https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.019
УДК 621.391:519.22

І.М. Яворський[1,2], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
Р.М. Юзефович[1,3], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
О.В. Личак[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів
[2] Бидгощська політехніка, Бидгощ, Польща
[3] Національний університет "Львівська політехніка", Львів
E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com, olehlychak2003@yahoo.com

Стохастичні моделі прихованих періодичностей та ефективні методи їх виявлення

Розглянуто методи виявлення прихованих періодичностей, які описуються періодично нестаціонарними випадковими процесами та шляхи підвищення їх ефективності. Проведено аналіз квазіоптимальних оцінок базових частот моментних функцій першого й другого порядків прихованих періодичностей випадкових процесів, що знаходяться як точки максимальних значень квадратичних функціоналів, які є асимптотичними наближеннями функціоналів найменших квадратів. З використанням методу малого параметра доведена середньоквадратична збіжність оцінок і в першому наближенні отримано залежності їх зміщень та дисперсій від довжини реалізації та коефіцієнтів Фур'є математичного сподівання й кореляційної функції.

Ключові слова: *приховані періодичності, періодично нестаціонарні випадкові сигнали, квазіоптимальні оцінки базових частот, середньоквадратична збіжність.*

Повторюваність і стохастичність є характерними рисами коливань, які зустрічаються у геофізиці, океанології, медицині, радіофізиці, технічній діагностиці тощо [1—9]. Їх називають стохастичними. Теорія й аналіз таких коливань базуються на моделях у вигляді періодично нестаціонарних випадкових процесів (ПНВП) та їх узагальнень – бі- та полі-ПНВП [4, 5, 8, 9]. ПНВП описують стохастичну повторюваність з одним періодом. Ці процеси представляються стохастичним рядом [3, 5, 9]:

$$\xi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k(t)e^{ik\omega_0 t}=\xi_0(t)+\sum_{k\in\mathbb{N}}[\xi_k^c(t)\cos k\omega_0 t+\xi_k^s(t)\sin k\omega_0 t], \tag{1}$$

Ц и т у в а н н я: Яворський І.М., Юзефович Р.М., Личак О.В. Стохастичні моделі прихованих періодичностей та ефективні методи їх виявлення. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 6. С. 19—32. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.019

де $\xi_0(t)$ і $\xi_k(t) = \frac{1}{2}[\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)]$ є стаціонарно зв'язаними випадковими процесами; $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$ — базова частота; P — період; $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел; $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел. З ряду (1) отримують окремі простіші моделі прихованих періодичностей, а саме: адитивну, мультиплікативну, адитивно-мультиплікативну, представлення Райса, полігармонічну, як теж два крайніх випадки — детерміновану періодичну функцію і стаціонарний випадковий процес.

Стохастичні властивості прихованих періодичностей у вигляді ПНВП визначаються стаціонарно зв'язаними випадковими процесами $\xi_k(t)$, які модулюють несучі гармоніки за амплітудою і фазою. Їх математичні сподівання, авто- та взаємокореляційні функції визначають коефіцієнти Фур'є математичного сподівання та кореляційної функції ПНВП:

$$m(t) = E\xi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t} = m_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (m_k^c \cos k\omega_0 t + m_k^s \sin k\omega_0 t), \tag{2}$$

$$R(t,\tau) = E\xi(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_k(\tau) e^{ik\omega_0 t} = R_0(\tau) + \sum_{k\in\mathbb{N}} [R_k^c(\tau)\cos k\omega_0 t + R_k^s(\tau)\sin k\omega_0 t]. \tag{3}$$

Тут E — оператор усереднення за розподілом, $m_k = E\xi_k(t)$, $R_k(\tau) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} R_{l-k,\,l}(\tau) e^{il\omega_0\tau}$, $R_{lk}(\tau) = E\overline{\overset{\circ}{\xi}_l(t)}\overset{\circ}{\xi}_k(t+\tau)$, $\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_k$, "$-$" — знак спряження, а також $m_k = \frac{1}{2}(m_k^c - im_k^s)$, $R_k(\tau) = \frac{1}{2}[R_k^c(\tau) - iR_k^s(\tau)]$ $\forall k \neq 0$. Коефіцієнти Фур'є кореляційної функції називають кореляційними компонентами [1, 3, 9]. З формули (3) випливає, що періодичні зміни кореляційної функції за часом є результатом корельованості модуляцій гармонік різного порядку у гармонічному представленні (1). Нульовий кореляційний компонент $R_0(\tau)$ визначається автокореляціями модуляцій і має всі властивості кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу. Тому його називають кореляційною функцією стаціонарного наближення ПНВП [3, 9]. Його перетворення Фур'є

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

є спектральною густиною потужності стаціонарного наближення ПНВП. Коли спектри модуляцій є вузькосмуговими, то спектральна густина має гребінчасту форму. Точки пікових значень $\omega_n^{(k)}$ у випадках, коли спектри модуляцій належать до інтервалу $[-\omega_0, \omega_0]$, мало відрізняються від $k\omega_0$, $k \in \mathbb{Z}$. При зміщенні спектрів за границі цього інтервалу різниці між піковими значеннями $\omega_n^{(k)}$ і частотами $k\omega_0$ стають істотними, а при високочастотній модуляції вони взагалі переміщаються у високочастотну область. Це означає, що пошук прихованих періодичностей другого порядку неможливий у рамках стаціонарного наближення. Тому для розв'язування цієї задачі використовуються перетворення, які селективні до періодичних змін моментних функцій за часом [10—16].

Першою процедурою, яка була запропонована для виявлення періодичностей вважають схему Бюй—Балло[17]. Теоретичний аналіз статистичних властивостей оцінок періоду, отриманих за допомогою цієї схеми та її узагальнення на випадок ПНВП-моделі, подано у роботах [10, 14, 15]. Оцінки періоду знаходяться як точки екстремальних значень перетворень, які подібні до когерентних статистик для обчислення математичного сподівання й кореляційної функції з тією різницею, що замість дійсного періоду використовується деяка пробна величина. Оцінка періоду знаходиться як точка екстремальних значень цих перетворень відносно тестового періоду. Показано, що порядок збіжності в середньому є $O(T^{-2})$, де T — довжина реалізації, а в середньоквадратичному — $O(T^{-3})$. Когерентні перетворення в точках екстремумів мають значення, які близькі до значень в цих точках математичного сподівання чи кореляційної функції ПНВП. Якщо ми використовуємо для оцінювання періоду компонентні статистики, то в точках екстремумів отримуємо значення коефіцієнтів Фур'є рядів (2) і (3) [11,13,15]. Очевидно, що ефективність виявлення прихованих періодичностей залежить від цих екстремальних значень. Використання методу найменших квадратів (НК) дає можливість підвищити цю ефективність [16]. Екстремальні значення НК-статистик близькі до сумарної потужності гармонік математичного сподівання чи кореляційної функції, вибраних для оцінки їх базових частот. Однак для обчислення цих статистик потрібно розв'язувати систему лінійних рівнянь, яка може мати велику розмірність. Це утруднює практичне застосування НК-методу у випадках, коли математичне сподівання чи кореляційна функція містять велику кількість гармонік. У даній роботі проведено аналіз оцінок базової частоти, що отримуються за допомогою спрощених функціоналів, в яких НК-оцінки коефіцієнтів Фур'є тригонометричних поліномів для математичного сподівання чи кореляційної функції обчислюються з використанням компонентних статистик [18]. Як було показано в [19], зміщення й дисперсії оцінок НК математичного сподівання та кореляційної функції і їх компонентних оцінок все менше відрізняються між собою при збільшенні довжини реалізації.

НК-оцінювання базової частоти математичного сподівання ПНВП зводиться до знаходження точки максимуму функціоналу [16]:

$$\hat{F}_1(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \hat{m}^2(\omega, t)\,dt\,. \tag{4}$$

Тут

$$\hat{m}(\omega, t) = \sum_{k=1}^{L_1} [\hat{m}_k^c(\omega)\cos k\omega t + \hat{m}_k^s(\omega)\sin k\omega t]\,, \tag{5}$$

де L_1 — число вибраних гармонік; функції $\hat{m}_k^c(\omega)$ і $\hat{m}_k^s(\omega)$ — розв'язки матричного рівняння

$$\mathbf{M}(\omega)\hat{\mathbf{m}}(\omega) = \tilde{\mathbf{m}}(\omega)\,,$$

де

$$\tilde{\mathbf{m}}(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi(t)\mathbf{e}(\omega, t)\,dt\,,$$

$\mathbf{M}(\omega)$ є симетричною матрицею:

$$\mathbf{M}(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbf{e}(\omega, t)\mathbf{e}^{tr}(\omega, t)\,dt\,,$$

а $\hat{\mathbf{m}}(\omega)$ і $\mathbf{e}(\omega, t)$ є матрицями-стовпцями:

$$\hat{\mathbf{m}}(\omega) = (\hat{m}_1^c(\omega), \ldots \hat{m}_{L_1}^c(\omega), \ldots \hat{m}_1^s(\omega), \ldots \hat{m}_{L_1}^s(\omega))^{tr},$$

$$\mathbf{e}(\omega, t) = (\cos\omega t, \ldots, \cos L_1\omega t, \sin\omega t, \ldots, \sin L_1\omega t)^{tr}.$$

Тут верхній індекс $(\bullet)^{tr}$ означає транспонування. Підставимо у функціонал (4) замість НК-оцінки математичного сподівання (5) його компонентну оцінку, коли невідомі функції $\hat{m}_k^c(\omega)$ і $\hat{m}_k^s(\omega)$ знаходиться за формулами:

$$\begin{Bmatrix} \hat{m}_k^c(\omega) \\ \hat{m}_k^s(\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \xi(s) \begin{Bmatrix} \cos k\omega s \\ \sin k\omega s \end{Bmatrix} ds. \tag{6}$$

Після усереднення за часом для великих T маємо:

$$\hat{F}_1(\omega) \approx \hat{Q}_1(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_1} [[\hat{m}_k^c(\omega)]^2 + [\hat{m}_k^s(\omega)]^2]. \tag{7}$$

Проведемо аналіз властивостей функціоналу (7). Для математичних сподівань статистик (6)

$$C_k(\omega) = E\hat{m}_k^c(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} m(s)\cos k\omega s ds,$$

$$S_k(\omega) = E\hat{m}_k^s(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} m(s)\sin k\omega s ds$$

в інтервалі $\omega \in \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{3\omega_0}{2}\right]$ отримуємо:

$$\lim_{T\to\infty} C_k(\omega) = \begin{cases} m_k^c, \ \omega = \omega_0, \\ 0, \quad \omega \neq \omega_0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\lim_{T\to\infty} S_k(\omega) = \begin{cases} m_k^s, \ \omega = \omega_0, \\ 0, \quad \omega \neq \omega_0. \end{cases} \tag{9}$$

Середньоквадратичні значення флуктуаційних складових

$$\hat{M}_k(\omega) = \hat{m}_k^c(\omega) - C_k(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \overset{\circ}{\xi}(s)\cos k\omega s ds,$$

$$\hat{N}_k(\omega) = \hat{m}_k^s(\omega) - S_k(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \overset{\circ}{\xi}(s)\sin k\omega s ds$$

визначаються співвідношеннями:

$$E[\hat{M}_k(\omega)]^2 = \frac{2}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)[2R_0(u)\cos k\omega u + R_k^c(u)\cos k\omega u - R_k^s(u)\sin k\omega u]du\,, \tag{10}$$

$$E[\hat{N}_k(\omega)]^2 = \frac{2}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)[2R_0(u)\cos k\omega_0 u - R_k^c(u)\cos k\omega u + R_k^s(u)\sin k\omega u]du\,. \tag{11}$$

Теорема 1. *Якщо кореляційна функція $R(t,\tau)$ загасає до нуля зі зростанням зсуву τ, тобто*

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R(t,\tau)=0 \ \text{чи} \ \lim_{|\tau|\to\infty} R_k(\tau)=0 \ \forall \quad k\in[0,2L_1]\,, \tag{12}$$

то $E[\hat{M}_k(\omega)]^2 \to 0$ і $E[\hat{N}_k(\omega)]^2 \to 0$, якщо $T\to 0$, а значення функціоналу $Q_1(\omega)$ для $\omega=\omega_0$ збігається в середньому до величини $P_t^{(d)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_1}[(m_k^c)^2+(m_k^s)^2]$, яка визначає усереднену за часом потужність детермінованих коливань і прямує до нуля для $\omega\neq\omega_0$ і $\omega\in\left[\frac{\omega_0}{2},\frac{3\omega_0}{2}\right]$, тобто

$$\lim_{T\to\infty} Q_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_1}[(m_k^c)^2+(m_k^s)^2], & \omega=\omega_0, \\ 0, & \omega\neq\omega_0 \wedge \omega\in\left[\frac{\omega_0}{2},\frac{3\omega_0}{2}\right]. \end{cases} \tag{13}$$

Доведення. З умови (12) випливає, що

$$\left|\int_0^{2T} R_k(\tau)\begin{Bmatrix}\cos k\omega\tau \\ \sin k\omega\tau\end{Bmatrix}d\tau\right| \sim \mathrm{O}(T^{\alpha})\,,$$

де $\alpha<1$. Тоді для дисперсій (8) і (9) маємо:

$$\lim_{T\to\infty} E[\hat{M}_k(\omega)]^2 = 0\,, \tag{14}$$

$$\lim_{T\to\infty} E[\hat{N}_k(\omega)]^2 = 0\,. \tag{15}$$

Представляючи статистики (6) у вигляді:

$$\hat{m}_k^c(\omega) = C_k(\omega) + \hat{N}_k(\omega)\,, \quad \hat{m}_k^s(\omega) = S_k(\omega) + \hat{M}_k(\omega)\,,$$

для математичного сподівання функціоналу (7) отримуємо:

$$E\hat{Q}_1(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_1}[[C_k(\omega)]^2+E[\hat{M}_k(\omega)]^2+[S_k(\omega)]^2+E[\hat{N}_k(\omega)]^2].$$

Прийнявши до уваги граничні рівності (8)—(9) і (14)—(15), приходимо до формули (13). Теорема доведена.

Теорема 2. *Якщо для гауссового ПНВП виконується умова (12), то статистика (7) в середньоквадратичному збігається до* $P_t^{(d)}$, *якщо* $\omega=\omega_0$, *і прямує до нуля для інших* $\omega\in\left[\frac{\omega_0}{2},\frac{3\omega_0}{2}\right]$, *тобто*

$$\lim_{T\to\infty}[E[\hat{Q}_1(\omega)]^2-[E\hat{Q}_1(\omega)]^2]=0.$$

Доведення. Квадрат статистики $Q_1(\omega)$ має вигляд:

$$\hat{Q}_1^2(\omega)=\sum_{k,\,l=1}^{L_1}[[\hat{m}_k^c(\omega)]^2[\hat{m}_l^c(\omega)]^2+2[\hat{m}_k^c(\omega)]^2[\hat{m}_l^s(\omega)]^2+[\hat{m}_k^s(\omega)]^2[\hat{m}_l^s(\omega)]^2].$$

Математичне сподівання кожної складової цього виразу в асимптотиці дорівнює:

$$\lim_{T\to\infty}E\{[\hat{m}_k^c(\omega)]^2[\hat{m}_l^c(\omega)]^2\}=\lim_{T\to\infty}[C_k(\omega)]^2[C_l(\omega)]^2,$$

$$\lim_{T\to\infty}E\{[\hat{m}_k^c(\omega)]^2[\hat{m}_l^s(\omega)]^2\}=\lim_{T\to\infty}[C_k(\omega)]^2[S_l(\omega)]^2,$$

$$\lim_{T\to\infty}E\{[\hat{m}_k^s(\omega)]^2[\hat{m}_l^s(\omega)]^2\}=\lim_{T\to\infty}[S_k(\omega)]^2[S_l(\omega)]^2.$$

Звідси

$$\lim_{T\to\infty}E\hat{Q}_1^2(\omega)=\lim_{T\to\infty}[E\hat{Q}_1(\omega)]^2,$$

а це означає, що гранична рівність є справедливою. Теорему доведено.

Встановлені властивості перетворення (7) дають підставу розглядати точку його максимуму як оцінку базової частини ω_0, яка є розв’язком нелінійного рівняння:

$$\sum_{k=1}^{L_1}\left[\hat{m}_k^c(\omega)\frac{d\hat{m}_k^c(\omega)}{d\omega}+\hat{m}_k^s(\omega)\frac{d\hat{m}_k^s(\omega)}{d\omega}\right]=0. \tag{16}$$

Щоб дослідити статистичні властивості цієї оцінки, представимо її у вигляді степеневого ряду за малим параметром γ_1:

$$\hat{\omega}_0=\omega_0+\mathrm{A}\omega+\gamma_1\omega_1+\gamma_1^2\omega_2+\gamma_1^3\omega_3+\ldots, \tag{17}$$

де $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ є послідовними наближеннями. Ми виберемо малий параметр γ_1 у вигляді відношення:

$$\gamma_1 = \left[\frac{D_t\,[\hat{m}(t)]}{P_t^{(d)}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

де $D_t\,[\hat{m}(t)]$ — усереднена за часом дисперсія компонентної оцінки математичного сподівання при $\omega = \omega_0$, яка дорівнює [18]:

$$D_t\,[\hat{m}(t)] = 2\sum_{k=1}^{L_1} D[\hat{m}_k],$$

при цьому

$$D[\hat{m}_k] = \frac{4}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{u}{2T}\right) R_0\,(u) \cos k\omega_0 u du,$$

Якщо виконується умова (12), то $\gamma_1 \to 0$, коли $T \to \infty$.

Введемо в рівнянні (16) нормовані детерміновану й стохастичну складові:

$$\tilde{C}_k\,(\omega) = \frac{C_k\,(\omega)}{[P_t^{(d)}]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{S}_k\,(\omega) = \frac{S_k\,(\omega)}{[{}_t^{(d)}]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\tilde{M}_k\,(\omega) = \frac{M_k\,(\omega)}{[D_t\,[\hat{m}(t)]]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{N}_k\,(\omega) = \frac{N_k\,(\omega)}{[D_t\,[\hat{m}(t)]]^{\frac{1}{2}}}$$

і перепишемо його у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{L_1}\left[\begin{array}{l} [\tilde{C}_k\,(\omega) + \gamma_1 \tilde{M}_k\,(\omega)]\left[\dfrac{d\tilde{C}_k\,(\omega)}{d\omega} + \gamma_1 \dfrac{d\tilde{M}_k\,(\omega)}{d\omega}\right] + \\ + [\tilde{S}_k\,(\omega) + \gamma_1 \tilde{N}_k\,(\omega)]\left[\dfrac{d\tilde{S}_k\,(\omega)}{d\omega} + \gamma_1 \dfrac{d\tilde{N}_k\,(\omega)}{d\omega}\right] \end{array}\right] = 0. \qquad (18)$$

Введемо позначення

$$\tilde{n}_k^{(l)} = \left[\frac{d^l \tilde{C}_k\,(\omega)}{d\omega^l}\right]_{\omega=\omega_0}, \quad s_k^{(l)} = \left[\frac{d^l \tilde{S}_k\,(\omega)}{d\omega^l}\right]_{\omega=\omega_0},$$

$$m_k^{(l)} = \left[\frac{d^l \tilde{M}_k\,(\omega)}{d\omega^l}\right]_{\omega=\omega_0}, \quad n_k^{(l)} = \left[\frac{d^l \tilde{N}_k\,(\omega)}{d\omega^l}\right]_{\omega=\omega_0}$$

і розкладемо ліву частину рівняння (18) в ряд Тейлора в околі точки $\omega = \omega_0$. Підставляючи в отримане співвідношення степеневий ряд (17) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, отримуємо вирази для невідомих наближень $\Delta\omega, \omega_1, \omega_2 \dots$ У першому наближенні знаходимо:

$$\Delta\omega = \frac{1}{p(T)} \sum_{k=1}^{L_1} (c_k^{(0)} c_k^{(1)} + s_k^{(0)} s_k^{(1)}), \tag{19}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{p(T)} \sum_{k=1}^{L_1} \left[\begin{array}{l} c_k^{(0)} m_k^{(1)} + s_k^{(0)} n_k^{(1)} + s_k^{(1)} n_k^{(0)} + c_k^{(1)} m_k^{(0)} + \\ + \Delta\omega (2 c_k^{(1)} m_k^{(1)} + c_k^{(0)} m_k^{(2)} + c_k^{(2)} m_k^{(0)} + s_k^{(0)} n_k^{(2)} + s_k^{(2)} n_k^{(0)}) \end{array} \right], \tag{20}$$

де

$$p(T) = \sum_{k=1}^{L_1} [(c_k^{(1)})^2 + (s_1^{(1)})^2 + c_k^{(0)} c_k^{(2)} + s_1^{(0)} s_1^{(2)}].$$

Теорема 3. *Якщо виконується умова (12), то точка максимуму функціоналу (7) для гауссових ПНВП є асимптотично незміщеною та слушною оцінкою базової частоти математичного сподівання, а для скінченої довжини реалізації її зміщення* $\varepsilon[\hat{\omega}_0] = \mathrm{E}\hat{\omega}_0 - \omega_0$ *і дисперсія* $D[\hat{\omega}_0] = \mathrm{E}\hat{\omega}_0^2 - [\mathrm{E}\hat{\omega}_0]^2$ *в першому наближенні визначаються формулами:*

$$\varepsilon[\hat{\omega}_0] = \frac{3}{T^2 \sum_{k=1}^{L_1} k^2 [(m_k^c)^2 + (m_k^s)^2]} \sum_{k,l=1}^{L_1} \left[\begin{array}{l} m_k^c m_k^s [I_1[(l-k)\omega_0 T] + I_1[(l+k)\omega_0 T]] - \\ - m_k^s m_k^s [I_1[(l-k)\omega_0 T] + I_1[(l+k)\omega_0 T]] \end{array} \right] + \hat{\imath}\,(T^{-3}), \tag{21}$$

$$D[\hat{\omega}_0] = \frac{3}{2T^3 \left[\sum_{k=1}^{L_1} k^2 [(m_k^c)^2 + (m_k^s)^2] \right]^2} \times$$

$$\times \sum_{k,\,l=1}^{L_1} kl \int_0^{2T} [m_k^c m_l^c [R_{k+l}^s(u)(\sin k\omega_0 u + \sin l\omega_0 u) + R_{k-l}^s(u)(\sin k\omega_0 u - \sin l\omega_0 u) +$$

$$+ [R_{k-l}^s(u) - R_{k-l}^c(u)](\cos k\omega_0 u + \cos l\omega_0 u)] +$$

$$+ m_k^s m_l^s [R_{k-l}^s(u)(\sin k\omega_0 u - \sin l\omega_0 u) - R_{k+l}^s(u)(\sin k\omega_0 u + \sin l\omega_0 u) +$$

$$+ [R_{k+l}^c(u) + R_{k-l}^c(u)](\cos k\omega_0 u + \cos l\omega_0 u)] -$$

$$- 2 m_k^c m_l^s [R_{l+k}^c(u)(\sin k\omega_0 u + \sin l\omega_0 u) + R_{l-k}^c(u)(\sin l\omega_0 u - \sin k\omega_0 u) +$$

$$+ [R_{k+l}^s(u) + R_l^s(u)](\cos k\omega_0 u + \cos l\omega_0 u)]] du + \mathrm{o}\,(T^{-3}), \tag{22}$$

де $I_1(\omega, T) = \dfrac{\sin\omega T}{\omega^2 T} - \dfrac{\cos\omega T}{\omega} \quad \forall\,\omega \neq 0$.

Доведення. Оскільки $Em_k^{(l)} = 0$ і $En_k^{(l)} = 0$, то зміщення в першому наближенні визначається виразом (19). Використовуючи рівності

$$c_k^{(p)} = k^p T^{-1} [P_t^{(d)}]^{-\frac{1}{2}} \int_{-T}^{T} t^p m(t) \cos k\omega_0 t dt,$$

$$s_k^{(p)} = k^p T^{-1} [P_t^{(d)}]^{-\frac{1}{2}} \int_{-T}^{T} t^p m(t) \sin k\omega_0 t dt,$$

після перетворень приходимо до формули (21).

Прийнявши до уваги (20), для дисперсії в першому наближенні маємо

$$D[\hat{\omega}_0] = \frac{\gamma_1^2}{p^2(T)} \sum_{k,\, l=1}^{L_1} [c_k^{(0)} c_l^{(0)} \mathrm{E} m_k^{(1)} m_l^{(1)} + s_k^{(0)} s_l^{(0)} \mathrm{E} n_k^{(1)} n_l^{(1)} + 2 c_k^{(0)} s_l^{(0)} \mathrm{E} \hat{m}_k^{(1)} n_l^{(1)}].$$

Кореляції $\mathrm{E} m_k^{(1)} m_l^{(1)}$, $\mathrm{E} n_k^{(1)} n_l^{(1)}$ і $\mathrm{E} m_k^{(1)} n_l^{(1)}$ визначаються подвійними інтегралами, що мають вигляд

$$I_2 = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^{T} \int_{T}^{T} ts R(t, s-t) \begin{Bmatrix} \cos k\omega_0 s \ \cos l\omega_0 t \\ \sin k\omega_0 s \ \ \sin l\omega_0 t \end{Bmatrix} dtds.$$

Після спрощення цих інтегралів отримуємо формулу (22). При виконанні умови (12) зміщення (21) і дисперсія (22) прямують до нуля при $T \to \infty$, тобто оцінка базової частоти (17) є асимпототично незміщеною та слушною. Теорему доведено.

Оцінювання базової частоти кореляційної функції методом НК зводиться до пошуку точки максимуму функціоналу [16]

$$\hat{F}_2(\omega, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \hat{R}^2(\omega, t, \tau) dt, \tag{23}$$

де $\hat{R}(\omega, t, \tau)$ — оцінка НК кореляційної функції. Підставимо у вираз (23) замість цієї оцінки компонентну:

$$\hat{R}(\omega, t, \tau) = \sum_{k=1}^{L_2} [\hat{R}_k^c(\omega, \tau) \cos k\omega t + \hat{R}_k^s(\omega, \tau) \sin k\omega t],$$

де

$$\begin{Bmatrix} \hat{R}_k^c(\omega, \tau) \\ \hat{R}_k^s(\omega, \tau) \end{Bmatrix} = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \eta(s, \tau) \begin{Bmatrix} \cos k\omega s \\ \sin k\omega s \end{Bmatrix} ds, \tag{24}$$

$\eta(s,\tau)=\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\xi}(s+\tau)$ і L_2 — число гармонік кореляційної функції. Після усереднення за часом маємо:

$$\hat{F}_2(\omega,\tau)\approx\hat{Q}_2(\omega,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_2}[[\hat{R}_k^c(\omega,\tau)]^2+[\hat{R}_k^s(\omega,\tau)]^2]. \quad (25)$$

Величина (25) в точці $\omega=\omega_0$ визначає потужність часових змін кореляційної функції $P_t^{(s)}=Q_2(\omega_0,\tau)$.

Детерміновані складові статистик (24) мають вигляд

$$C_k(\omega,\tau)=\mathrm{E}\hat{R}_k^c(\omega,\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}R(s,\tau)\cos k\omega s ds, \quad (26)$$

$$S_k(\omega,\tau)=\mathrm{E}\hat{R}_k^s(\omega,\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}R(s,\tau)\sin k\omega s ds, \quad (27)$$

а флуктуаційні складові визначаються виразами:

$$\hat{N}_k(\omega,\tau)=\hat{R}_k^c(\omega,\tau)-C_k(\omega,\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\overset{\circ}{\eta}(s,\tau)\cos k\omega s ds, \quad (28)$$

$$\hat{M}_k(\omega,\tau)=\hat{R}_k^s(\omega,\tau)-S_k(\omega,\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\overset{\circ}{\eta}(s,\tau)\sin k\omega s ds, \quad (29)$$

де $\overset{\circ}{\eta}(s,\tau)=\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\xi}(s+\tau)-R(s,\tau)$. Для середньоквадратичних значень величин (28) і (29) знаходимо:

$$\mathrm{E}\hat{M}_k^2(\omega,\tau)=\frac{2}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)[2\tilde{R}_0(u,\tau)\cos k\omega_0 u+\tilde{R}_k^c(u,\tau)\cos k\omega u-\tilde{R}_k^s(u,\tau)\sin k\omega u]du, \quad (30)$$

$$\mathrm{E}\hat{N}_k^2(\omega,\tau)=\frac{2}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)[2\tilde{R}_0(u,\tau)\cos k\omega_0 u-\tilde{R}_k^c(u,\tau)\cos k\omega u+\tilde{R}_k^s(u,\tau)\sin k\omega u]du, \quad (31)$$

де $\tilde{R}_0(u,\tau)$ і $\tilde{R}_k^{c,s}(u,\tau)$ — коефіцієнти Фур'є кореляційної функції $R_\eta(t,u,\tau)=$ $=\mathrm{E}\overset{\circ}{\eta}(t,\tau)\overset{\circ}{\eta}(t+u,\tau)$. Для гауссових ПНВП $\mathrm{E}M_k^2(\omega,\tau)\to 0$ і $\mathrm{E}N_k^2(\omega,\tau)\to 0$ при $T\to\infty$, якщо виконується умова (12).

Асимптотичні властивості функціоналу (25) визначаються наведеними нижче теоремами 4 і 5, доведення яких подібне до теореми 1 і 2.

Теорема 4. *Якщо виконується умова (12), то дисперсії (28) і (29) для гауссових ПНВП прямують до нуля при $T\to\infty$, а значення $Q_2(\omega,\tau)$ для $\omega=\omega_0$ збігаються в середньому до усередненої за часом потужності часових змін кореляційної функції та прямують до нуля* *для інших* $\omega \in \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{3\omega_0}{2}\right]$, *тобто*

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\hat{Q}_2(\omega,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2L}[[R_k^c(\tau)]^2 + [R_k^s(\tau)]^2],\ \omega=\omega_0, \\ 0, \qquad \omega\neq\omega_0 \wedge \omega\in\left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{3\omega_0}{2}\right]. \end{cases}$$

Теорема 5. *Якщо виконується умова (12), то статистика (25) гауссового ПНВП збігається до* $P_t^{(s)}$, *якщо* $\omega=\omega_0$ *і прямує до нуля для інших* $\omega \in \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{3\omega_0}{2}\right]$, *тобто*

$$\lim_{T\to\infty} D[\hat{Q}_2(\omega,\tau)] = 0 .$$

Встановлені властивості функціоналу (25) дають підставу розглядати точку його максимуму як оцінку базової частоти кореляційної функції. Така оцінка є розв'язком нелінійного рівняння

$$\sum_{k=1}^{L_2}\left[\hat{R}_k^c(\omega,\tau)\frac{\partial \hat{R}_k^c(\omega,\tau)}{\partial\omega} + \hat{R}_k^s(\omega,\tau)\frac{\partial \hat{R}_k^s(\omega,\tau)}{\partial\omega}\right] = 0 . \qquad (32)$$

Цей розв'язок будемо шукати у вигляді степеневого ряду за малим параметром, який тепер виберемо у вигляді

$$\gamma_2 = \frac{[D_t[\hat{R}(t,\tau)]]^{\frac{1}{2}}}{[P_t^{(s)}]^{\frac{1}{2}}},$$

де $D_t[\hat{R}(t,\tau)]$ — усереднена за часом дисперсія компонентної оцінки кореляційної функції при $\omega=\omega_0$:

$$D_t[\hat{R}(t,\tau)] = D[\hat{R}_0(\tau)] + 2\sum_{k=1}^{L_2} D[\hat{R}_k(\tau)],$$

при цьому

$$D[\hat{R}_k(\tau)] = \frac{4}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)\tilde{R}_0(u,\tau)\cos k\omega_0 u\,du .$$

Після переходу в рівнянні (32) до нормованих величин, розкладу його лівої частини у ряд Тейлора в околі точки $\omega=\omega_0$ та виконання перетворень, які аналогічні до проведених вище, отримаємо формули для наближень, які співпадають з (21) і (22). Тільки тепер величини, що входять до цих рівнянь, є похідними нормованих детермінованих (26)і (27) та флуктуаційних (28) і (29) складових. Виходячи з таких міркувань, можемо сформулювати наслідок теореми 3.

Наслідок. *Якщо виконується умова (12), то значення частоти* ω, *при якому функціонал (25) набуває максимального значення, є для гауссового ПНВП асимптотично незміщеною та слушною оцінкою базової частоти кореляційної функції, а для скінчених реалізацій зміщення оцінки та її дисперсія мають вигляд:*

$$\varepsilon[\hat{\omega}_0] = \frac{3}{T^2 \sum\limits_{k=1}^{2L} k^2 [[R_k^c(\tau)]^2 + [R_k^s(\tau)]^2]} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{2L} k [R_k^c(\tau) \sum_{l=1}^{2L} R_l^c(\tau) [I_1[(1-k)\omega_0, T] + I_1[(1-h)\omega_0, T]] -$$

$$-R_k^s(\tau) \sum_{l=1}^{2L} R_l^s(\tau) [I_1[(1-k)\omega_0, T] + I_1[(1+k)\omega_0, T]]] + o(T^{-2}). \tag{33}$$

$$D[\hat{\omega}_0] = \frac{3}{2T^3 \left[\sum\limits_{k=1}^{2L} k^2 [[R_k^c(\tau)]^2 + [R_k^s(\tau)]^2] \right]^2} \times$$

$$\times \sum_{k,\, l=1}^{2L} kl \int_0^{2T} [R_k^c(\tau) R_l^c(\tau) [\tilde{R}_{l+k}^s(u,\tau)(\sin k\omega_0 u + \sin l\omega_0 u) + \tilde{R}_{k-l}^s(u,\tau)(\sin k\omega_0 u - \sin l\omega_0 u) +$$

$$+[\tilde{R}_{k-l}^c(u,\tau) - \tilde{R}_{k+l}^c(u,\tau)(\cos k\omega_0 u + \cos l\omega_0 u)]] + R_k^s(\tau) R_l^s(\tau) \times$$

$$\times [\tilde{R}_{k-1}^s(u)(\sin k\omega_0 u - \sin l\omega_0 u) - \tilde{R}_{k-2}^c(u)(\sin k\omega_0 u + \sin l\omega_0 u) +$$

$$+[\tilde{R}_{k+l}^c(u,\tau) + \tilde{R}_{k-l}^c(u)](\cos k\omega_0 u + \cos l\omega_0 u)] -$$

$$-2R_k^c(\tau) R_k^s(\tau) [\tilde{R}_{l+k}^c(u,\tau)(\sin k\omega_0 u + \sin l\omega_0 u) + \tilde{R}_{l-k}^c(u,\tau)(\sin l\omega_0 u - \sin k\omega_0 u) +$$

$$+[\tilde{R}_{k+l}^s(u,\tau) + \tilde{R}_{l-k}^s(u,\tau)](\cos k\omega_0 u + \cos l\omega_0 u)] du + o(T^{-3}). \tag{34}$$

Отримані вище результати теоретично обґрунтовують можливості використання функціоналів (7) і (25) для обчислення базової частоти математичного сподівання та кореляційної функції ПНВП. Ці оцінки мають високий порядок збіжності, який не відрізняється від оцінок найменших квадратів.

Виведені формули (21) і (20) та (33) і (34) характеризують похибки оцінювання в залежності від довжини реалізації та параметрів, що описують структуру процесу. На їх підставі можуть бути обчислені систематична й середньоквадратична похибки оцінювання та вибрані її параметри статистичної обробки реалізації, які забезпечують їх потрібну величину.

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2023. No 6

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Драган Я.П., Яворский И.Н. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы. Киев: Наук. думка, 1982. 248 с.
2. Gardner W.A. Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems. NewYork: Macmillan, 1985. 496 p.
3. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1987. 320 с.
4. Gardner W.A. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing. NewYork: IEEE Press, 1994. 504 p.
5. Hard H.L., Miamee A. Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. NewYork: Wiley, 2007. 384 p.
6. Antoni J. Cyclostationarity by examples. *Mech. Syst. Signal Process.* 2009. **23**, № 4. P. 987—1036. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.10.010
7. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Kravets I. The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. *Applied Condition Monitoring.* 2015. **3**. P. 55—88. https://doi.org/10.1007/987-3-319-163330-7_4
8. Napolitano A. Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Elsevier, AcademicPress, 2020. 626 p.
9. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. Львів: ФМІ НАН України, 2013. 802 p.
10. Javorskyj I. Application of Buys-Ballot scheme in statistical analysis of rhythmic signal. *Radioelectron. Commun. Syst*. 1984. **27**, № 11. P. 403—417.
11. Javorskyj I. Statistical analysis of periodically correlated random processes. *J. Commun. Technol. Electron.* 1985. **30**, № 10. P. 21—29.
12. Javorskyj I., Mykhailyshyn V. Probabilistic models and investigation of hidden periodicities. *Appl. Math. Lett.* 1996. **9**, № 2. P. 21—23. https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00005-5
13. Javorskyj I., Dehay D., Kravets I. Component statistical analysis of second order hidden periodicities. *Digit. Signal Process.* 2014. **26**. P. 50—70. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2013.12.002
14. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z., Majewski J. Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationarity period. *Digit. Signal Process.* 2017. **65**. P. 27—51. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2017.02.013
15. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z., Majewski J. Covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationarity period. *Advances in Signal Processing: Reviews.* Ed. Sergey Y. Yurish. Barselona: International Frequency Sensor Association Publishing, 2018. P. 155—276.
16. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z. The least square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals. *Digit. Signal Process.* 2022. **122**. Article number:103333. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103333
17. Buys Ballot C.H.D. Leo Claemert Periodiques de Temperature. Kemintet Fills, Utrecht, 1847.
18. Javorskyj I, Isayev I, Majewski J, Yuzefovych R. Component covariance analysis for periodically correlated random processes. *Signal Process*. 2010. **90**, № 4. P. 1083—1102. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.07.031
19. Javorskyy I. Yuzefovych R., Kravets I., Zakrzewski Z. Least squares method in the statistic analysis of periodically correlated random processes. *Radioelectron. Commun. Syst.* 2011. **54**, № 1. P. 45—59. https://doi.org/10.3103/S0735272711010079

Надійшло до редакції 25.09.2023

REFERENCES

1. Dragan, Ya. & Yavorsky, I. (1982). Rhytmics of Sea Waving and Underwater Acoustic Signals. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
2. Gardner, W. A. (1985). Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems. NewYork: Macmillan.
3. Dragan, Ya., Yavorskyj, I. & Rozhkov, V. (1987). Methods of probabilistic analysis of oceanological rhytmics. Leningrad: Gidrometeoizdat (in Russian).
4. Gardner, W. A. (1994). Cyclostationarity in Communications and Signal Processing. NewYork: IEEE Press.
5. Hard, H. L. & Miamee, A. (2007). Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. NewYork: Wiley.

6. Antoni, J. (2009). Cyclostationarity by examples. Mech. Syst. Signal Process., 23, No. 4, pp. 987-1036. https://doi:10.1016/j.ymssp.2008.10.010
7. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I. & Kravets, I. (2015). The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. Applied Condition Monitoring, 3, pp. 55-88. https://doi.org/10.1007/987-3-319-163330-7_4
8. Napolitano, A. (2020). Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Elsevier: AcademicPress.
9. Javorskyj, I. (2013). Mathematical models and analysis of stochastic oscillations. Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute (in Ukrainian).
10. Javorskyj, I. (1984). Application of Buys-Ballot scheme in statistical analysis of rhythmic signal. Radioelectron. Commun. Syst., 27, No. 11, pp. 403-417.
11. Javorskyj, I. (1985). Statistical analysis of periodically correlated random processes. J. Commun. Technol. Electron., 30, No. 10, pp. 21-29.
12. Javorskyj, I. & Mykhailyshyn, V. (1996). Probabilistic models and investigation of hidden periodicities. Appl. Math. Lett., 9, No. 2, pp. 21-23. https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00005-5
13. Javorskyj, I., Dehay, D. & Kravets, I. (2014). Component statistical analysis of second order hidden periodicities. Digit. Signal Process, 26, pp. 50-70. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2013.12.002
14. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I., Zakrzewski, Z. & Majewski, J. (2017). Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationarity period. Digit. Signal Process, 65, pp. 27-51. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2017.02.013
15. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I., Zakrzewski, Z. & Majewski, J. (2018). Covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationarity period. Advances in Signal Processing: Reviews. Ed. Sergey Y. Yurish. Barselona: International Frequency Sensor Association Publishing, pp. 155-276.
16. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I. & Zakrzewski, Z. (2022). The least square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals. Digit. Signal Process, 122, Article number: 103333. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103333
17. Buys Ballot, C.H.D. (1847). Leo Claemert Periodiques de Temperature. Kemintet Fills, Utrecht.
18. Javorskyj, I., Isayev, I., Majewski, J. & Yuzefovych, R. (2010). Component covariance analysis for periodically correlated random processes. Signal Process, 90, No. 4, pp. 1083-1102. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.07.031
19. Javorskyy, I., Yuzefovych, R., Kravets, I. & Zakrzewski, Z. (2011). Least squares method in the statistic analysis of periodically correlated random processes. Radioelectron. Commun. Syst., 54, No. 1, pp. 45-59. https://doi.org/10.3103/S0735272711010079

Received 25.09.2023

I.M. Javorskyj[1, 2], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
R.M. Yuzefovych[1, 3], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
O.V. Lychak[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv

[2] UTP University of Sciences and Technology, Bydgoszcz, Poland

[3] Lviv Polytechnic National University, Lviv

E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com, olehlychak2003@yahoo.com

STOCHASTIC MODELS OF HIDDEN PERIODICITIES AND EFFECTIVE METHODS FOR THEIR DISCOVERY

The methods for discovering hidden periodicities described by periodically non-stationary random processes (PNRP) and the ways to improve their efficiency are considered. The analysis of quasi-optimal estimators for basic frequencies of the first and second-order PNRP moment functions is carried out. These estimators are found as maximum points of the quadratic functional that serves as an asymptotic approximation of the least square functional. Convergences in the mean square of the estimators using the small parameter method are proven, and dependencies of their biases and variances on the realization length and Fourier coefficients of the mean and covariance functions are obtained at the first approximation.

Keywords: *hidden periodicities, periodically non-stationary random processes, quasi-optimal estimators of basic frequencies, convergences in the mean square.*