ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.012
УДК: 519.63

В.А. Колесников, https://orcid.org/0009-0004-7984-2995

С.І. Ляшко, https://orcid.org/0000-0003-1016-5231

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ
E-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com, lyashko.serg@gmail.com

Стійкість розв’язків рівняння Річардса — Клюта

Наведено результати стійкості для розв’язків рівняння Річардса — Клюта під впливом збурень у початкових та крайових умовах. Метою статті є доведення апріорних оцінок варіації розв’язку, які виникають внаслідок збурень у початково-крайових умовах. Доведено основний результат обмеженості варіації розв’язку лінійною функцією від варіацій початково-крайових умов. Розглянуто випадок неоднорідного пористого середовища.

Ключові слова: *рівняння Річардса — Клюта, стійкість, початкові умови, крайові умови.*

Рівняння Річардса — Клюта використовується для опису процесу масопереносу в пористих середовищах під дією явищ гравітації та капілярності. Проблема масопереносу в пористому середовищі з межею насичення є однією з важливих проблем математичної фізики. За допомогою рівняння Річардса — Клюта описуються процеси зрошення та осушення, розв’язуються задачі оптимального керування для задання розподілу корисних речовин у ґрунті. Також воно використовується в процесі будівництва гідрологічних та іригаційних систем. Рівняння Річардса — Клюта є квазілінійним еліптично-параболічним виродженим диференціальним рівнянням у часткових похідних. Тому існує лише обмежена кількість аналітичних розв’язків цього рівняння. Більшість із них отримано для дуже спрощених властивостей середовища. З цієї ж причини існує лише невелика кількість апріорних оцінок для розв’язків рівняння Річардса — Клюта. Більшість із них доведені лише для слабких розв’язків. Робота [1] містить аналітичний одновимірний розв’язок рівняння Річардса — Клюта, отриманий за допомогою перетворення Кірхгофа. У класичних роботах [2, 3] містяться доведення теорем існування, єдиності та регулярності слабких розв’язків. Роботи [2, 4] також містять результати стосовно стійкості розв’язків рівняння Річардса — Клюта, але в них розглядалася лише стійкість в залежності від початкових умов. У роботі [5] на-

Цитування: Колесников В.А., Ляшко С.І. Стійкість розв’язків рівняння Річардса — Клюта. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 6. С. 12—18. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.012

ведено теоретичні результати, що стосуються задачі оптимального керування, отримані за допомогою перетворення Кірхгофа.

Через обмежену кількість аналітичних розв'язків основним інструментом для розв'язання рівняння Річардса — Клюта є чисельні методи. Роботи [6, 7] містять огляд чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса — Клюта. На практиці найпоширенішими методами є метод скінченних елементів і метод скінченних об'ємів. Останній забезпечує найкращий контроль балансу маси. Також є багато модифікацій цих методів. В роботах [8] та [9] запропоновані адаптивні кроки по часу та простору відповідно. Ці модифікації забезпечують більш високу точність порівняно зі стандартними методами. В [10] пропонується спеціальна процедура апроксимації рівняння Річардса — Клюта для неоднорідних середовищ. Отримання наближеного розв'язку рівняння Річардса — Клюта за допомогою лінеаризації рівняння описане в роботі [11]. Основним результатом згаданих робіт є підвищення ефективності обчислень при знаходженні наближеного розв'язку. Матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що утворюється на кожному кроці по часу для знаходження наближеного розв'язку на наступному кроці, зазвичай є розрідженою, симетричною та має діагональну перевагу. Для ефективного розв'язання СЛАР з такими матрицями користуються методом типу Зейделя та їх модифікаціями [12]. Є також роботи, в яких обговорюється проблема стійкості чисельних методів. Стаття [13] містить результати стійкості для змішаного методу скінченних елементів, отримані за допомогою перетворення Кірхгофа. У роботі [14] описано стійку схему на основі модифікації представлення величини потенціалу тиску. Стаття [15] містить результати щодо стійкості методу скінченних різниць для розв'язання рівняння Річардса — Клюта на основі методу перетворення Фур'є.

Проте всі результати, що стосуються стійкості для чисельних методів, а також для загального рівняння Річардса — Клюта, дають оцінки похибки розв'язку в залежності від зміни початкових умов. Крайові умови в цих міркуваннях вважаються постійними. Дана стаття містить результати стійкості розв'язку рівняння Річардса — Клюта відносно змін у початкових і крайових умовах. Доведена обмеженість відхилення значень розв'язку рівняння Річардса — Клюта лінійною функцією від відхилень у початкових та крайових умовах.

Розглянемо рівняння Річардса — Клюта

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\nabla\cdot(K(\nabla h+\overline{e}_z)), \tag{1}$$

де θ — коефіцієнт насиченості (безрозмірний); h — потенціал гідравлічного тиску, м; K — водопроникність, м/с, середовища (залежить від насиченості); $\overline{e}_z$ — орт, напрямлений вертикально донизу; $(x, y, z, t)\in\Omega\times(0,T)$, Ω — обмежена область з гладкою межею, що розділяється на скінченну кількість підобластей гомогенності $\Omega_i\left(\bigcup\limits_i\Omega_i=\Omega, \Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing, i\neq j\right)$, в кожній з яких визначена окрема функція K_i, так що $K(h(\omega))=K_i(h(\omega))$, $\omega\in\Omega_i$. Надалі будемо вважати, що функції K_i неперервні, а також, що виконуються нерівності $K_i>0$. До того ж, будемо вважати, що функція залежності насиченості від потенціалу тиску $\theta(h)$ неспадна.

Лема. *Нехай область Ω обмежена та має гладку межу, Γ — зв'язна замкнута підмножина $\partial\Omega$. Тоді для довільного $\delta\leqslant\delta_0$ існують така підобласть $\Omega_\delta\subseteq\Omega$ з гладкою межею, що*

$\Gamma \cap \Omega_\delta = \varnothing$, $d_H(\Gamma, \Omega_\delta) \leqslant \delta$, *де* d_H *— метрика Хаусдорфа, та неперервна кусково-диференційована функція* ν_δ, *така що виконуються такі умови:*

$$\begin{aligned} &\nu_\delta(\gamma) = 0, \quad \gamma \in \Gamma, \\ &\nu_\delta(\omega) = 1, \quad \omega \in \Omega_\delta, \\ &\exists M = \text{const} : \left|\nabla \nu_\delta\right| \leqslant M/\delta. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема. *Нехай маємо рівняння Річардса — Клюта* (1) *у негомогенному середовищі з такими початково-крайовими умовами*:

$$\theta(\omega, 0) = \theta^0_{1,2}(\omega), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &h(\gamma, t) = h^0_{1,2}(t), \quad \gamma \in \Gamma_1, \\ &K(\nabla h(\gamma, t) + \overline{e}_z)\big|_{\overline{n}} = q_{1,2}(t), \quad \gamma \in \Gamma_2, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

Нехай для рівняння (1) *та початково-крайових умов* $\theta_1^{\,0}$, $h_1^{\,0}$, q_1 *і* $\theta_2^{\,0}$, $h_2^{\,0}$, q_2 *виконуються умови існування розв'язків* h_1 *та* h_2 *з роботи* [2], *причому* ∇h_1 *та* ∇h_2 *кусково-неперервні і в деякому околі межі* Γ_1 *виконується нерівність* $|\nabla(h_1 - h_2)| \le |h_1 - h_2|$, *C — константа.*

Нехай для функцій K_i *виконується така умова* (A_0 *— константа).*

$$\left|K_i(h_1) - K_i(h_2)\right| \leqslant A_0 \left|h_1 - h_2\right|. \tag{5}$$

Тоді має місце така нерівність.

$$\int_\Omega \left|\theta_1 - \theta_2\right| d\Omega \le \int_\Omega \left|\theta_1^0 - \theta_2^0\right| d\Omega + C_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left|h_1^0 - h_2^0\right| d\Gamma_1 dt + C_2 \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left|q_1 - q_2\right| d\Gamma_2 dt. \tag{6}$$

Доведення. Нехай $\theta_1 = \theta(h_1)$, $\theta_2 = \theta(h_2)$.

Помножимо (1) на деяку неперервну кусково-диференційовану функцію η, таку що $\eta(\gamma) = 0$, $\gamma \in \Gamma_1$, і проінтегруємо частинами. Тоді ми маємо таку рівність:

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t} \eta dz + \int_\Omega K(h)(\nabla h + \overline{e}_z) \cdot \nabla \eta d\Omega - \int_{\Gamma_2} q \eta dn = 0. \tag{7}$$

Підставимо у дану рівність розв'язки θ_1 і θ_2 та оцінимо їх різницю. Для подальшого аналізу підберемо тепер функцію η. Якщо функцію η обрати кусково-сталою, то другий інтеграл в (7) дорівнюватиме нулю. Якщо, окрім цього, обрати $\eta = \operatorname{sign}(\theta_1 - \theta_2)$, то ми матимемо оцінку для кусково-диференційованої функції $\max(0, \theta_1 - \theta_2)$. Міняючи місцями θ_1 та θ_2, ми матимемо оцінку для функції $\max(0, \theta_1 - \theta_2) + \max(0, \theta_2 - \theta_1) = \left|\theta_1 - \theta_2\right|$. Проте для того, щоб перейти від (1) до (7), функція η повинна бути неперервною та задовольняти умові $\eta(\gamma)=0$, $\gamma \in \Gamma_1$. Введемо тоді у розгляд сімейство функцій з двома параметрами $\eta_{\delta,\varepsilon}$, таке що $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \eta_{\delta,\varepsilon} = \operatorname{sign}(\theta_1 - \theta_2)$. Параметр δ відповідатиме за умову на межі Γ_1, параметр ε — за розриви функції $\operatorname{sign}(\theta_1 - \theta_2)$ в області Ω.

Нехай функція $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ диференційована, $\mu(x)=0$ для $x \leqslant 0$, $\mu(x)=1$ для $x \geqslant 1$, для $x \in [0,1]$ $\mu(x)$ монотонно зростає, причому $\mu'(x) \leqslant M$ для всіх $x \in$ R. Нехай $\eta_\varepsilon(\xi) = \mu(\xi/\varepsilon)$. Тоді для η_ε виконуються такі властивості:

$$\begin{aligned} &\eta_\varepsilon(\xi) \to \operatorname{sign}(\xi), \varepsilon \to 0,\\ &f(\varepsilon) = \max_\xi (\xi^2 \mu'_\varepsilon(\xi)) \to 0, \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Тоді визначимо сімейство функцій $\eta_{\delta,\varepsilon}(\omega,\xi) = \nu_\delta(\omega)\eta_\varepsilon(\xi)$, де $\nu_\delta(\omega)$ — функції, що описані у наведеній вище лемі для $\Gamma = \Gamma_1$. Це сімейство функцій має такі властивості:

$$0 \leqslant \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega,\xi) \leqslant 1, \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega,\xi) \leqslant \eta_\varepsilon(\xi), \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega,\xi) \to \eta_\varepsilon(\xi), \delta \to 0. \tag{9}$$

В якості функції η підставимо у (7) функцію $\eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1(\omega) - h_2(\omega))$. Для градієнта ∇η ми маємо таку рівність:

$$\begin{aligned} &\nabla\eta(\omega) = \nabla\eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2) = \nabla_\omega \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2) + \frac{\partial}{\partial\xi}(\eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2)) =\\ &= \nabla\nu_\delta(\omega)\eta_\varepsilon(h_1 - h_2) + \nu_\delta(\omega)\eta'_\varepsilon(h_1 - h_2)(\nabla h_1 - \nabla h_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Тоді

$$\int_\Omega \frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial t} \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2)\, d\Omega = (I_{11} - I_{21}) + (I_{12} - I_{22}) + Q, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &I_{11} = \int_\Omega (K(h_2) - K(h_1))(\nabla h_2 + \overline{e}_z)\cdot(\nabla h_1 - \nabla h_2)\frac{\partial}{\partial\xi}\eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2)\, d\Omega,\\ &I_{12} = \int_\Omega (K(h_2) - K(h_1))(\nabla h_2 + \overline{e}_z)\cdot\nabla_\omega \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2)\, d\Omega,\\ &I_{21} = \int_\Omega K(h_1)(\nabla h_1 - \nabla h_2)^2 \frac{\partial}{\partial\xi}\eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2)\, d\Omega,\\ &I_{22} = \int_\Omega K(h_1)(\nabla h_1 - \nabla h_2)\cdot\nabla_\omega \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_1 - h_2)\, d\Omega,\\ &Q = \int_{\Gamma_2} (q_1 - q_2)\eta\, dn. \end{aligned} \tag{12}$$

Розглянемо рівняння, аналогічне (11), в якому θ_1 і θ_2 змінені місцями:

$$\int_\Omega \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial t} \eta_{\delta,\varepsilon}(\omega, h_2 - h_1)\, d\Omega = (I^r_{11} - I^r_{12}) + (I^r_{21} - I^r_{22}) + Q^r. \tag{13}$$

Оцінимо праві частини (11) і (13). Шляхом нескладних перетворень ми маємо такі оцінки (A_1, A_2, A_3 — константи):

$$
\begin{aligned}
&\left|I_{11}-I_{21}\right| \leqslant A_1 f(\varepsilon), \left|I_{11}^r-I_{21}^r\right| \leqslant A_1 f(\varepsilon),\\
&\left|I_{12}\right| \leqslant A_2 \int_{\Gamma_1}\left|h_1^0-h_2^0\right| d\Gamma_1,\ \delta \to 0,\\
&\left|I_{12}^r\right| \leqslant A_2 \int_{\Gamma_1}\left|h_1^0-h_2^0\right| d\Gamma_1,\ \delta \to 0,\\
&\left|I_{22}+I_{22}^r\right| \leqslant A_3 \int_{\Gamma_1}\left|h_1^0-h_2^0\right| d\Gamma_1,\ \delta \to 0,\\
&Q \leqslant \int_{\Gamma_2}\left|q_1-q_2\right| d\Gamma_2.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Тоді, додаючи (11) і (13) та беручи до уваги, що $\mathrm{sign}(h_1 - h_2) = \mathrm{sign}(\theta_1 - \theta_2)$, $\max(0, \theta_1-\theta_2)+$ $+\max(0, \theta_2-\theta_1)=\left|\theta_1-\theta_2\right|$ та $f(\varepsilon) \to 0$, ми отримуємо при $\varepsilon, \delta \to 0$ нерівність

$$
\int_{\Omega} \frac{\partial\left|\theta_1-\theta_2\right|}{\partial t} d\Omega \leqslant C_1 \int_{\Gamma_1}\left|h_1^0-h_2^0\right| d\Gamma_1+C_2 \int_{\Gamma_2}\left|q_1-q_2\right| d\Gamma_2,
\tag{15}
$$

де C_1, C_2 — константи, а інтеграл в лівій частині розуміється у такому сенсі:

$$
\int_{\Omega} \frac{\partial\left|\theta_1-\theta_2\right|}{\partial t} d\Omega=\int_{\Omega^+} \frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial t} d\Omega+\int_{\Omega^-} \frac{\partial(\theta_2-\theta_1)}{\partial t} d\Omega,
\tag{16}
$$

де $\Omega^+=\{\omega \in \Omega \mid \theta_1(\omega)>\theta_2(\omega)\}, \Omega^-=\Omega \setminus \Omega^+$.

Інтегруючи (15) по часу, ми отримуємо (6).

Дана нерівність описує обмеженість відхилення значень розв’язку рівняння Річардса — Клюта в будь-який момент часу T лінійною функцією від відхилень у початкових та крайових умовах першого та другого роду. Основний результат статті слугує теоретичною базою для апроксимації початкових та крайових умов в процесі знаходження наближеного розв’язку рівняння Річардса — Клюта. Цей результат також впливає на використання чисельних методів, що дають можливість апроксимувати крайові умови Діріхле та Неймана з прогнозуванням похибок. Подальші дослідження можуть містити аналогічні результати початково-крайової стійкості у випадку швидко осцилюючих розв’язків. Також постає питання стосовно аналогічних оцінок в інших метриках.

Дослідження виконано в рамках проєкту Національного фонду досліджень України, ДР0122U002026.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Srivastava R., Jim Yeh T.-C. Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soil. *Water Resources Research.* 1991. **27**, Iss. 5. P. 753—762. https://doi.org/10.1029/90WR02772
2. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.* 1983. **183**, № 1. P. 311—341. https://doi.org/10.1007/BF01176474
3. Bertsch M., Husholf J. Regularity Results for an Elliptic-Parabolic Free Boundary Problem. *Transactions of the Amer. Math. Society*. 1986. **297**, № 1. P. 337—350. https://doi.org/10.2307/2000472
4. Egorov A.G., Dautov R.Z., Nieber J.L., Shevchukov A.Y. Stability analysis of gravity-driven infiltrating flow. *Water Resour. Res*. 2003. **39**, № 9. https://doi.org/10.1029/2002WR001886.
5. Ляшко С.І., Клюшин Д.А., Тимошенко А.А. Оптимальне керування інтенсивністю занурених точкових джерел води у ненасиченому пористому середовищі. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2019. № 12. С. 13—18. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.12.013
6. Farthing M.W., Ogden F.L. Numerical Solution of Richards' Equation: A Review of Advances and Challenges. *Soil Science Society of Amer. Journal.* 2017. **81**, № 6. P. 1257—1269. https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058
7. Zha Y., Yang J., Zeng J., Tso C.-H.M., Zeng W., Shi L. Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIREs Water*. 2019. **6**, P. e1364. https://doi.org/10.1002/wat2.1364
8. Celia M., Bouloutas E., Zarba R. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research*. 1990. **26**, № 1. P. 1483—1496. https://doi.org/10.1029/WR026i007p01483
9. Колесников В. Аналіз побудови чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клюта. *Журнал обчисл. та прикл. математики*. 2023. № 1. С. 28—38. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.03
10. Suk H., Park E. Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. *J. Hydrology*. 2019. **579**, № 124213. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124213
11. Liu F., Fukumoto Y., Zhao X. A multi level linearized Crank–Nicolson scheme for Richards equation under variable flux boundary conditions. *Appl. Analysis*. 2023. **102**, № 6. P. 1601—1617. https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1992395
12. Хіміч О.М., Сидорук В.А. Гібридний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь з розрідженими матрицями методом верхньої релаксації. *Мат. та комп. моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки*. 2013. **9**. С. 105—111.
13. Pop I.S., Radu F., Knabner P. Mixed finite elements for the Richards' equation: linearization procedure. *J. Comp. and Appl. Math*. 2004. **168**, № 1—2. P. 365—373. https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.04.008
14. Machado G.J., Pereira R.M.S., Clain S., Araújo N., Lopes S.O. A new stabilized scheme for a Richards' equation with evapotranspiration. *Groundwater for Sustainable Development.* 2022. **17**, № 100736. https://doi.org/10.1016/j.gsd.2022.100736
15. Pedrozo H.A., Rozenberger M.R., Shevzov C.E. Stability analysis of the solution of the one-dimensional Richards equation by the finite difference method. *AIP Conf. Proc*. 2016. **1738**, № 480008. https://doi.org/10.1063/1.4952244

Надійшло до редакції 25.09.2023

REFERENCES

1. Srivastava, R. & Jim Yeh, T.-C. (1991). Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soil. Water Resources Research, 27, No. 5, pp. 753-762. https://doi.org/10.1029/90WR02772
2. Alt, H. W. & Luckhaus, S. (1983). Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. Math. Z., 183, No. 1, pp. 311-341. https://doi.org/10.1007/BF01176474
3. Bertsch, M. & Husholf, J. (1986). Regularity Results for an Elliptic-Parabolic Free Boundary Problem. Transactions of the Amer. Math. Society, 297, No. 1, pp. 337-350. https://doi.org/10.2307/2000472
4. Egorov, A. G., Dautov, R. Z., Nieber, J. L. & Shevchukov, A. Y. (2003). Stability analysis of gravity-driven infiltrating flow. Water Resour. Res., 39, No. 9. https://doi.org/10.1029/2002WR001886.

5. Lyashko, S. I., Klyushin, D. A. & Tymoshenko, A. A. (2019). Optimal control over inserted point source intensity for humidification of a two-dimensional porous medium. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 12, pp. 13-18 (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.12.013
6. Farthing, M. W. & Ogden, F. L. (2017). Numerical Solution of Richards' Equation: A Review of Advances and Challenges. Soil Science Society of Amer. Journal, 81, No. 6, pp. 1257-1269. https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058
7. Zha, Y., Yang, J., Zeng, J., Tso, C.-H. M., Zeng, W. & Shi, L. (2019). Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils. WIREs Water, 6, P. e1364. https://doi.org/10.1002/wat2.1364
8. Celia, M., Bouloutas, E. & Zarba, R. (1990). A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. Water Resources Research, 26, No. 1. pp. 1483-1496. https://doi.org/10.1029/WR026i007p01483
9. Kolesnykov, V. (2023). Analysis of the construction of numerical methods for solving the Richards-Klute equation. Journal of Numerical and Appl. Math., No. 1, pp. 28-38 (in Ukrainian). https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.03
10. Suk, H. & Park, E. (2019). Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. J. Hydrology, 579, No. 124213. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124213
11. Liu, F., Fukumoto, Y. & Zhao, X. (2023). A multi level linearized Crank–Nicolson scheme for Richards equation under variable flux boundary conditions. Appl. Analysis, 102, No. 6, pp. 1601-1617. https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1992395
12. Khimich, O. M. & Sydoruk V. A. (2013). A hybrid algorithm for solving the linear equations system with sparse matrix using over relaxation method. Math. and comp. modeling. Series: Phys. and math. sci., 9, pp. 105-111 (in Ukrainian).
13. Pop, I. S., Radu, F. & Knabner, P. (2004). Mixed finite elements for the Richards' equation: linearization procedure. J. Comp. and Appl. Math., 168, No. 1-2, pp. 365-373. https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.04.008
14. Machado, G. J., Pereira, R. M. S., Clain, S., Araújo, N. & Lopes, S. O. (2022). A new stabilized scheme for a Richards' equation with evapotranspiration. Groundwater for Sustainable Development, 17, No. 100736. https://doi.org/10.1016/j.gsd.2022.100736
15. Pedrozo, H. A., Rozenberger, M. R. & Shevzov, C. E. (2016). Stability analysis of the solution of the one-dimensional Richards equation by the finite difference method. AIP Conf. Proc., 1738, No. 480008. https://doi.org/10.1063/1.4952244

Received 25.09.2023

V.A. Kolesnykov, https://orcid.org/0009-0004-7984-2995
S.I. Lyashko, https://orcid.org/0000-0003-1016-5231

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

E-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com, lyashko.serg@gmail.com

RICHARDS — KLUTE EQUATION'S SOLUTION STABILITY

The stability results of the Richards — Klute equation's solution under perturbations of initial and boundary conditions are provided. The purpose of the article is to establish a priori estimates of the solution's variation resulting from perturbations in the initial and boundary conditions. The primary finding demonstrates the boundedness of the solution's variation by a linear function of the variation in the initial and boundary conditions. The case of a non-homogeneous porous medium is also examined.

Keywords: *Richards — Klute equation, stability, initial conditions, boundary conditions.*