https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.02.003
УДК 517.9

І.М. Александрович[1], https://orcid.org/0000-0002-1950-8651
С.І. Ляшко[1], https://orcid.org/0000-0003-1016-5231
Н.І. Ляшко[2], https://orcid.org/0000-0002-3879-565X
М.В.-С. Сидоров[1], https://orcid.org/0000-0002-5333-8393

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
[2] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна
E-mail: ialexandrovich@ukr.net, lyashko.serg@gmail.com, lyashko.natali@gmail.com

Визначення розв'язку ітерованого гіперболічного рівняння

Представлено академіком НАН України А.О. Чикрієм

При вивченні задач, пов'язаних з явищами вібрації та іншими задачами механіки та математичної фізики, широко використовуються диференційні рівняння гіперболічного типу та їх ітерації. Методами розв'язування таких рівнянь є створення диференціальних та інтегральних операторів. У роботі побудовано диференціальні оператори, які переводять довільні функції в регулярні розв'язки рівняння гіперболічного типу другого та вищих порядків. Розв'язано задачу Рік'є для рівняння гіперболічного типу четвертого порядку.

Ключові слова: *диференціальний оператор, регулярні розв'язки, ітеровані рівняння гіперболічного типу.*

Вступ. Рівняннями в частинних похідних гіперболічного типу описується безліч різноманітних фізичних явищ. За їх допомогою з успіхом моделюються найскладніші явища і процеси природи, що мають хвильовий характер. Дослідження і розв'язання таких рівнянь є важливим результатом сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними [1—4]. Це пояснюється як теоретичною значущістю результатів, так і важливими їх застосуваннями [5—7]. Відзначимо також статтю [8], де запропоновано простий символьний алгоритм знаходження розв'язків ітерованих операторних рівнянь (зокрема гіперболічних).

Мета даної роботи — побудова диференціальних операторів, які переводять довільні функції області $D \subset R^2$ у регулярний розв'язок рівняння

$$Y_k^m W = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{k}{2(x+y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \right)^m W = 0, \quad m \in N, \frac{k}{2} \in Z. \tag{1}$$

Цитування: Александрович І.М., Ляшко С.І., Ляшко Н.І., Сидоров М.В.-С. Визначення розв'язку ітерованого гіперболічного рівняння. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 2. С. 3—8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.02.003

Як приклад застосування побудованих операторів розв'язано задачу Рік'є.

Насамперед розглянемо диференціальне рівняння

$$W_{xy}+\frac{(n-m)\phi'(x)}{\phi(x)+\psi(y)}W_y-\frac{n(m+1)\psi'(y)}{(\phi(x)+\psi(y))^2}W=0\,, \tag{2}$$

де $\phi(x)$, $\psi(y)$ — функції, що задовольняють умову $(\phi(x)+\psi(y))\phi'(x)\psi'(y)\neq 0$; $n, m\in N\cup\{0\}$.

За ідеєю [6] будуються диференціальні оператори $Lg(x)$ та $Nf(y)$, кожен з яких визначає розв'язок рівняння (2). Має місце наступна теорема:

Теорема 1. *Нехай $g(x)$, $f(y)$ — довільні функції, які достатнє число разів диференційовані в області D. Тоді функція $W(x, y)$ визначена рівністю*

$$W(x, y)=Lg(x)+Nf(y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!(m+1)n-k}{k!(n-k)!}\frac{(\phi'(x))^{n-k}}{(\phi(x)+\psi(y))^{n-k}}g^{(k)}(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\frac{m!(n+1)_{m-k}}{k!(m-k)!}\frac{(\psi'(y))^{n-k}}{(\phi(x)+\psi(y))^{n-k}}f^{(k)}(y)\,, \tag{3}$$

є розв'язком рівняння (2). Тут $(m+1)_{n-k}=(m+1)(m+2)\ldots(m+n-k)$ — символ Похгамера, $(m+1)_0=1$.

Твердження теореми можна застосувати до розв'язування наступної задачі.

Задача Коші. В області $D=\left[a,b\right]\times\left[a,b\right]$ знайти розв'язок рівняння

$$W_{xy}-\frac{2}{(x+y)^2}W=0, \tag{4}$$

за виконання умови

$$W(x, y)\big|_{y=x}=\alpha(x)\,,\quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\right)\Big|_{y=x}=\beta(x), \tag{5}$$

де $\alpha(x)\in C^2([a, b]), \beta(x)\in C^2([a, b])$ — задані функції, $x+y\neq 0$ в області D.

Розв'язок задачі за формулою (3) шукаємо у вигляді

$$W(x, y)=-\frac{2}{x+y}g(x)+g'(x)+f'(y)-\frac{2}{x+y}f(y)\,. \tag{6}$$

Отримаємо таке твердження.

Теорема 2. *Розв'язок задачі* (4), (5) *отримаємо у наступному вигляді:*

$$W(x, y)=(\alpha'-\beta)\frac{x(y-x)}{x+y}+\alpha(x)+\frac{1}{x+y}\int_x^y(y^2-(y-x)t-t^2)\gamma(t)dt.$$

Побудова диференціального оператора, що визначає розв'язок рівняння (1)

Заміною $w=(x+y)^{-\frac{p}{2}}V$ рівняння (1) набуде вигляду

$$Y^m_{\frac{p}{2}-1}V=\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(x+y)^2}\right)^m V(x,y)=0 \tag{7}$$

або

$$Y^m_n V=\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\frac{n(n+1)}{(x+y)}\right)^m V=0, n=\frac{p}{2}-1, n\in N, m\in N. \tag{7.1}$$

Нехай D — область у верхній півплощині.

Розглянемо рівняння (7.1) при $m=1$

$$Y_n V=\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}-\frac{n(n+1)}{(x+y)^2}V=0, \tag{8}$$

розв'язок якого в D за формулою (3) шукаємо у вигляді

$$V(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{g^{(k)}(x)}{(x+y)^{n-k}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{f^{(k)}(y)}{(x+y)^{n-k}}, \tag{9}$$

де $g(x), f(y)$ — довільні функції.

Формулу (9) можна подати так:

$$V(x,y)=L_n g(x)+N_n f(y), \tag{9.1}$$

де

$$L_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(x+y)^{n-k}}\frac{\partial^k}{\partial x^k},\ N_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(x+y)^{n-k}}\frac{\partial^k}{\partial y^k}.$$

Теорема 3. *Розв'язком рівняння (7.1) буде*

$$V(x,y)=\sum_{i-0}^{m-1}(x+y)^i V_i(x,y),$$

де

$$V_i=L_n g_i+N_n f_i,\ m\geqslant 2.$$

Доведення спирається на наступну лему.

Лема. *Якщо* $V_i(x, y)$ $(i = 0, \ldots, m-1)$ *є* $2(i+1)$ *разів неперервно диференційованими розв'язками рівняння* $Y_n V = 0$, *то функція, визначена рівністю*

$$V(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} V_i(x, y)(x+y)^i, \quad m \geqslant 2 \tag{10}$$

задовольняє рівнянню $Y_n^m V = 0$, *тобто рівнянню (7.1).*

Твердження леми доводиться методом математичної індукції.

Далі безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція, визначена рівністю (10), задовольняє рівнянню (7.1).

Знову ж таки методом математичної індукції доведемо, що

$$Y_n^m((x+y)^{m-1} V_{m-1}(x, y)) = 0. \tag{11}$$

Теорема 4. *а) Для всякого розв'язку рівняння (7.1)* $Y_n^m V = 0, \quad m \geqslant 2$ *знайдуться в області D функції* $g_i(x), f_i(y)$ *такі, що*

$$V(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} (x+y)^i (L_n g_i + N_n f_i). \tag{12}$$

б) Навпаки. Якщо $g_i(x), f_i(y)$ *— довільні в D функції, потрібне число разів диференційовані, то (12) є розв'язком рівняння (7.1) в D.*

Застосуємо формулу (12) до розв'язання задачі Рік'є для рівняння

$$Y^2 V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{2}{(x+y)^2} \right)^2 V = 0\,.$$

Задача Рік'є.

Нехай D — квадрат $[a, b] \times [a, b]$. Знайти в області D розв'язок рівняння

$$Y^2 V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{2}{(x+y)^2} \right)^2 V = 0\,, \tag{13}$$

справджуючи умови:

$$V\big|_{y=x} = \gamma(x)\,, \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{2}{(x+y)^2} \right) V\big|_{y=x} = \delta(x)\,. \tag{14}$$

Тут $\gamma(x), \delta(x)$ — задані функції достатньої гладкості.

Теорема 5. *Розв'язком задачі Рік'є (13), (14) є*

$$V(x, y) = V_0(x, y) + (x+y)V_1(x, y),$$

де

$$V_0(x, y) = (\alpha_1' - \beta_1)\frac{x(y-x)}{x+y} + \alpha_1(x) + \frac{1}{x+y}\int_x^y (y^2 - (y-x)t - t^2)\gamma_1(t)\,dt, \tag{15}$$

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2t}(\alpha_1{}'(t) - \beta_1(t)) + \frac{1}{2}(\alpha_1{}''(t) - \beta_1{}') - \frac{1}{2t^2}\alpha_1(t),$$

$$V_1(x, y) = (\alpha_2{}'(x) - \beta_2(x))\frac{x(y-x)}{x+y} + \alpha_2(x) + \frac{1}{x+y}\int_x^y (y^2 - (y-x)t - t^2)\gamma_2(t)\,dt. \qquad (16)$$

Тут

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{2t}(\alpha_2{}'(t) - \beta_2(t)) + \frac{1}{2}(\alpha_2{}''(t) - \beta_2{}'(t)) - \frac{1}{2t^2}\alpha_2(t),$$

$$\alpha_1(x) = x^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\ln x}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx_1}{x_1\cos^2\frac{\ln x_1}{2}}\left(\int_{x_0}^{x_1} x_2^{-\frac{5}{2}}\cos\frac{\ln x_2}{2}F(x_2)\,dx_2\right),$$

$$F(x) = \frac{5}{2}\gamma - 2x\gamma' + x^2\gamma''(x) - 2x^3\delta'(x);$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{2x}(\gamma(x) - \alpha_1(x));$$

$$\beta_2(x) = 2\alpha_2{}'(x) - \delta(x);$$

$$\beta_1(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\alpha_1{}''(t) - \frac{1}{2t^2}\alpha_1(t)\right)dt, \quad x_0 \in D, x \in D.$$

Висновок. Задача Рік'є для рівняння $Y_n^m(V) = 0$ розв'язувальна тоді і тільки тоді, коли розв'язувальні задачі Коші для рівняння $Y_n(V) = 0$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Chen Y., Wang Qi. Convergence and stability of meshfree method based on radial basis function for a hyperbolic partial differential equation with piecewise constant arguments. *J. Diff. Equations and Applications*. 2022. **28**, Iss. 1. P. 39—57.
2. Singh S., Patel V.K., Singh V.K. Application of wavelet collocation method for hyperbolic partial differential equations via matrices. *Appl. Math. and Comp*. 2018. **320**, № 1. P. 407—424.
3. Turkyilmazoglu M. Hyperbolic partial differential equations with nonlocal mixed boundary values and their analytic approximate solutions. *Int. J. Comp. Methods*. 2018. **15**, № 1. Article ID 1850003.
4. Arawomo P. Interval Analytic Method in Existence Result for Hyperbolic Partial Differential Equation. *Advances in Pure Math.* 2014. **4**. P. 147—155. https://doi.org/10.4236/apm.2014.44020
5. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Sergienko T.I. Trajectory and final controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. **37**, № 5. P. 756—763.
6. Alexandrovich I.M., Sydorov M.V. Differential Operators Specifying the Solution of an Elliptic Iterated Equation. *Ukr. Math. J.* 2019. **71**, Iss. 3. P. 495—504. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01659-y
7. Alexandrovich I.M. Differential operators determining solutions of Elliptic equations. Ukr. Math. J. 1995. **47**, Iss. 12. P. 1811—1817. https://doi.org/10.1007/BF01060956
8. Бойчук О., Макаров В., Ферук В. Критерій розв'язності резонансних рівнянь та побудова їх розв'язків. *Укр. мат. журн*. 2019. **71**, № 10. С. 1321—1330.

Надійшло до редакції 25.01.2024

REFERENCES

1. Chen, Y. & Wang, Qi. (2022). Convergence and stability of meshfree method based on radial basis function for a hyperbolic partial differential equation with piecewise constant arguments. J. Diff. Equations and Applications, 28, Iss. 1, pp.39-57.
2. Singh, S., Patel, V. K. & Singh, V. K. (2018). Application of wavelet collocation method for hyperbolic partial differential equations via matrices. Appl. Math. and Comp., 320, No. 1, pp. 407-424.
3. Turkyilmazoglu, M. (2018). Hyperbolic partial differential equations with nonlocal mixed boundary values and their analytic approximate solutions. Int. J. Comp. Methods, 15, No. 1, Article ID 1850003
4. Arawomo, P. (2014). Interval Analytic Method in Existence Result for Hyperbolic Partial Differential Equation. Advances in Pure Mathematics, 4, pp. 147-155. https://doi.org/10.4236/apm.2014.44020
5. Lyashko, S. I., Nomirovskii, D. A. & Sergienko, T. I. (2001). Trajectory and final controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions. Cybernetics and Systems Analysis, , 37, Iss. 5, pp. 756-763.
6. Alexandrovich, I. M. & Sydorov, M. V. (2019). Differential Operators Specifying the Solution of an Elliptic Iterated Equation. Ukr Math. J., 71, Iss. 3, pp. 495-504. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01659-y
7. Alexandrovich, I. M. (1995). Differential operators determining solutions of Elliptic equations. Ukr. Math. J., 47, Iss. 12, pp. 1811-1817. https://doi.org/10.1007/BF01060956
8. Boichuk, O. A., Makarov, V. L. & Feruk, V. A. (2020). A criterion of solvability of resonant equations and construction of their solutions. Ukr. Math. J., 71, pp. 1510-1521. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01728-7

Received 25.01.2024

I.M. Alexandrovich[1], https://orcid.org/0000-0002-1950-8651
S.I. Lyashko[1], https://orcid.org/0000-0003-1016-5231
N.I. Lyashko[2], https://orcid.org/0000-0002-3879-565X
M.V.-S. Sydorov[1], https://orcid.org/0000-0002-5333-8393

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
[2]V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: ialexandrovich@ukr.net, lyashko.serg@gmail.com, lyashko.natali@gmail.com

DETERMINATION OF THE SOLUTION OF THE ITERATED HYPERBOLIC EQUATION

Differential equations of hyperbolic type and their iterations are widely used in the study of problems related to vibration phenomena and other problems of mechanics and mathematical physics. The methods of solving such equations involve the creation of differential and integral operators. In the work, differential operators are constructed that translate arbitrary functions into regular solutions of a hyperbolic equation of the second and higher orders. The Riquet problem for the hyperbolic equation of the fourth order is solved.

Keywords: *differential operator, regular solutions, iterated hyperbolic type equations.*