text{const}$ (i=1, 2, 3) матимуть вигляд

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta}\dfrac{\partial U_\alpha}{\partial \acute{o}_\beta} \text{— для стисливих тіл,} & \omega'_{ij\alpha\beta} = \dfrac{\lambda_i\lambda_\beta}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\omega_{ij\alpha\beta}, \\ \kappa'_{ij\alpha\beta}\dfrac{\partial U_\alpha}{\partial \acute{o}_\beta} + q'_{ij}p \text{— для нестисливих тіл,} & {}'_{ij\alpha\beta} = \dfrac{\lambda_i\lambda_\beta}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\kappa_{ij\alpha\beta}, \end{cases}$$

де $\omega'_{im\alpha\beta} = \omega'_{im\alpha\beta}(S^0_{11}, S^0_{22}, S^0_{33})$, $\kappa'_{im\alpha\beta} = \kappa'_{im\alpha\beta}(S^0_{11}, S^0_{22}, S^0_{33})$ — складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

При однорідних початкових напруженнях має місце умова:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0;\ \ S_0^{33} = 0;\ \ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3\,. \tag{3}$$

Враховуючи (3), розв'язок рівнянь (1), (2) представимо через функцію $\tilde{\chi}$, яка у циліндричних координатах (r, θ, y_3) задовольняє характеристичне рівняння

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2\,\partial^2/\partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2\,\partial^2/\partial y_3^2)\tilde{\chi} = 0\,, \tag{4}$$

де $\Delta_1 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\,\partial/\partial r$.

Враховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл, можливі два варіанти представлення загального розв'язку (4): випадок рівних коренів $(\xi_2'^2 = \xi_3'^2)$:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + y_3\tilde{\chi}_2,\ (\Delta_1 + \xi_2'^2\,\partial^2/\partial y_3^2)\tilde{\chi}_1 = 0, \qquad (\Delta_1 + \xi_2'^2\,\partial^2/\partial y_3^2)\tilde{\chi}_2 = 0\,; \tag{5}$$

випадок нерівних коренів $(\xi_2'^2 = \xi_3'^2)$:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2,\ (\Delta_1 + \xi_2'^2\,\partial^2/\partial y_3^2)\tilde{\chi}_1 = 0, \qquad (\Delta_1 + \xi_3'^2\,\partial^2/\partial y_3^2)\tilde{\chi}_2 = 0\,. \tag{6}$$

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i), де $z_i = \nu_i^{-1}y_3$, $\nu_i = \sqrt{n_i}$ $(i = \overline{1, 2})$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$, за допомогою методів розділення змінних (метод Фур'є) виведено розв'язки для скінченних циліндричних (кільцевих) штампів з початковими напруженнями, які виражаються через нескінченну систему констант. А напружено-деформований стан у пружних тілах з початковими напруженнями для випадків (5) і (6) визначено через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля.

Отже, розглянемо подані задачі детальніше. Сформулюємо постановку задачі про стискання двох попередньо напружених півпросторів на пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями: Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою H з початковими напруженнями, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3), стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P. Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не завантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від межі контакту півпросторів з пружним штампом, переміщаються відносно координатної площини y_3=0 на величину ε; R — радіус циліндричного штампа, h = 0,5H.

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i), такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружного штампа в області контакту $z_i = \pm h / \nu_i \;\; (i = \overline{1,2})$:

$$u_3'^{(i)} - u_3'^{(3)} = \varepsilon, \quad Q_{33}'^{(3)} = Q_{33}'^{(i)}, \quad Q_{3r}'^{(3)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(i)} = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant R) \;\; (i = 1, 2); \tag{7}$$

2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h / \nu_i \;\; (i = \overline{1,2})$:

$$Q_{33}'^{(i)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(i)} = 0, \quad u_3'^{(i)} = 0, \quad (r > R) \;\; (i = 1, 2); \tag{8}$$

3) на боковій поверхні пружного штампа $r = R$:

$$Q_{rr}'^{(3)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(3)} = 0, \quad (|z_i| \leqslant h / \nu_i) \;\; (i = 1, 2). \tag{9}$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодійною навантаження *P*, має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r \, |Q_{33}'^{(i)}| \, dr, \qquad |Q_{33}'^{(i)}| = |Q_{3r}'^{(i)}|_{z_i = \pm H/\nu_i} \quad (i = 1, 2). \tag{10}$$

Умова (10) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампа із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричному пружному штампі з початковими напруженнями, наприклад, у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння (4) приймемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} &= 3C_0 r^2 (z_1 - z_2) - 2C_0 (z_1^3 + z_2^3) + \sum_{k=1}^{\infty} \{[A_k I_0(\gamma_k \nu_1 r) S_1(\gamma_k \nu_1 z_1) + \\ &+ B_k I_0(\gamma_k \nu_2 r) S_1(\gamma_k \nu_2 z_2)] + J_0(\alpha_k r)[S_2(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_2)]\}, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\gamma_k = \dfrac{\pi k}{h}$, $\alpha_k = \dfrac{\mu_k}{R}$ $(J_1(\alpha_k R) = 0)$, C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — деякі сталі коефіцієнти, які визначають із умов (7)—(10); $I_0(x)$, $J_0(x)$ — функції Бесселя; $S_1 = C_k \sin(\gamma_k \nu_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k \nu_1 z_1)$, $S_2 = E_k \mathrm{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \mathrm{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1)$.

Напружено-деформований стан у попередньо напружених півпросторах визначаємо згідно з лінеаризованими рівняннями [2]:

$$\begin{aligned} Q_{33}'^{(i)}(\rho; \zeta_i) &= \frac{C_{44}(1 + m_1) l_1}{R} \int_0^{\infty} F(\eta)(s e^{\eta \zeta_2} - s_3 e^{\eta \zeta_1}) J_0(\eta \rho) d\eta, \\ Q_{3r}'^{(i)}(\rho; \zeta_i) &= -\frac{C_{44}(1 + m_1)}{\nu_1 R} \int_0^{\infty} F(\eta)(e^{\eta \zeta_2} - e^{\eta \zeta_1}) J_1(\eta \rho) d\eta, \\ U_3'^{(i)}(\rho; \zeta_i) &= -\frac{m_1}{\nu_1} \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} (s_2 e^{\eta \zeta_2} - s_3 e^{\eta \zeta_1}) J_0(\eta \rho) d\eta, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\xi = \frac{z_i \nu_i}{R}$, $\zeta_i = \frac{\xi}{\nu_i} = \frac{z_i}{R}$, $\eta = \xi R$ $\quad (i = 1, 2)$, $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$, $s_1 = (m_1 - 1) m_1^{-1}$, $s_2 = (\nu_1 m_2)(\nu_2 m_1)^{-1}$, $s_3 = s_0 \nu_1 \nu_2^{-1}$, $F(\eta)$ — шукана функція.

З перших граничних умов (7)—(8) визначимо невідому функцію $F(\eta)$ з подвійних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta = q(\rho), \qquad 0 < \rho < 1; \qquad \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \qquad \rho > 1, \tag{13}$$

де $q(\rho) = \varepsilon \langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} + \sum_{k=1}^\infty \alpha_k J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_k^* sh\left(\frac{\mu_k h}{\nu_1 R}\right) + ch\left(\frac{\mu_k h}{\nu_1 R}\right) \right) + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* sh\left(\frac{\mu_k h}{R\nu_2}\right) + M_k^* ch\left(\frac{\mu_k h}{R\nu_2}\right) \right) \right] \chi_k \rangle$, $\omega_2 = \nu_1^3 m_1^{-1} (s_3 - s_2)^{-1}$.

Враховуючи [2], маємо

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi} \left((1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} \psi(\eta, 0) + \sum_{k=1}^\infty \frac{\mu_k}{R} F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_k^* \mathrm{sh}\left(\frac{\mu_k h}{\nu_1 R}\right) + \mathrm{ch}\left(\frac{\mu_k h}{\nu_1 R}\right) \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \mathrm{sh}\left(\frac{\mu_k h}{R\nu_2}\right) + M_k^* \mathrm{ch}\left(\frac{\mu_k h}{R\nu_2}\right) \right) \right] \chi_k \psi(\eta, \mu_k) \right). \tag{14}$$

Для визначення сталих коефіцієнтів N_k^*, E_k^*, M_k^* та функції $F(\eta)$ було введено змінні:

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta\rho) d\eta = -\frac{\varepsilon R (\nu_2 + \nu_1 s)}{2\nu_1 \nu_2 h (s - s_3) \theta_6} \chi_0, \qquad \chi_k = -\frac{R n_1}{\varepsilon \mu_n \omega_2} \tilde{B}_k.$$

$$\int_0^\infty \eta \psi(\eta, \mu_k) \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) J_0(\eta\rho) d\rho d\eta = \psi(\mu_n, \mu_k). \tag{15}$$

Для відшукання невідомих χ_0, χ_k (k=1, 2, …, n), що входять до (11)—(14), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{\alpha}_k \chi_k + \sum_{n=0}^\infty \tilde{\alpha}_{kn} \chi_n = \tilde{\beta}_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Квазірегулярність системи (16) підтверджується асимптотичними представленнями для функцій Бесселя, величин μ_k та обмеженості інтегралів $\psi(\mu_k, \mu_n)$ при $\lambda_1 > \lambda_{kp}$ [1—3].

Таким чином, дана задача зведена до визначення постійних χ_k (k = 0, 1, 2,...) через які виражаються характеристики напружено-деформованого стану пружного штампа та двох півпросторів з початковими напруженнями.

Використавши умову рівноваги (10), встановлюємо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження *P* у вигляді $P = \pi\varepsilon R^2 C_{44}(1+m_1) l_1 (\nu_2 + s\nu_1)(\nu_2\nu_1 h\theta_6)^{-1}$.

Визначивши невідомі сталі χ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16), можна обчислити компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному штампі. Розв'язки задачі також представлені у вигляді рядів через нескінченну систему постійних χ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Постановку задачі, граничні умови та часткові результати розв'язання задачі про тиск пружного кільцевого штампу з початковими напруженнями на попередньо напружений півпростір представлено у [5].

На відміну від розв'язку попередньої задачі, невідому функцію *F* (*η*) визначаємо з потрійних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r)\, d\eta = 0 \quad (R_2 < r < \infty); \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r)\, d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2);$$

$$\int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r)\, d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1), \tag{17}$$

де $f(r) = \frac{\omega_2}{R_2}\left(\varepsilon + t_1 \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 \left(\frac{Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}{J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})} J_0(\alpha_k R_2^{-1} r) - Y_0(\alpha_k R_2^{-1} r)\right) M_k\right)$, $t_1 = \frac{m_1 - m_2}{n_2(1+m_1)}$.

Інтегральні рівняння (17) зведемо до одного [5], тоді функцію *F* (*η*) будемо шукати у вигляді

$$F(\eta) = R_2 \sum_{n=0}^\infty W_{2n} J_{2n}(0{,}5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0{,}5\eta(R_2 + R_1)), \tag{18}$$

де W_{2n} — невідомі константи.

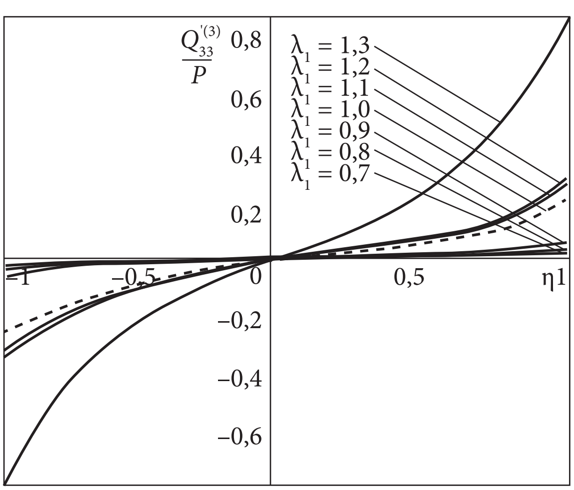

Рис. 1. Нормальні напруження $Q'^{(3)}_{33}/P$ вздовж циліндричного штампа

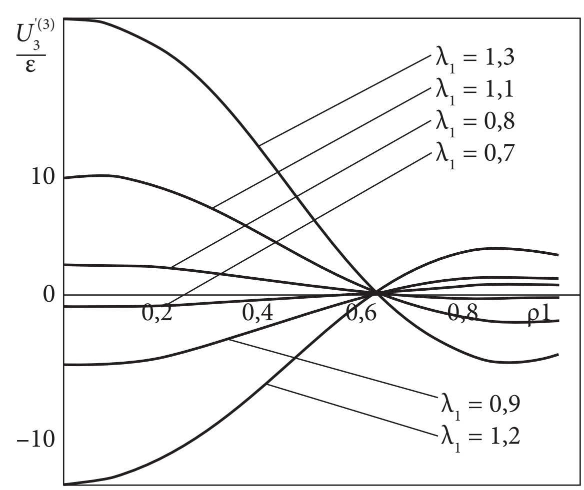

Рис. 2. Переміщення $U'^{(3)}_3/\varepsilon$ при z_i=0

Для визначення сталих W_{2i} (i = 0, 1, 2, …), які входять до (17), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь типу (16). Отриману систему розв'язуємо методом редукції, враховуючи значення $W_0 = \omega_2 \varepsilon \pi (R_2 - R_1)(8\omega_3 R_2)^{-1}$.

Визначення невідомих сталих W_{2i} (i = 0, 1, 2, …) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь дозволить обчислити переміщення та напруження як у пружному штампі, так і у пружному півпросторі.

Враховуючи результати досліджень, можна зробити узагальнюючі висновки, щодо впливу початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик пружних тіл.

У випадку стискання двох попередньо напружених півпросторів на пружний циліндричний штамп виявлено, що найбільший вплив початкових напружень відзначено на бічній поверхні штампа. Та небезпечною є ситуація, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості, оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

Також з дослідження контактної взаємодії двох попередньо напружених півпросторів та пружного циліндричного штампа у випадку потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу) можна побачити, що чим ближче до центрального поперечного перерізу циліндричного штампа, тим швидше нормальні напруження прямуватимуть до нуля (рис. 1). А переміщення приймають значно більші значення ближче до осі циліндричного штампа, ніж до його бічної поверхні (рис. 2). Причому, з дослідження значень рівнодійної навантаження P можна зробити висновок, що при розтягу сила P приймає більші значення ніж при стиску, оскільки їх значення зменшуються із збільшенням коефіцієнта видовження λ_1.

Таким чином, отримані результати досліджень можуть бути використані для регулювання контактних напружень і переміщень при розрахунках важливих характеристик для пружних фундаментів із підошвами колон будівель, димових труб, градирень, водонапірних веж та інших висотних споруд на вітрове навантаження або навантаження від власної ваги.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Saarbrücken: LAP, 2015. 468 с.
2. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький: ПП Мельник, 2006. 710 с.
3. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, №4. P. 378—388. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y
4. *Yaretskaya N.F.* Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew*. 2018. **54**, №5. P. 539—543. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y
5. Babych S.Y., Yarets'ka N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech.* 2021. **57**, №3. P. 297—305. https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7

Надійшло до редакції 28.02.2023

REFERENCES

1. Guz, A. N., Babich, S. Yu. & Glukhov, Yu. P. (2015). Smeshannyie zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachalnyimi napryazheniyami. *Mixed Problems for Prestressed Elastic Foundation.* Saarbrücken: LAP (in Russian).
2. Guz, A. N. & Rudnickij, V. B. (2006). Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstvija uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami. Hmel'nic'kij: PP Mel'nik (in Russian).
3. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. Int. Appl. Mech., 50, No. 4, pp. 378-388.
4. *Yaretskaya, N. F. (2018).* Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. Int. Appl. Mech. Rew., 54, No. 5, pp. 539-543.
5. Babych, S. Y. & Yarets'ka, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. Int. Appl. Mech., 57, No. 3, pp. 297-305.

Received 28.02.2023

S.Yu. Babich[1], https://orcid.org/0000-0003-2642-9115
N.O. Yaretska[2], https://orcid.org/0000-0002-3726-2878

[1] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] Khmelnytsky National University, Khmelnytsky
E-mail: prikl@inmech.kiev.ua, yaretskano@khmnu.edu.ua

CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC PRESTRESSED CYLINDERS
OF CIRCULAR CROSS-SECTION (SOLID AND ANNULAR) AND HALF-SPACES
WITH INITIAL STRESSES.

This article addresses contact problems involving cylindrical and ring punches interacting with pre-stressed bodies, without considering frictional forces. Specifically, it focuses on the pressure exerted by an elastic ring punch on a half-space with initial stresses and the pressure exerted by two pre-stressed half-spaces on an elastic cylindrical punch with initial stresses. Investigating the contact interaction of punches, which forms the main objective of this work, is highly relevant, as contact interaction is one of the most common methods of transmitting external loads in practical applications. The research was conducted within the framework of the theory of large initial (ultimate) deformations and two variants of the theory of small initial deformations, based on the linearized theory of elasticity with an elastic potential of arbitrary structure. Various fundamental results were employed in the analysis, including Hankel's transformations, integral equations, orthogonal polynomials, and other methods from the contact problem theory of the linearized theory of elasticity.

Keywords: *linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problems, annular punch, cylindrical die, half-space.*