

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.04.003>

УДК 539.375

В.Л. Богданов, <https://orcid.org/0000-0001-9864-9120>

В.М. Назаренко, <https://orcid.org/0000-0002-0197-5091>

О.Л. Кіпніс, <https://orcid.org/0000-0001-6747-8584>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

E-mail: bogdanov@nas.gov.ua, nazvm1@gmail.com, a.l.kipnis@gmail.com

Розв'язання плоскої задачі механіки руйнування для кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж міжфазної приповерхневої тріщини

Представлено академіком НАН України В.Д. Кубенком

В роботі представлено аналітико-чисельний підхід до дослідження плоских задач про стискання кусково-однорідних напівобмежених тіл вздовж розташованих на межі поділу різних середовищ приповерхневих тріщин. Підхід розроблено в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл, коли початок процесу руйнування ініціюється втратою стійкості матеріалу в локальній області біля тріщини. Вперше отримано розв'язок плоскої задачі про стиск напівобмеженого тіла (основи) з шаром покриття вздовж приповерхневої міжфазної тріщини. З використанням запису загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції та застосування інтегральних розкладів Фур'є поставлену граничну задачу зведено до задачі на власні значення для системи однорідних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, яка досліджується чисельно з використанням методу Бубнова—Гальоркіна. Для випадку, коли матеріал основи та покриття описуються пружним потенціалом Бартенєва—Хазановича, обчислено значення критичних параметрів, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщини на початковому етапі руйнування. Для апробації ефективності запропонованого підходу виконано порівняння значень критичних параметрів руйнування, отриманих в результаті розв'язання задачі для кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною, що розглядається, зі значеннями критичних параметрів руйнування, отриманими раніше при розгляді аналогічної плоскої задачі для однорідного тіла з приповерхневою тріщиною.

Ключові слова: кусково-однорідне напівобмежене тіло, приповерхнева міжфазна тріщина, стиск вздовж тріщини, критичні навантаження.

Ц и т у в а н н я: Богданов В.Л., Назаренко В.М., Кіпніс О.Л. Розв'язання плоскої задачі механіки руйнування для кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 4. С. 3—13. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.04.003>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Вступ. Задачі про руйнування тіл з тріщинами за їх стиску вздовж поверхонь розташування тріщин відносять до неklasичних проблем механіки руйнування, оскільки класичні критерії руйнування (Гріффітса—Ірвіна, Черепанова—Райса, критичного розкриття тріщин тощо) за вказаної схеми навантаження не працюють, зокрема, через рівність нулю коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі вершин тріщин [1]. В цьому випадку початок (старт) процесу руйнування пов'язується з локальною втратою стійкості прилеглої до тріщини частини матеріалу [2, 3], а відповідні критичні параметри можуть бути ефективно обраховані в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [4].

В рамках підходів ТЛТСДТ детально вивчені плоскі та просторові осесиметричні задачі про стиск необмежених та напівобмежених однорідних тіл вздовж поодиноких тріщин та тріщин, розташованих у паралельних площинах (див., наприклад, [5, 6]). Значно меншою є кількість досліджень задач про стиск необмежених кусково-однорідних тіл вздовж міжфазних тріщин (див, наприклад, [7, 8]). Докладний огляд результатів дослідження вказаних задач, а також відповідну бібліографію наведено в оглядових статтях [9—11]. В [12] з використанням представлення загальних розв'язків плоских лінеаризованих задач через комплексні потенціали [3, 4] виконано постановку плоскої задачі про стиск напівобмеженого тіла вздовж тріщини, що знаходиться на прямолінійній межі поділу півплощини та смуги з різних матеріалів; при цьому чисельних результатів дослідження для конкретних матеріалів у вказаній роботі не наводилось.

Метою даної роботи є розробка та апробація аналітико-чисельного підходу до дослідження неklasичної проблеми механіки руйнування напівобмежених кусково-однорідних тіл при їх стисканні вздовж міжфазних тріщин, тобто тріщин, розташованих на межі поділу двох різних середовищ (interface). Перевагою застосування підходу, що пропонується в роботі, є можливість отримання результатів у *загальній формі* для широкого спектра матеріалів: стисливих і нестисливих, пружних і пружно-пластичних, ізотропних та анізотропних. При цьому, на відміну від підходів, що базуються на використанні чисельних методів скінчених різниць та скінчених елементів (див., наприклад, [7, 8]), конкретизація моделі матеріалу відбувається лише на фінальному етапі розв'язання задачі.

Нижче із застосуванням співвідношень ТЛТСДТ для випадку плоскої деформації розглянута задача про стиск кусково-однорідного напівобмеженого тіла вздовж міжфазної приповерхневої тріщини (міжфазної тріщини, розташованої близько до граничної поверхні тіла), яка є паралельною до плоскої граничної поверхні тіла. Запропоновано аналітико-чисельний підхід для дослідження задач подібного класу, який полягає у зведенні вихідної однорідної крайової задачі до парних інтегральних рівнянь, а потім — до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (і відповідної їй системи лінійних однорідних рівнянь, одержаної з використанням методу Бубнова—Гальборкіна) відносно параметра стискаючого навантаження, яка отримана в загальному випадку для широкого класу конструкційних матеріалів.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне напівобмежене тіло, що складається з півплощини $x_2 \geq 0$ (матеріал “1”, основа) та смуги $-h \leq x_2 \leq 0$ (матеріал “2”, покриття). Прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить відкриту міжфазну тріщину довжини $2a$ (рис. 1); поза тріщиною матеріали жорстко з'єднані між собою. Межа тіла $x_2 = -h$ та береги тріщини вільні від напружень.

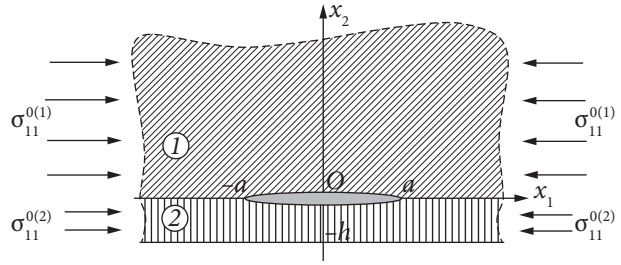


Рис. 1. Кусково-однорідна півплощина зі смугою покриття та міжфазною тріщиною при стиску

Нехай на нескінченності матеріали стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = \text{const}, \quad i = 1, 2; \quad \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)}$$

таким чином, щоб гарантувати однакові видовження вздовж осі Ox_1 для матеріалів півплощини та смуги:

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_1 < 1,$$

де λ_1^1, λ_1^2 — коефіцієнти укорочення матеріалів півплощини та смуги, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$, відповідно тут і далі верхнім індексом “1” (в круглих дужках) позначені величини, що відповідають матеріалу півплощини “1”, а верхнім індексом “2” (в круглих дужках) — смуги “2”). В цьому випадку докритичний напружено-деформований стан у кожній з областей “1” і “2” є статично визначеним, однорідним та визначається виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Граничні умови сформульованої задачі записуються так:

$$t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = -h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \quad (2)$$

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a).$$

Тут $t_{kl}^{(i)}$, $i, k, l = 1, 2$ — збурення компонент несиметричного тензора напружень Піоли—Кірхгофа \tilde{t} ; $u_k^{(i)}$, $i, k = 1, 2$ — збурення компонент вектора переміщень \mathbf{u} .

Для випадку однорідного докритичного стану (1) в [4, 13] побудовані представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенці-

альні функції. Вигляд указаних представлень залежить від співвідношення коренів характеристичного рівняння для вибраної моделі матеріалу. В даній роботі досліджується випадок, коли характеристичне рівняння для кожного з матеріалів “1” і “2” має *рівні корені*

$$n_1^1 = n_2^1 = n_1^2 = n_2^2 = n,$$

а самі матеріали “1” і “2” описуються однаковими пружними потенціалами, проте з різними пружними сталими.

Увівши до розгляду для кожного з матеріалів гармонічні потенціальні функції $F^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ та відповідні представлення збурень напружень і переміщень по аналогії до [4, 13], отримуємо такі співвідношення для граничних умов (2) задачі в термінах потенціальних функцій:

$$k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1} = 0,$$

$$k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_1^2} = 0, \quad (z_1 = -h_1, \quad 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1},$$

$$k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} \quad (z_1 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \quad (3)$$

$$k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} = 0, \quad k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} = 0 \quad (z_1 = 0, \quad |x_1| \leq a);$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1}, \quad p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_1 = 0, \quad |x_1| > a),$$

$$z_1 = n^{-1/2} x_2, \quad h_1 = n^{-1/2} h; \quad \Phi^i \equiv \frac{\partial \varphi^i}{\partial z_1}, \quad i = 1, 2.$$

Коефіцієнти в (3) є функціями компонентів тензорів $\tilde{\omega}^{(i)}$ (для *стисливих* тіл) або $\tilde{\alpha}^{(i)}$ (для *нестисливих* тіл), які входять до лінеаризованого рівняння стану [4, 13].

Система інтегральних рівнянь задачі. З урахуванням симетрії конфігурації відносно осі Ox_2 , за аналогією до задач для однорідного тіла [13], представимо невідомі потенціаль-

ні функції у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1 :

$$F^{(1)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} A(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 d\lambda ,$$

$$\varphi^{(1)}(x_1, z_1) = -\int_0^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda} ,$$

$$\Phi^{(1)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 d\lambda ,$$

$$F^{(2)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} [C_1(\lambda) \cosh \lambda (h_1 + z_1) + C_2(\lambda) \sinh \lambda (h_1 + z_1)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1} , \quad (4)$$

$$\varphi^{(2)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} [D_2(\lambda) \cosh \lambda (h_1 + z_1) + D_1(\lambda) \sinh \lambda (h_1 + z_1)] \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda \sinh \lambda h_1} ,$$

$$\Phi^{(2)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} [D_1(\lambda) \cosh \lambda (h_1 + z_1) + D_2(\lambda) \sinh \lambda (h_1 + z_1)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1} .$$

Представлення (4) відповідають парності функцій $u_2^{(i)}(x_1, z_1)$ і непарності функцій $u_1^{(i)}(x_1, z_1)$ по координаті x_1 , тому далі розглядаємо лише значення $x_1 \geq 0$.

Задовольнімо наскрізні граничні умови. Використавши перші чотири умови (3), визначаємо невідомі коефіцієнти розкладів (4) $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$ через $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$:

$$A = -\Delta^{-1}[(s_1 + \mu s_2 + \mu \coth \mu \cdot s_3)C_1 + (s_4 + \mu s_5 + \mu \coth \mu \cdot s_6)C_2] ,$$

$$B = \Delta^{-1}[(r_1 + \mu r_2 + \mu \coth \mu \cdot r_3)C_1 + (r_4 + \mu r_5 + \mu \coth \mu \cdot r_6)C_2] , \quad (5)$$

$$D_1 = -\frac{k_1^2}{k_2^2}C_1 + \mu C_2 , \quad D_2 = \mu C_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2}C_2 ,$$

де $\Delta(k_i^j)$, $s_l(k_i^j)$, $r_l(k_i^j)$, $i = \overline{1, 5}$, $j = \overline{1, 2}$, $l = \overline{1, 6}$ — відомі функції.

Співвідношення (5) мають місце лише у випадку, коли не виконується рівність

$$\Delta \equiv k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1 = 0 . \quad (6)$$

Якщо ж рівність (6) виконується, то коефіцієнти $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$ виражаються через $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ неєдиним чином, що відразу свідчить про наявність суміжного стану рівноваги кусково-однорідного тіла, що досліджується при навантаженнях, які відповідають значенню видовження λ_1 , за якого виконується рівність (6).

Значення λ_1^{cr} , яке отримується з (6), є критичним значенням видовження, що відповідає поверхневій нестійкості півплощини (з матеріалу “1” або “2”) без тріщини [14] та

визначається видом пружного потенціалу. З фізичних міркувань випливає, що критичні значення параметра λ_1 задачі, що досліджується, лежать в області

$$\lambda_1^{cr} < \lambda_1 < 1, \quad (7)$$

в якій рівність (6) не виконується.

Останні чотири умови (3) для безрозмірних змінних $\xi \equiv a^{-1}x_1$, $\eta \equiv a^{-1}t$ приводять до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[\int_0^\infty P_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^\infty P_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^2} d\lambda \right] g(\eta) d\eta = 0, \\ & \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^2} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^3} d\lambda \right] g(\eta) d\eta = \text{const}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\beta = h/a, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

та додаткової умови

$$\int_0^1 g(\eta)(1 - \eta^2) d\eta = 0 \quad (9)$$

відносно невідомих безрозмірних функцій $f(\xi) \equiv a \varphi(a\xi)$, $g(\xi) \equiv a \psi(a\xi)$.

Функції P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 , що входять до ядер інтегральних рівнянь (8), мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{(k + x \coth x)\beta_2(x) - x\beta_1(x)}{\delta(x)}, \quad P_2(x) = \frac{(-k - x \coth x)\alpha_2(x) + x\alpha_1(x)}{\delta(x)}, \\ Q_1(x) &= \frac{x\beta_2(x) + (k - x \coth x)\beta_1(x)}{\delta(x)}, \quad Q_2(x) = \frac{x\alpha_2(x) + (-k + x \coth x)\alpha_1(x)}{\delta(x)}, \\ \delta(x) &= \alpha_1(x)\beta_2(x) - \alpha_2(x)\beta_1(x) \end{aligned}$$

($\alpha_{1,2}(x)$, $\beta_{1,2}(x)$ — відомі функції).

Чисельне дослідження системи інтегральних рівнянь на власні значення. Система інтегральних рівнянь (8), доповнена умовою (9), була отримана у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл у випадку, коли матеріали півплощини і смуги описуються однаковими пружними потенціалами, для яких реалізується випадок рівних коренів характеристичного рівняння.

В якості тестового прикладу для верифікації підходу, що пропонується, проведемо чисельне дослідження системи (8), (9) для випадку, коли матеріали “1” і “2” описуються потенціалом Бартенєва—Хазановича [15].

Потенціал Бартенєва—Хазановича характеризується однією сталою μ_i , $i=1,2$ для кожного матеріалу, яка визначає жорсткість відповідного матеріалу. Для цього потенціалу у випадку плоскої задачі мають місце такі співвідношення:

$$n_1^i = n_2^i = (\lambda_1^i)^2, \lambda_2^i = (\lambda_1^i)^{-1}, \sigma_{11}^{0(i)} = 2\mu_i(\lambda_1 - \lambda_2^i)(\lambda_1)^{-2}, \lambda_1^{cr} = 0,577,$$

$$\varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0,423, i=1,2$$

($\varepsilon_1^i = 1 - \lambda_1^i$ — відносні укорочення відповідного матеріалу вздовж осі Ox_1).

Будемо досліджувати випадок, коли матеріал покриття є менш жорстким за матеріал основи (або жорсткості матеріалів однакові):

$$g = \mu_2/\mu_1 \leq 1. \tag{10}$$

За умови виконання рівності (10) для значень видовження λ_1 з області (7) всі невластні інтеграли у (8), які є ядрами відповідних інтегральних рівнянь, є збіжними для всіх допустимих значень змінних ξ, η .

Чисельне дослідження системи інтегральних рівнянь (8), доповнених умовою (9), проводимо методом Бубнова—Гальоркіна [16]. Апроксимуючи невідомі функції $f(\xi)$, $g(\xi)$ у вигляді лінійної комбінації перших N координатних функцій повної на $[0,1]$ системи функцій $1, \xi, \xi^2, \dots$:

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^N f_j \xi^{j-1}, g(\xi) = \sum_{j=1}^N g_j \xi^{j-1},$$

приходимо до наступної системи однорідних лінійних рівнянь розмірністю відносно невідомих коефіцієнтів розкладів f_j, g_j та невідомої сталої c :

$$\sum_{j=1}^N f_{ij}^{(1)} f_j + \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} g_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N f_{ij}^{(2)} f_j + \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(2)} g_j + c_i \cdot c = 0, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^N g_j^{(3)} g_j = 0, i = \overline{1, N}.$$

Коефіцієнти системи (11) $f_{ij}^{(l)}, g_{ij}^{(l)}, g_j^{(3)}, c_i$; $i, j = \overline{1, N}$ — відомі функції.

Дослідження задачі на власні значення для системи лінійних рівнянь (11), до якої зводиться вихідна задача, полягає у знаходженні першого значення параметра $\lambda_1 < 1$, який

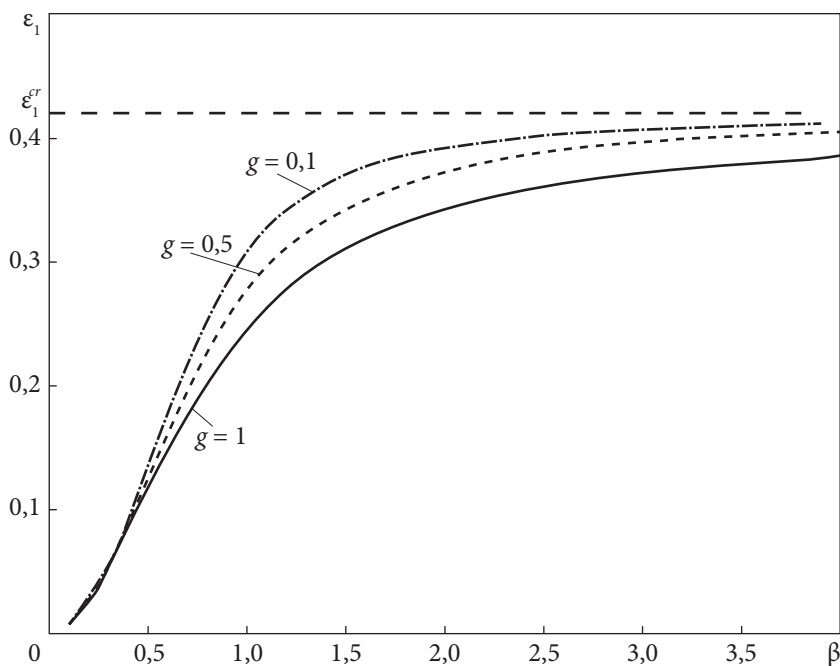


Рис. 2. Залежності критичного відносного укорочення ε_1 від відносної ширини покриття β для різних значень $g = \mu_2 / \mu_1$ (співвідношення між жорсткістю матеріалів покриття і основи) у випадку матеріалів з пружним потенціалом Бартенєва—Хазановича

нелінійним чином входить до коефіцієнтів системи (11) (при зменшенні λ_1 , починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$), при якому вказана система має неєдиний розв'язок. Тобто визначається значення λ_1 , при якому визначник системи лінійних рівнянь (11) обертається в нуль.

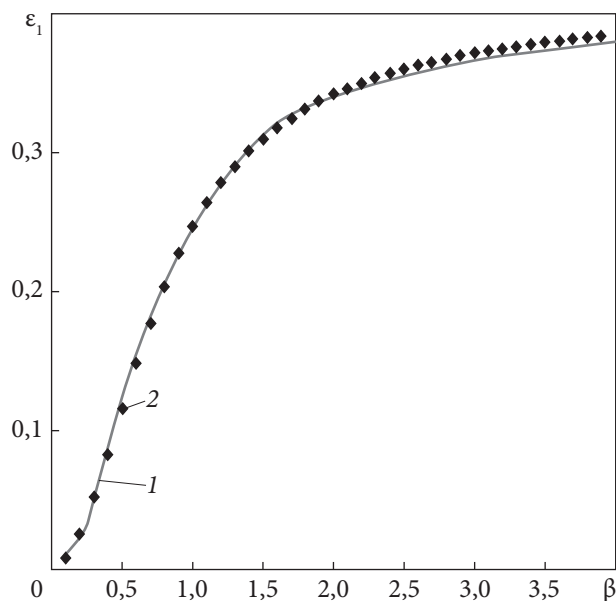
Рис. 2 ілюструє залежності критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ від відносної (нормованої на половину довжини тріщини) ширини смуги $\beta = h/a$ для різних значень співвідношення $g = \mu_2/\mu_1$ між жорсткостями матеріалів покриття та основи.

На рис. 3 для порівняння наведено графіки залежностей ε_1 від β , обраховані запропонованим у роботі підходом для кусково-однорідної моделі тіла з міжфазною тріщиною (при $N = 4$ та $\mu_1 = \mu_2$, тобто коли матеріали основи 1 та покриття 2 є однаковими) (крива 2) та отримані раніше в [5] при розгляді плоскої задачі про стиск однорідної півплощини вздовж приповерхневої тріщини (суцільна крива 1).

Як видно з рис. 3, результати, отримані з використанням запропонованого підходу навіть при невеликій кількості координатних функцій, добре узгоджуються з результатами, отриманими з розв'язку аналогічної задачі для однорідного тіла [5], що свідчить про ефективність підходу для дослідження стійкості напівобмежених кусково-однорідних тіл при їх стиску вздовж міжфазних тріщин.

Висновки. В рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено задачу плоскої деформації про стиск напівобмеженого тіла вздовж тріщини, яка розташована на прямолінійній межі поділу двох компонентів зазначеного тіла: напівобмеженої основи та менш жорсткого по відношенню до неї покриття. Вивчено залежності значень критичного відносного укорочення вздовж лінії поділу середовищ від відносної товщини шару покриття та від фізико-механічних характеристик матеріалів у випадку, коли матеріали конструкційного тіла описуються пружним потенціалом Бартенєва—Хазановича.

Рис. 3. Залежності критичного відносного укорочення ε_1 від відносної ширини покриття ε , отримані в задачі про кусково-однорідну півплощину з міжфазною тріщиною (при однаковій жорсткості матеріалів основи і покриття) (крива 2) та в задачі про однорідну півплощину з приповерхневою тріщиною (суцільна крива 1) (матеріали описуються пружним потенціалом Баргенєва—Хазановича)



За однакових фізико-механічних характеристик покриття та основи результати з дослідження задачі, що розглядається, добре узгоджуються з результатами дослідження задачі про стиск однорідної півплощини вздовж приповерхневої тріщини.

Підтверджена результатами числових досліджень ефективність підходу до розв'язання задачі механіки руйнування для напівобмежених кусково-однорідних тіл, що стискаються вздовж тріщини, розташованої на межі поділу середовищ, що пропонується в даній роботі, обґрунтовує доцільність розвитку цього підходу для дослідження широкого класу суміжних задач неklasичної механіки руйнування: плоских та просторових задач про стискання вздовж поодиноких та взаємодіючих міжфазних дефектів (типу відкритих тріщин, зон проковзування тощо) кусково-однорідних тіл (конструкційних матеріалів з шаром покриття, шаруватих композитних матеріалів тощо) за різних умов з'єднання компонентів цих тіл (жорстке з'єднання, гладке та негладке проковзування тощо).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. Москва: Наука, 1974. 640 с.
2. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача. Докл. АН СССР. 1981. **259**, № 6. С. 1315—1318.
3. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of Materials under Compression along Cracks. Advanced Structured Materials, 138. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. 490 p.
4. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1999. 555 p.
5. Nazarenko V.M. Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks. *Sov. Appl. Mech.* 1986. **22**, № 10. P. 970—978. <https://doi.org/10.1007/BF01273678>
6. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential. *Int. Appl. Mech.* 1994. **30**, № 10. P. 760—765. <https://doi.org/10.1007/BF00847135>
7. Guz I.A., Kokhanenko Yu.V. Stability of laminated composite material in compression along microcrack. *Int. Appl. Mech.* 1993. **29**, № 9. P. 702—708. <https://doi.org/10.1007/BF00847367>

8. Guz I.A. Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface. *Int. Appl. Mech.* 1994. **30**, № 11. P. 841—847. <https://doi.org/10.1007/BF00847037>
9. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (review). *Int. Appl. Mech.* 2015. **51**, № 5. P. 489—560. <https://doi.org/10.1007/s10778-015-0710-x>
10. Guz A.N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 1. P. 1—57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
11. Guz A.N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of the research (review) III. *Int. Appl. Mech.* 2019. **55**, № 4. P. 343—415. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4>
12. Bogdanov V.L., Kipnis A.L. Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack. *J. Math. Sci.* 2021. **253**, № 1. P. 99—107. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05214-8>
13. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. Киев: Наук. думка, 1992. 456 с. (Неклассические проблемы механики разрушения в 4-х т., 5-и кн. Под общ. ред. А.Н. Гузя; Т.4, кн. 1).
14. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. Киев: «ЛИТЕРА», 2008. (Т. 1. Разрушение в структуре материала. 592 с.)
15. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров. *Высокомолекулярные соединения*. 1960. **2**, №1. С. 21—28.
16. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Москва: Наука, 1965. 383 с.

Надійшло до редакції 23.04.2024

REFERENCES

1. Cherepanov, G. P. (1974). *Brittle Fracture Mechanics*. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Guz, A. N. (1981). On one criterion for the fracture of solids under compression along cracks. *Dokl. Akad. nauk SSSR*, 259, No. 6, pp. 1315-1318 (in Russian).
3. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). *Fracture of Materials under Compression along Cracks*. *Advanced Structured Materials*, Vol. 138. Cham: Springer Nature Switzerland AG.
4. Guz, A. N. (1999). *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
5. Nazarenko, V. M. (1986). Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks. *Sov. Appl. Mech.*, 22, No. 1, pp. 970-978. <https://doi.org/10.1007/BF01273678>
6. Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (1994). Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential. *Int. Appl. Mech.*, 30, No. 10, pp. 760-765. <https://doi.org/10.1007/BF00847135>
7. Guz, I. A. & Kokhanenko, Yu. V. (1993). Stability of laminated composite material in compression along microcrack. *Int. Appl. Mech.*, 29, No. 9, pp. 702-708. <https://doi.org/10.1007/BF00847367>
8. Guz, I. A. (1994). Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface. *Int. Appl. Mech.*, 30, No. 1, pp. 841-847. <https://doi.org/10.1007/BF00847037>
9. Bogdanov, V. L., Guz, A. N. & Nazarenko, V. M. (2015). Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (review). *Int. Appl. Mech.*, 51, No. 5, pp. 489-560. <https://doi.org/10.1007/s10778-015-0710-x>
10. Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 1, pp. 1-57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
11. Guz, A. N. (2019). Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50-th anniversary of the research (review) III. *Int. Appl. Mech.*, 55, No. 4, pp. 343-415. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4>
12. Bogdanov, V. L. & Kipnis, A. L. (2021). Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack. *J. Math. Sci.*, 253, No. 1, pp. 99-107. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05214-8>
13. Guz, A. N., Dyshel, M. Sh. & Nazarenko, V. M. (1992). *Fracture and Stability of Materials with Cracks*. Kyiv: Naukova Dumka (Non-Classical Problems of Fracture Mechanics: in 4 volumes, 5 books. Guz A.N. (Ed.-in-Chief); Vol. 4, book. 1) (in Russian).
14. Guz, A. N. (2008). *Fundamentals of Fracture Mechanics of Composites under Compression: In 2 vol.* Kyiv: "LITERA" (Vol. 1. Destruction in the Structure of the Material) (in Russian).

15. Bartenev, G. M. & Khazanovich, T. N. (1960). On the law of highly elastic deformations of network polymers. *Vysokomolekulyarnyye Soyedineniya*, 2, No. 1, pp. 21-28 (in Russian).
16. Mikhlin, S. G. & Smolitsky, Kh. L. (1965). *Approximate Methods for Solving Differential and Integral Equations*. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 23.04.2024

V.L. Bogdanov, <https://orcid.org/0000-0001-9864-9120>

V.M. Nazarenko, <https://orcid.org/0000-0002-0197-5091>

A.L. Kipnis, <https://orcid.org/0000-0001-6747-8584>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

THE SOLUTION OF THE PLANE FRACTURE MECHANICS PROBLEM OF A PIECEWISE-HOMOGENEOUS HALF-PLANE UNDER COMPRESSION ALONG AN INTERFACIAL NEAR-SURFACE CRACK

The paper presents an analytic-numerical approach to the study of plane problems on compression of piecewise homogeneous semi-confined bodies by near-surface cracks located at the interface of different media. The approach was developed in the framework of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies, when the beginning of the fracture process is initiated by the loss of material stability in a local region near cracks. For the first time the solution of the plane problem of compression of a semi-confined body (base) with a coating layer along a near-surface interfacial crack was obtained. Using representations of general solutions of linearized equilibrium equations through harmonic potential functions and application of Fourier integral expansions, this boundary value problem is reduced to an eigenvalue problem for a system of homogeneous Fredholm integral equations of the first kind, which is investigated numerically using the Bubnov-Galyorkin method. For the case when the base and coating material is described by the Bartenev-Khazanovich elastic potential, the values of critical parameters corresponding to the local loss of stability of the material around the crack at the initial stage of fracture were calculated. To verify the effectiveness of the proposed approach, we compared the values of critical fracture parameters obtained as a result of solving the problem for the considered piecewise homogeneous body with an interfacial crack with the values of critical fracture parameters obtained earlier when considering a similar plane problem for a homogeneous body with a near-surface crack.

Keywords: *piecewise-homogeneous semi-bounded body, near-surface interfacial crack, compression along the crack, critical loads.*