ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.003
УДК 517.958

О.О. Ванєєва[1,2], https://orcid.org/0000-0003-1841-0342
О.В. Брагінець[3], https://orcid.org/0000-0003-2635-7203
О.Ю. Жалій[1], https://orcid.org/0000-0002-8188-3161
О.В. Магда[2], https://orcid.org/0000-0002-4732-004X

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”, Київ
[3] Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, Миколаїв
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua, oksana.brahinets@gmail.com,
zhaliy@imath.kiev.ua, olena.magda@gmail.com

Точні розв’язки узагальнених рівнянь Кортевега — де Фріза зі змінними коефіцієнтами

Досліджено трансформаційні властивості двох класів узагальнених рівнянь Кортевега — де Фріза з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, а також продемонстровано ефективність методу еквівалентності для побудови точних розв’язків таких рівнянь. Зокрема, знайдено групоїди еквівалентності обох класів рівнянь і доведено, що обидва класи є нормалізованими. Знайдено критерій звідності рівнянь з одного з досліджуваних класів зі змінними коефіцієнтами до стандартного модифікованого рівняння Кортевега — де Фріза, а для другого класу рівнянь встановлено повну подібність до класичного рівняння Кортевега — де Фріза. Показано, що метод еквівалентності знаходження точних розв’язків є більш ефективним для таких класів рівнянь, ніж методи, що застосовувались іншими авторами. В результаті отримано формули для генерації точних розв’язків узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами та наведено приклади побудови точних розв’язків за допомогою цих формул.

Ключові слова: *рівняння Кортевега — де Фріза, точні розв’язки, групоїд еквівалентності, допустимі перетворення, метод еквівалентності.*

Багато модельних рівнянь для різноманітних хвильових процесів можуть бути зведені до класичного рівняння Кортевега — де Фріза (рівняння КдФ), модифікованого рівняння КдФ (рівняння мКдФ) або їхніх узагальнень [1]. Це пояснює великий інтерес дослідників до

Ц и т у в а н н я: Ванєєва О.О., Брагінець О.В., Жалій О.Ю., Магда О.В. Точні розв’язки узагальнених рівнянь Кортевега — де Фріза зі змінними коефіцієнтами. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2023. № 6. С. 3—11. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.003

пошуку нових і застосуванню вже відомих методів побудови точних розв'язків таких рівнянь. На жаль, більшість запропонованих методів призводять до еквівалентних форм вже відомих розв'язків. Причина в тому, що еквівалентність моделей і відповідних розв'язків не досліджуються систематично. Головним інструментом для дослідження трансформаційних властивостей в класах диференціальних рівнянь є групоїди еквівалентності, строгу теорію яких розроблено в роботі [2].

У роботах [3, 4] показано, що застосування перетворень еквівалентності є ефективним інструментом для знаходження точних розв'язків, розв'язання задач групової класифікації, а також дослідження інтегровності диференціальних рівнянь з частинними похідними [5].

Об'єктами цього дослідження є два класи узагальнених рівнянь КдФ та мКдФ з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, точні розв'язки яких побудовано методом еквівалентності. Цей метод полягає у застосуванні перетворень з групи еквівалентності класу до відомих розв'язків та відповідних рівнянь з класу (зазвичай зі сталими коефіцієнтами) для побудови нових розв'язків подібних рівнянь з класу зі змінними коефіцієнтами.

Перший клас містить узагальнені рівняння мКдФ зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u + p(t)u_x + k(t)uu_x + l(t) = 0, \tag{1}$$

де f, g, h, p, k, l — довільні гладкі функції змінної t з умовою $fg \neq 0$. Точні розв'язки деяких рівнянь такого класу нещодавно було побудовано в роботі [6], використовуючи такі методи, як прямий метод редукції Кларксона—Крускала та "анзац"-метод, що базується на сумісності з рівнянням Ріккаті.

Другий клас складається з рівнянь типу КдФ

$$u_t - 3Mg(t)uu_x + g(t)u_{xxx} + 2q(t)u + (p(t) + q(t)x)u_x = 0, \tag{2}$$

де g, p, q — довільні гладкі функції змінної t з умовою $g \neq 0$, а M — ненульова стала. У роботі [7] побудовані точні розв'язки для таких рівнянь так званим вдосконаленим методом загального відображувального перетворення (improved general mapping deformation method).

Для обох класів знайдено групоїди еквівалентності, критерії звідності рівнянь зі змінними коефіцієнтами до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з тих самих класів та продемонстровано ефективність методу еквівалентності для побудови точних розв'язків таких рівнянь.

Побудова точних розв'язків рівнянь з класу (1). Дослідимо групоїд еквівалентності класу (1), використовуючи прямий метод [8]. Отримані результати повністю узгоджуються з дослідженням допустимих перетворень для ширшого класу рівнянь мКдФ, отриманих у роботі [3]. Справедлива

Теорема 1. *Клас (1) є нормалізованим у звичайному сенсі. Група еквівалентності цього класу складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \theta(t)u + \psi(t), \tag{3}$$

де α, γ, θ, ψ *— гладкі функції змінної* t, *причому* $\alpha_t\theta\neq 0$; β *— ненульова стала. Перетворення довільних елементів класу (1) мають вигляд:*

$$\tilde f=\frac{\beta}{\alpha_t\theta^2}f,\quad \tilde g=\frac{\beta^3}{\alpha_t}g,\quad \tilde h=\frac{1}{\alpha_t}\left(h-\frac{\theta_t}{\theta}\right),\quad \tilde p=\frac{1}{\alpha_t}\left(\beta p+\beta\frac{\psi^2}{\theta^2}f-\beta\frac{\psi}{\theta}k+\gamma_t\right),$$

$$\tilde k=\frac{\beta}{\alpha_t\theta}\left(k-2\frac{\psi}{\theta}f\right),\quad \tilde l=\frac{1}{\alpha_t}\left(\theta l-\psi h-\psi_t+\psi\frac{\theta_t}{\theta}\right).$$

Знайдений групоїд еквівалентності дозволяє сформулювати критерій звідності рівнянь з класу (1) до класичного рівняння мКдФ

$$\tilde u_{\tilde t}+6\tilde u^2\tilde u_{\tilde x}+\tilde u_{\tilde x\tilde x\tilde x}=0. \tag{4}$$

Рівняння з класу (1) є подібним до класичного рівняння мКдФ (4) тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти задовольняють умовам:

$$h=\frac{1}{2}\frac{f_t}{f}-\frac{1}{2}\frac{g_t}{g},\quad l=\frac{k}{2f}\left(\frac{k_t}{k}-\frac{1}{2}\frac{f_t}{f}-\frac{1}{2}\frac{g_t}{g}\right). \tag{5}$$

Відповідне перетворення з групи $G^{\sim}$ має вигляд

$$\begin{gathered}\tilde t=c_1^3\int g(t)\,\mathrm{d}t+c_0,\quad \tilde x=c_1\left(x+\int\left(\frac{k(t)^2}{4f(t)}-p(t)\right)\mathrm{d}t\right)+c_2,\\ \tilde u=\sqrt{\frac{f(t)}{6c_1^2g(t)}}\left(u+\frac{k(t)}{2f(t)}\right).\end{gathered} \tag{6}$$

N-солітонний розв'язок рівняння (4) було побудовано методом Хіроти в роботі [9]. Одно- та двосолітонний розв'язки рівняння (4) мають вигляд

$$\tilde u=a+\frac{k_0^2}{\sqrt{4a^2+k_0^2}\cosh z+2a},\quad z=k_0\tilde x-k_0(6a^2+k_0^2)\tilde t+b, \tag{7}$$

$$\tilde u=\frac{e^{\theta_1}\left(1+\dfrac{A}{4a_2^2}e^{2\theta_2}\right)+e^{\theta_2}\left(1+\dfrac{A}{4a_1^2}e^{2\theta_1}\right)}{\left(\dfrac{1}{2a_1}e^{\theta_1}+\dfrac{1}{2a_2}e^{\theta_2}\right)^2+\left(1-\dfrac{A}{4a_1a_2}e^{\theta_1+\theta_2}\right)^2}, \tag{8}$$

де k_0, a, b, a_i, b_i — довільні сталі; $\theta_i = a_i\tilde{x} - a_i^3\tilde{t} + b_i$, $i = 1, 2$; $A = \left(\dfrac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$. Раціональні розв'язки, що є граничними випадками одно- та двосолітонного розв'язків, такі:

$$\tilde{u} = a - \frac{4a}{4a^2z^2 + 1}, \tag{9}$$

$$\tilde{u} = a - \frac{12a\left(z^4 + \dfrac{3}{2a^2}z^2 - \dfrac{3}{16a^4} - 24\tilde{t}z\right)}{4a^2\left(z^3 + 12\tilde{t} - \dfrac{3}{4a^2}z\right)^2 + 9\left(z^2 + \dfrac{1}{4a^2}\right)^2}, \tag{10}$$

де $z = \tilde{x} - 6a^2\tilde{t}$; a — довільна дійсна стала. Ці розв'язки, зокрема, можна знайти у довіднику [10]. Зауважимо, що роз'язок (8) та розв'язок (10) наведено там з одруками.

Використовуючи формули перетворень (6) та розв'язки (7)—(10), методом еквівалентності можна побудувати точні розв'язки рівнянь з класу

$$u_t + fu^2u_x + gu_{xxx} + \frac{1}{2}\left(\frac{f_t}{f} - \frac{g_t}{g}\right)u + pu_x + kuu_x + \frac{k}{2f}\left(\frac{k_t}{k} - \frac{1}{2}\frac{f_t}{f} - \frac{1}{2}\frac{g_t}{g}\right) = 0, \tag{11}$$

де f, h, k, p — довільні гладкі функції змінної t, $f \neq 0$.

Наприклад, розв'язок рівняння (11), отриманий з односолітонного розв'язку (7), має вигляд

$$u = \sqrt{\frac{6c_1g(t)}{f(t)}}\left(a + \frac{k_0^2}{\sqrt{4a^2 + k_0^2}\cosh z + 2a}\right) - \frac{k}{2f},$$

де $z = k_0\left(c_1\left(x + \int\left(\dfrac{k(t)^2}{4f(t)} - p(t)\right)\mathrm{d}t\right) + c_2\right) - k_0(6a^2 + k_0^2)(c_1^3\int g(t)\,\mathrm{d}t + c_0) + b$; k_0, a, b — довільні сталі. Аналогічно будуються двосолітонний та раціональні розв'язки рівняння (11).

Побудова точних розв'язків рівнянь з класу (2). Дослідження допустимих перетворень в класі (2) прямим методом дозволяє сформулювати таку теорему.

Теорема 2. *Клас (2) є нормалізованим в узагальненому розширеному сенсі. Його група еквівалентності складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta(t)x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \frac{1}{\beta^2(t)}\left(\delta_1 u + \delta_2 e^{-2\int q(t)\mathrm{d}t}\right),$$

де α, β, γ — *гладкі функції змінної* t; δ_1, δ_2 — *дійсні сталі; причому* $\alpha_t\beta\delta_1 \neq 0$. *Перетворення довільних елементів класу (2) мають вигляд:*

$$\tilde{M} = \frac{M}{\delta_1}, \quad \tilde{g} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} g, \quad \tilde{q} = \frac{1}{\alpha_t}\left(q + \frac{\beta_t}{\beta}\right),$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{\alpha_t}\left(\beta p - \gamma q + \gamma_t - \gamma\frac{\beta_t}{\beta} + 3M\frac{\delta_2}{\delta_1}\beta g e^{-2\int q(t)\mathrm{d}t}\right).$$

Група еквівалентності класу (2) є узагальненою, оскільки перетворення змінної u залежить від довільного елемента q, та розширеною, оскільки ця залежність не є локальною [2].

Поклавши в теоремі 2 значення нових довільних елементів $\tilde{M} = 2$, $\tilde{g} = 1$, $\tilde{q} = \tilde{p} = 0$, можна показати, що будь-яке рівняння з класу (2) зводиться до класичного рівняння КдФ

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} - 6\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \tag{12}$$

за допомогою відповідного точкового перетворення з групи еквівалентності (див. також [3, приклад 4]). Таке перетворення, параметризоване довільними елементами класу, має вигляд

$$\tilde{t} = \varepsilon_1^3 \int g(t) e^{-3\int q(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + \varepsilon_0, \tag{13}$$

$$\tilde{x} = \varepsilon_1 e^{-\int q(t)\mathrm{d}t} x + \int e^{-\int q(t)\mathrm{d}t}\left(\varepsilon_2 g(t) e^{-2\int q(t)\mathrm{d}t} - \varepsilon_1 p(t)\right)\mathrm{d}t + \varepsilon_3, \tag{14}$$

$$\tilde{u} = \frac{M}{2\varepsilon_1^2} e^{2\int q(t)\mathrm{d}t} u - \frac{\varepsilon_2}{6\varepsilon_1^3},$$

де ε_j, $j = 0, 1, 2, 3$ — довільні сталі з умовою $\varepsilon_1 \neq 0$. Тоді формулу для побудови розв'язків рівнянь (2) з використанням відомих розв'язків рівняння (12) записуємо так:

$$u = \frac{2\varepsilon_1^2}{M} e^{-2\int q(t)dt}\left[\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) + \frac{\varepsilon_2}{6\varepsilon_1^3}\right], \tag{15}$$

де $\tilde{u}$ — точний розв'язок рівняння (12), а змінні $\tilde{t}$ і $\tilde{x}$ повинні бути замінені на вирази (13) і (14) відповідно. Колекцію розв'язків рівняння КдФ (12) наведено, зокрема, в [10].

За допомогою формули (15) можна побудувати низку точних розв'язків різних типів для рівнянь з класу (2). Наприклад, двосолітонний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$\tilde{u} = -2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}\ln\left(1 + b_1 e^{a_1\tilde{x} - a_1^3\tilde{t}} + b_2 e^{a_2\tilde{x} - a_2^3\tilde{t}} + Ab_1b_2 e^{(a_1+a_2)\tilde{x} - (a_1^3+a_2^3)\tilde{t}}\right),$$

де a_1, a_2, b_1 і b_2 — довільні сталі; $A = \left(\dfrac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$. З нього методом еквівалентності можна побудувати такий розв'язок рівняння (2):

$$u = \frac{\varepsilon_2}{3M\varepsilon_1} e^{-2\int q(t)\,dt} - \frac{4}{M}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + A b_1 b_2 e^{\theta_1+\theta_2}),$$

де a_1, a_2, b_1 і b_2 — довільні сталі; $A = \left(\dfrac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$,

$$\theta_i = a_i \varepsilon_1 e^{-\int q(t)\,\mathrm{d}t} x + a_i \int e^{-\int q(t)\,\mathrm{d}t}\left((\varepsilon_2 - a_i^2 \varepsilon_1^3) g(t) e^{-2\int q(t)\,\mathrm{d}t} - \varepsilon_1 p(t)\right)\mathrm{d}t + c_i,$$

$c_i = a_i \varepsilon_3 - a_i^3 \varepsilon_0$ — сталі, $i = 1, 2$. Використовуючи формулу (15), можна побудувати багатосолітонні, раціональні, "односолітонні + однополюсні" розв'язки, і, звичайно ж, розв'язки у термінах еліптичних функцій Якобі для рівнянь з класу (2) з відомих розв'язків класичного рівняння КдФ.

Щодо методу, запропонованого в [7], він базується переважно на пошуку розв'язків звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$\phi'^2 = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2 + a_3\phi^3 + a_4\phi^4,$$

де $\phi = \phi(\xi)$ — невідома функція, а a_i, $i = 0, \ldots, 4$, — сталі параметри. Добре відомо, що розв'язки таких рівнянь можна виразити у термінах еліптичних функцій Якобі, які для певних значень параметрів зводяться до тригонометричних, гіперболічних або раціональних функцій [11]. Зауважимо, що пошук розв'язків цього рівняння у формі (4) зі статті [7] не дає нових розв'язків, а лише еквівалентні форми вже відомих. Цю типову помилку при пошуку точних розв'язків описано в роботі [12]. Для прикладу розглянемо тригонометричний розв'язок, знайдений в [7] (див. випадок 3). Можна перевірити прямою підстановкою, що насправді це розв'язок лише для $r = \pm 1$. Тому розглянемо частинний розв'язок

$$\phi = \frac{1 + \sin\xi}{1 + \sin\xi \pm \cos\xi} \tag{16}$$

рівняння $\phi'^2 = \dfrac{1}{4}(1 - 2\phi + 2\phi^2)^2$. Це рівняння з'являється у випадку 3 статті [7] для $r = \pm 1$. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\phi = \frac{1}{2}\left(1 + \tan\frac{\xi + C}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\sin\frac{\xi + C}{2}\cos\frac{\xi - C}{2}}{2\cos\frac{\xi + C}{2}\cos\frac{\xi - C}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\cos\xi + \cos C + \sin\xi + \sin C}{\cos\xi + \cos C},$$

де C — довільна стала. Якщо ми покладемо $C=\pi/4$ і зробимо зсув змінної ξ на $-\pi/4$, то, враховуючи, що $\sin(\xi-\pi/4)=\sqrt{2}(\sin\xi-\cos x)/2$, $\cos(\xi-\pi/4)=\sqrt{2}(\sin\xi+\cos\xi)/2$, отримаємо (16) з додатним знаком $\cos\xi$. Розв'язок (16) з від'ємним знаком еквівалентний розв'язку з додатним знаком відносно перетворення $\xi\to-\xi$ із одночасним зсувом на π, оскільки $\cos(\pi-x)=-\cos\xi$ і $\sin(\pi-x)=\sin\xi$.

Розглянемо ще одне рівняння для ϕ, наведене в [7], а саме рівняння

$$\phi'^2=\frac{1}{4}(2\phi^2+(1-m)(1-2\phi))(2\phi^2+(1+m)(1-2\phi)).$$

За допомогою "вдосконаленого методу загального відображувального перетворення" в роботі [7] побудовані частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$\phi=\frac{\mathrm{cn}(\xi,m)}{\pm1\pm\mathrm{sn}(\xi,m)+\mathrm{cn}(\xi,m)},\quad \phi=\frac{\mathrm{cn}(\xi,m)}{\pm1\mp\mathrm{sn}(\xi,m)+\mathrm{cn}(\xi,m)},$$

тоді як його загальний розв'язок можна представити у вигляді

$$\phi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\delta}\mathrm{sn}\left(\frac{\delta}{2}\xi+C,\tilde{m}\right),$$

де C — довільна стала,

$$\delta=\sqrt{2m^2-1+2m\sqrt{m^2-1}}=m+\sqrt{m^2-1},$$

$$\tilde{m}=(1+8m^2(m^2-1)+4m(2m^2-1)\sqrt{m^2-1})^{-\frac{1}{2}}.$$

Формули зв'язків між еліптичними функціями Якобі можна знайти, наприклад, в [13].

Висновки. У даній роботі досліджено трансформаційні властивості класів узагальнених рівнянь КдФ та мКдФ зі змінними коефіцієнтами (1) та (2), а також продемонстровано ефективність методу еквівалентності для побудови точних розв'язків таких рівнянь. Зокрема, знайдено групоїди еквівалентності цих класів рівнянь, обидва класи є нормалізованими, отже, всі допустимі перетворення в таких класах породжуються перетвореннями з відповідних груп еквівалентності. Це дозволило сформулювати критерії звідності рівнянь з класів (1) та (2) зі змінними коефіцієнтами до класичних рівнянь КдФ та мКдФ.

Ми показали, що кожне рівняння з класу (2) подібне до класичного рівняння КдФ (12) відносно точкового перетворення. Для таких рівнянь підхід, заснований на еквівалентності, працює набагато краще, ніж інші існуючі методи, оскільки дозволяє використовувати різноманітні відомі розв'язки класичного рівняння КдФ (див. [3]). Крім того показано, що "вдосконалений метод загального відображувального перетворення", запропонований у роботі [7] не дає дійсно нових розв'язків, а лише еквівалентні відомим.

У випадку класу (1) повної подібності немає, рівняння зводяться до класичного рівняння мКДФ тоді й лише тоді, коли їхні коефіцієнти задовольняють умовам (5). У такому випадку метод еквівалентності може бути застосований для відповідного підкласу класу (1), виокремленому умовами (5). Тим не менш застосування методу еквівалентності дозволяє побудувати для цього підкласу ширші сім'ї точних розв'язків, ніж ті, що були знайдені нещодавно в [6].

Дослідження першого автора виконано за підтримки наукового проєкту 0122U201960 в рамках іменної стипендії Верховної Ради України для молодих учених докторів наук за 2023 рік. Ця робота була також підтримана грантом від Фонду Саймонса (1030291, О.О.В. та О.Ю.Ж.).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Jeffrey A., Kakutani T. Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg-de Vries equation. *SIAM Rev.* 1972. **14,** № 4. P. 582—643. https://doi.org/10.1137/1014101
2. Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O. Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2020. **91**. Paper 105419. 28 p. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105419
3. Popovych R.O., Vaneeva O.O. More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: Part I. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2010. **15,** № 12. P. 3887—3899. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.01.037
4. Kuriksha O., Pošta S., Vaneeva O. Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. **47.** Paper 045201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201
5. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Equivalence transformations in the study of integrability. *Phys. Scr.* 2014. **89,** № 3. Paper 038003. https://doi.org/10.1088/0031-8949/89/03/038003
6. El-Shiekh R.M., Gaballah M. New analytical solitary and periodic wave solutions for generalized variable-coefficients modified KdV equation with external-force term presenting atmospheric blocking in oceans. *J. Ocean Eng. and Sci.* 2022. **7,** № 4. P. 372—376. https://doi.org/10.1016/j.joes.2021.09.003
7. Hong B., Lu D. New Jacobi elliptic function-like solutions for the general KdV equation with variable coefficients. *Math. and Comp. Modelling.* 2012. **55,** № 3-4. P. 1594—1600. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.10.057
8. Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1998. **31.** P. 1597—1619. https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/6/010
9. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1981.
10. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004. https://doi.org/10.1201/9780203489659
11. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608759
12. Kudryashov N.A. Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2009. **14,** № 9-10. P. 3507—3529. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.01.023
13. Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications, Inc.,1992.
14. Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H. Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations. *Acta Appl. Math.* 2010. **109**. P. 315—359. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9321-4

Надійшло до редакції 09.10.2023

REFERENCES

1. Jeffrey, A. & Kakutani, T. (1972). Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg-de Vries equation. SIAM Rev., 14, No. 4, pp. 582-643. https://doi.org/10.1137/1014101
2. Vaneeva, O. O., Bihlo, A. & Popovych, R. O. (2020). Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 91, 105419, 28 pp. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105419
3. Popovych, R. O. & Vaneeva, O. O. (2010). More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: Part I. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 15, No. 12, pp. 3887-3899. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.01.037

4. Kuriksha, O., Pošta, S. & Vaneeva, O. (2014). Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations. J. Phys. A: Math. Theor., 47, 045201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201
5. Vaneeva, O. O., Popovych, R. O. & Sophocleous, C. (2014). Equivalence transformations in the study of integrability. Phys. Scr., 89, No. 3, 038003. https://doi.org/10.1088/0031-8949/89/03/038003
6. El-Shiekh, R. M. & Gaballah, M. (2022). New analytical solitary and periodic wave solutions for generalized variable-coefficients modified KdV equation with external-force term presenting atmospheric blocking in oceans. Journal of Ocean Engineering and Science, 7, No. 4, pp. 372-376. https://doi.org/10.1016/j.joes.2021.09.003
7. Hong, B. & Lu, D. (2012). New Jacobi elliptic function-like solutions for the general KdV equation with variable coefficients. Mathematical and Computer Modelling, 55, No. 3-4, pp. 1594-1600. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.10.057
8. Kingston, J. G. & Sophocleous, C. (1998). On form-preserving point transformations of partial differential equations. J. Phys. A: Math. Gen., 31, pp. 1597-1619. https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/6/010
9. Ablowitz, M. J. & Segur, H. (1981). Solitons and the inverse scattering transform. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa.
10. Polyanin, A. D. & Zaitsev, V. F. (2004). Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press. https://doi.org/10.1201/9780203489659
11. Whittaker, E. T. & Watson, G. N. (1996). A course of modern analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608759
12. Kudryashov, N. A. (2009). Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 14, No. 9-10, pp. 3507-3529. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.01.023
13. Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (Eds.). (1992). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications, Inc.
14. Popovych, R. O., Kunzinger, M. & Eshraghi, H. (2010). Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations. Acta Appl. Math., 109, pp. 315-359. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9321-4

Received 09.10.2023

O.O. Vaneeva[1,2], https://orcid.org/0000-0003-1841-0342
O.V. Brahinets[3], https://orcid.org/0000-0003-2635-7203
O.Yu. Zhalij[1], https://orcid.org/0000-0002-8188-3161
O.V. Magda[2], https://orcid.org/0000-0002-4732-004X

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

[2] National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv

[3] Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolaiv

E-mails: vaneeva@imath.kiev.ua, oksana.brahinets@gmail.com, zhaliy@imath.kiev.ua, olena.magda@gmail.com

EXACT SOLUTIONS OF GENERALIZED
KORTEWEG-DE VRIES EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

The transformational properties of two classes of generalized Korteweg-de Vries equations with coefficients dependent on the time variable are investigated, and the effectiveness of the equivalence method for constructing exact solutions of such equations is demonstrated. Specifically, the equivalence groupoids for both classes of equations are identified, and it is proven that both classes are normalized. A criterion for the reducibility of variable coefficient equations from one of the classes to the standard modified Korteweg-de Vries equation is established. For the second class of equations, full similarity to the classic Korteweg-de Vries equation is demonstrated. It is shown that the equivalence method of finding exact solutions is more effective for such classes of equations compared to methods employed by other authors. Consequently, formulas for generating exact solutions of generalized Korteweg-de Vries equations with variable coefficients are obtained, and examples of constructing exact solutions using these formulas are presented.

Keywords: *Korteweg-de Vries equations, exact solutions, equivalence groupoid, admissible transformations, equivalence method.*