ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МЕХАНІКА
MECHANICS

https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.01.013
УДК 539.3

А.Ю. Глухов, https://orcid.org/0009-0009-0579-9046

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
E-mail: ndrew.gl@gmail.com

Про поширення хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями за проковзування шарів

Представлена академіком НАН України В.Л. Богдановим

В рамках лінеаризованої теорії пружності дано постановку та метод розв'язку задач про поширення хвиль кручення в шаруватих попередньо напружених композитних матеріалах при проковзуванні шарів. Розглянуто поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів композиту. Для симетричних і антисиметричних хвиль кручення отримано дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення, які розв'язано аналітично. Встановлено, що між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Також виявлено залежність швидкості розповсюдження симетричних і антисиметричних хвиль кручення в кожному із шарів від механічних параметрів матеріалу шару, його товщини та значень початкових напружень.

Ключові слова: *шаруватий композит, стисливий гіперпружний матеріал, початкові (залишкові) напруження, хвилі кручення, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.*

Вступ. Хвилі кручення (або торсіонні хвилі) — це тип пружних хвиль, за яких частинки середовища обертаються навколо осі, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі, що призводить до поширення обертальних деформацій у пружному середовищі [1—3].

Хвилі кручення знаходять широке застосування в матеріалознавстві, особливо в дослідженні та діагностиці властивостей матеріалів [3]. Торсіонні хвилі мають високу чутливість до невеликих дефектів і неоднорідностей у матеріалі, ефективно виявляють тріщини, порожнечі та інші дефекти в матеріалах і використовуються для перевірки якості зварних з'єднань, композитних матеріалів та інших конструкційних елементів, забезпечуючи високу точність і надійність діагностики [4].

Цитування: Глухов А.Ю. Про поширення хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями за проковзування шарів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 1. С. 13—21. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.01.013

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

У композитних матеріалах внаслідок технологічних процесів їх виготовлення, обробки та експлуатації виникають початкові (інші терміни — залишкові, технологічні) напруження [5], які, в свою чергу, можуть зумовлювати утворення на межі розділу шарів (компонентів, фаз) композиту різного роду міжфазних дефектів (розшарувань, непроклеїв, тріщин). Тому достовірний опис напружено-деформованого стану композитів і виготовлених з них елементів конструкцій та аналіз динамічних процесів, що відбуваються в них, зокрема, закономірностей розповсюдження пружних хвиль, потребує адекватного врахування вказаних початкових (залишкових) напружень та міжфазних дефектів.

Результати досліджень поширення хвиль кручення у шаруватих композитних матеріалах періодичної структури з початковими напруженнями для випадку повного контакту шарів узагальнено в монографіях [1, 2, 6]. В цих дослідженнях було виявлено істотний вплив початкових напружень на швидкості розповсюдження хвиль кручення в таких композитах.

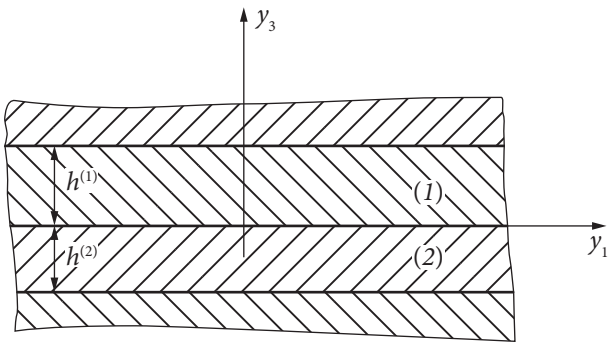
Разом з тим дослідження поширення торсіонних хвиль у шаруватих композитах з початковими напруженнями за наявності дефектів на межі поділу шарів до останнього часу відсутні. Слід при цьому зазначити, що для якісної оцінки впливу таких міжфазних дефектів на закономірності поширення хвиль кручення в композитних матеріалах доцільно розглянути такий граничний випадок контакту шарів як повне проковзування. З міркувань фізичного характеру випливає, що результати досліджень для інших випадків контакту шарів мають знаходитися між результатами, отриманими для граничних випадків, а саме, повного контакту шарів та повного проковзування шарів композиту.

В роботі [7] було проведено дослідження поширення хвиль кручення в шаруватому композитному матеріалі при проковзуванні шарів для випадку, коли матеріали шарів є нестисливими середовищами. При цьому метод дослідження хвиль кручення в шаруватих композитах з початковими напруженнями, викладений в [1, 2], був поширений на випадок неповного контакту шарів.

Мета. У даній роботі в рамках тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [2, 6] досліджується поширення хвиль кручення в шаруватому двокомпонентному композитному матеріалі з початковими (залишковими) напруженнями при проковзуванні шарів, коли матеріали шарів моделюються гіперпружним стисливим тілом.

Постановка задачі. Розглядається шаруватий композитний матеріал з початковими напруженнями, який складається з шарів двох типів, що чергуються (рисунок). Початкові (залишкові) напруження, що характеризуються компонентами симетричного тензора напружень Лагранжа S_{lm}^0, $l, m = \overline{1, 3}$ [2, 6], спрямовані вздовж шарів композиту (тут і надалі компоненти початкового напружено-деформованого стану, який виникає за дії початкових напружень, будемо позначати верхнім індексом "0"). Матеріали шарів і їх початкові напружено-деформовані стани, зумовлені дією початкових напружень, є однаковими для кожного типу шарів.

При дослідженні будемо застосовувати лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, $n = \overline{1, 3}$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами. Декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) в початковому напружено-деформованому стані вибираємо таким чином, щоб вісь Oy_3 була спрямована по нормалі до площин розділу шарів.



Розрахункова схема шаруватого двокомпонентного композитного матеріалу періодичної структури

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована вздовж осі Oy_3.

Вважаємо, що під дією початкових (залишкових) напружень $S_{lm}^{0(j)}$, $l, m = \overline{1, 3}$ (тут і нижче верхніми індексами в дужках $(j = 1, 2)$ позначені величини, що відносяться до шарів різних типів) в тілі реалізується однорідний початковий напружено-деформований стан, який характеризується такими виразами для компонентів вектора переміщень:

$$u_m^0 = \lambda_m^{-1}(\lambda_m - 1) y_m; \quad m = \overline{1, 3}, \tag{1}$$

де $\lambda_m = \text{const}$ — коефіцієнти видовження (або укорочення) вздовж координатних осей Oy_m, обумовлені дією початкових розтягуючих (або стискаючих) початкових напружень.

Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце такі співвідношення

$$\begin{gathered} S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \\ \varepsilon_{11}^{0(j)} = \varepsilon_{22}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{2}$$

Тут $\varepsilon_{tt}^{0(j)}$ — складові тензори деформацій Гріна; $h^{(j)}$ та $h'^{(j)}$ — товщини j-го шару в природному (недеформованому) та в початковому напружено-деформованому стані відповідно; $\lambda_t^{(j)}$ — видовження (або укорочення) у напрямках відповідних осей.

При дослідженні хвиль кручення в стисливому матеріалі приймаємо

$$u_{r'}^{(j)} \equiv 0; \quad u_\theta^{(j)} = u_\theta^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_3^{(j)} \equiv 0. \tag{3}$$

Вирази (3) будуть мати місце, якщо в представленні загальних розв'язків просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності [1, 2] прийняти

$$\Psi'^{(j)} = \Psi'^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad \mathrm{X}'^{(j)} \equiv 0. \tag{4}$$

У розглянутому випадку для визначення переміщень $u_\theta^{(j)}$ в кожному з шарів маємо такі співвідношення

$$u_\theta^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \Psi'^{(j)}. \tag{5}$$

Для складових несиметричного тензора напружень Піоли—Кірхоффа $Q'^{(j)}$ [6] при $y_3 = \text{const}$ отримуємо вирази

$$Q'^{(j)}_{3\theta} = \omega'^{(j)}_{3113} \frac{\partial}{\partial y_3} u^{(j)}_{\theta}. \tag{6}$$

Функції $\Psi'^{(j)}$, що входять до співвідношення (5), визначаються з рівнянь

$$\left(\Delta' + \omega'^{(j)}_{3113} \omega'^{(j)-1}_{1221} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho'^{(j)} \omega'^{(j)-1}_{1221} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Psi'^{(j)} = 0. \tag{7}$$

Тут $\Delta'_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial r'^2} + \dfrac{1}{r'} \dfrac{\partial}{\partial r'}$; $\rho'^{(j)}$ — щільність матеріалів кожного з шарів в початковому напружено-деформованому стані; τ — час. Складові тензора четвертого рангу $\tilde{\omega}'^{(j)}$ визначаються вибором пружного потенціалу, яким описується стисливе гіперпружне тіло [1, 2, 6].

Таким чином, відповідно до викладеного, дослідження закономірностей поширення пружних хвиль кручення у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (7) із задоволенням граничних умов на площинах розділу шарів і умов періодичності Флоке.

Метод розв'язування задачі. Розглянемо поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів у композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями. У цьому випадку для визначення "істинної" фазової швидкості поширення хвиль кручення у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями приймемо

$$\Psi'^{(j)}(r', y_3, \tau) = \Psi'^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

В (8) k і ω — хвильове число і кругова частота; C — "істинна" фазова швидкість хвиль кручення; $H_0^{(1)}(x)$ — функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує затухання хвиль кручення на нескінченності; $\Psi'^{(j)(0)}(y_3)$ — амплітудна функція. Надалі індексами (0) зверху позначені всі амплітудні величини у представленнях типу (8).

Підставляючи (8) в (5), для визначення переміщень отримуємо такі вирази:

$$u^{(j)}_{\theta}(r', y_3, \tau) = u^{(j)(0)}_{\theta}(y_3) \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad u^{(j)(0)}_{\theta}(y_3) = -\Psi'^{(j)(0)}(y_3). \tag{9}$$

Аналогічно, підставляючи (8) в (6), для обчислення складових тензора напружень $\tilde{Q}'^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ одержуємо такі співвідношення:

$$\begin{gathered} Q'^{(j)}_{3\theta}(r', y_3, \tau) = Q'^{(j)(0)}_{3\theta}(y_3) \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ Q'^{(j)(0)}_{3\theta}(y_3) = -\omega'^{(j)}_{3113} \frac{\partial}{\partial y_3} \Psi'^{(j)(0)}(y_3). \end{gathered} \tag{10}$$

Використовуючи (8) і (7), отримаємо рівняння для визначення функції $\Psi'^{(j)(0)}$ в такому вигляді

$$\left(\omega'^{(j)}_{3113}\omega'^{(j)-1}_{1221}\frac{d^2}{dy_3^2}+\rho'^{(j)}\omega^2\omega'^{(j)-1}_{1221}-k^2\right)\Psi'^{(j)(0)}(y_3)=0. \tag{11}$$

Оскільки в (9)—(11) всі співвідношення представлені через амплітудні величини, то умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин. Для цього виділимо два сусідніх шари (див. рисунок) і будемо вважати, що шар, характеристики якого позначені індексом 1, займає на осі Oy_3 область $0 \le y_3 \le h'^{(1)}$, а шар, всі характеристики якого позначені індексом 2, займає на осі Oy_3 область $-h'^{(2)} \le y_3 \le 0$.

За умови проковзування шарів композитного матеріалу при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови неперервності

$$Q'^{(1)(0)}_{3\theta}(0)=0; \quad Q'^{(2)(0)}_{3\theta}(0)=0 \tag{12}$$

і умови періодичності

$$Q'^{(1)(0)}_{3\theta}(h^{(1)})=0; \quad Q'^{(2)(0)}_{3\theta}(-h^{(2)})=0. \tag{13}$$

Таким чином, для стисливого тіла необхідно знайти розв'язок звичайного диференціального рівняння (11), що задовольнятиме умовам (12) і (13) з урахуванням співвідношень (9) і (10).

Хвилі вздовж стисливих шарів. Довгохвильове (низькочастотне) наближення. Розглянемо закономірності поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів у шаруватому стисливому композитному матеріалі з початковими напруженнями. Розв'язок рівняння (11) представимо в формі

$$\Psi'^{(j)(0)}(y_3)=A_5^{(j)}e^{ik\alpha_3^{(j)}y_3}+A_6^{(j)}e^{-ik\alpha_3^{(j)}y_3}; \quad A_n^{(j)}=\text{const}. \tag{14}$$

Введемо в розв'язок (14) для кожного шару нові константи $B_n^{(j)}$ ($n=5,6$) і запишемо його відносно середини кожного із шарів. В цьому випадку (14) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\Psi'^{(1)(0)}(y_3)&=B_5^{(1)}e^{ik\alpha_3^{(1)}\left(y_3-\frac{1}{2}h'^{(1)}\right)}+B_6^{(1)}e^{-ik\alpha_3^{(1)}\left(y_3-\frac{1}{2}h'^{(1)}\right)};\\ \Psi'^{(2)(0)}(y_3)&=B_5^{(2)}e^{ik\alpha_3^{(2)}\left(y_3+\frac{1}{2}h'^{(2)}\right)}+B_6^{(2)}e^{-ik\alpha_3^{(2)}\left(y_3+\frac{1}{2}h'^{(2)}\right)}.\end{aligned} \tag{15}$$

В (14) і (15) через $\alpha_3^{(j)}$ відповідно до (11) позначені наступні величини:

$$\alpha_3^{(j)}=\sqrt{\omega'^{(j)-1}_{3113}\left(\rho'^{(j)}C^2-\omega'^{(j)}_{1221}\right)}; \quad C=\omega k^{-1}. \tag{16}$$

У розглянутому випадку для шаруватих композитних стисливих матеріалів з початковими напруженнями вихідну задачу можна розділити на дві незалежні задачі: 1) задача для симетричної хвилі кручення (у кожному шарі переміщення $u_\theta^{(j)}$ симетричні відносно середини кожного шару), що поширюється вздовж осі Or'; 2) задача для антисиметричної хвилі кручення (у кожному шарі величини $u_\theta^{(j)}$ антисиметричні відносно середини кожного шару), що поширюється вздовж осі Or'. Надалі розглянемо окремо випадки задач для симетричних та антисиметричних хвиль кручення.

Симетричні хвилі кручення. Для даного випадку в (15) приймемо такі залежності:

$$B_5^{(j)} = B_6^{(j)}. \tag{17}$$

Із (17), (15) і (9) випливає, що величини $u_\theta^{(j)}$ будуть симетричними відносно середини кожного із шарів.

У випадку нежорсткого контакту між шарами (проковзування шарів) композитного матеріалу умови неперервності і періодичності мають вигляд

$$\begin{aligned} &B_5^{(1)} k\alpha_3^{(1)} \omega_{3113}'^{(1)} \sin\frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} = 0; \\ &B_5^{(2)} k\alpha_3^{(2)} \omega_{3113}'^{(2)} \sin\frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Тоді з (9), (10), (12), (13), (15), (17), (18) випливає, що для нежорсткого контакту шарів умови неперервності і періодичності збігаються.

Дисперсійне рівняння при нежорсткому контакті шарів має вигляд

$$\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)} \omega_{3113}'^{(1)} \omega_{3113}'^{(2)} \sin\frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} \sin\frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0. \tag{19}$$

При довгохвильовому наближенні дисперсійне рівняння (19) записується так:

$$(\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)})^2 = 0. \tag{20}$$

Рівняння (19) можна розв'язати аналітично. Розв'язки цього рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} &C_1 = \sqrt{\frac{\omega_{1221}'^{(1)}}{\rho'^{(1)}}}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\omega_{1221}'^{(2)}}{\rho'^{(2)}}}; \\ &C_3 = \sqrt{\frac{\omega_{1221}'^{(1)}}{\rho'^{(1)}} + \frac{4\pi^2 n^2 \omega_{3113}'^{(1)}}{\rho'^{(1)} k^2 h'^{(1)2}}}; \quad C_4 = \sqrt{\frac{\omega_{1221}'^{(2)}}{\rho'^{(2)}} + \frac{4\pi^2 n^2 \omega_{3113}'^{(2)}}{\rho'^{(1)} k^2 h'^{(2)2}}}; \qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{21}$$

Із (19) і (21) випливає, що між шарами композитного матеріалу у випадку їх проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження симетричних хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень.

Для довгохвильового наближення швидкості поширення симетричних хвиль кручення для кожного з шарів будуть визначатися першими двома формулами (21).

Відзначимо, що перші два вирази у формулах (21) визначають швидкості поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

Антисиметричні хвилі кручення. В цьому випадку в представленні амплітудної функції $\Psi'^{(j)(0)}$ у формі (15) для двох сусідніх шарів приймемо такі залежності між сталими величинами:

$$B_5^{(j)} = -B_6^{(j)}. \tag{22}$$

За умови (22) із співвідношень (9) та (15) випливає, що переміщення $u_\theta^{(j)}$ будуть антисиметричними відносно середин відповідних шарів.

У випадку проковзування шарів композитного матеріалу умови неперервності і періодичності для антисиметричних хвиль кручення записуються так:

$$\begin{aligned} &B_5^{(1)} k\alpha_3^{(1)} \omega'^{(1)}_{3113} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} = 0; \\ &B_5^{(2)} k\alpha_3^{(2)} \omega'^{(2)}_{3113} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Із співвідношень (9), (10), (12), (13), (15), (22), (23) випливає, що для даного виду хвиль кручення при проковзуванні шарів матеріалу умови неперервності і періодичності збігаються.

Дисперсійне рівняння для антисиметричних хвиль кручення при нежорсткому контакті шарів має вигляд

$$\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)} \omega'^{(1)}_{3113} \omega'^{(2)}_{3113} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0\,. \tag{24}$$

Довгохвильове наближення дисперсійного рівняння (24) записується так:

$$\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)} = 0. \tag{25}$$

Розв'язавши рівняння (24), отримаємо вирази для швидкостей поширення антисиметричних хвиль кручення в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів у вигляді

$$\begin{aligned} &C_1 = \sqrt{\frac{\omega'^{(1)}_{1221}}{\rho'^{(1)}}}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\omega'^{(2)}_{1221}}{\rho'^{(2)}}}; \\ &C_3 = \sqrt{\frac{\omega'^{(1)}_{1221}}{\rho'^{(1)}} + \frac{\omega'^{(1)}_{3113}}{\rho'^{(1)}} \frac{\pi^2 (1+2n)^2}{k^2 h'^{(1)2}}}; \quad C_4 = \sqrt{\frac{\omega'^{(2)}_{1221}}{\rho'^{(2)}} + \frac{\omega'^{(2)}_{3113}}{\rho'^{(2)}} \frac{\pi^2 (1+2n)^2}{k^2 h'^{(2)2}}}; \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

Із (24) та (26) випливає, що між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження антисиметричних хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень.

Для довгохвильового наближення швидкості поширення антисиметричних хвиль кручення для кожного з шарів будуть визначатися першими двома співвідношеннями у формулах (26).

Варто відзначити, що перші два вирази у формулах (26), як і у випадку симетричних хвиль кручення, визначають швидкості поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями для шарів першого і другого типу відповідно.

Висновки. Таким чином, у даній роботі досліджено поширення хвиль кручення у шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадок поширення хвиль кручення уздовж шарів. Отримано дисперсійні рівняння для симетричних і антисиметричних хвиль, а також їх довгохвильові наближення. Показано, що при проковзуванні шарів композитного матеріалу не відбувається їх взаємодії, а швидкості розповсюдження симетричних і антисиметричних хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частично ограниченных телах. Saarbrucken: LAMBERT, 2016. 505 с.
2. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kyiv: Akademperiodyka, 2024. 668 p.
3. Torsion in Dynamics. Stress and Deformation. Analysis (modern-physics.org). 2025. Modern Physics Insights: Discover, Understand, Innovate.
4. Неруйнівний контроль і технічна діагностика (Ред. З.Т. Назарчук). Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2001. 1134 с.
5. Шульга Н.А., Томашевский В.Т. Технологические напряжения и деформации в материалах. Киев: «А.С.К», 1997. 394 с. (Механика композитов: в 12 т. / Ред. А.Н. Гузь; Т. 6).
6. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. Saarbrucken: LAMBERT, 2016. 501 с.
7. Глухов А.Ю., Бабич С.Ю., Млавець Ю.Ю., Рейтій О.К. Хвилі кручення в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. *Наук. вісник Ужгородського університету. Серія Математика і інформатика.* 2024. **45**, № 2. С. 164—171. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).164-171

Надійшла до редакції 27.01.2025

REFERENCES

1. Guz, A. N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses: in 2 parts. Part 2. Waves in partially constrained bodies. Saarbrucken: LAMBERT (in Russian).
2. Guz, A. N. (2024). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kyiv: Akademperiodyka.
3. Torsion in Dynamics. Stress and Deformation. Analysis (modern-physics.org). 2025. Modern Physics Insights: Discover, Understand, Innovate.
4. Nazarchuk, Z. T. (Ed.). (2001). Non-destructive testing and technical diagnostics. Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine (in Ukrainian).
5. Shulga, N. A. & Tomashevsky, V. T. (1997). Technological stresses and deformations in materials. K.: "A.S.K". (Mechanics of composites: in 12 vol. / Ed. A.N. Guz; Vol. 6) (in Russian).
6. Guz, A. N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses: in 2 parts. Part 1. General questions. Waves in infinite bodies and surface waves. Saarbrucken: LAMBERT (in Russian).
7. Gluchov, A. Yu., Babich, S. Yu., Mlavets, Yu. Yu. & Reity, O. K. (2024). Torsion waves in layered composite incompresible materials with initial stresses at the slip of layers. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Mathematics and Informatics, 45, No. 2, pp. 164-171 (in Ukrainian). https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).164-171

Received 27.01.2025

A.Yu. Gluchov, https://orcid.org/0009-0009-0579-9046

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: ndrew.gl@gmail.com

ON THE PROPAGATION OF TORSIONAL WAVES IN LAYERED COMPOSITE MATERIALS WITH INITIAL STRESSES UNDER THE LAYERS' SLIPPAGE

The study of torsional waves plays an important role in various fields of science and technology, providing innovative approaches to solving complex problems and improving existing technologies. In particular, torsional waves are widely used in materials science, especially in the study and diagnosis of material properties. Within the framework of the linearised theory of elasticity for bodies with initial stresses, the formulation and method of solving problems on propagation of torsional waves in layered composite compressible prestressed materials at slipping of layers are considered. The paper deals with the propagation of torsional waves in the radial direction along layers in composite compressible materials with initial stresses. The problem is reduced to the construction of solutions of the equation with respect to the amplitude function under the conditions of continuity at the interfaces and periodicity conditions, according to the Floquet theory. Dispersion equations and their long-wave approximations are obtained for symmetric and antisymmetric torsional waves. The dispersion equations are solved analytically. In the case of slip, there is no interaction between the composite material layers. The propagation velocities of symmetric and antisymmetric torsional waves in each layer depend on the mechanical parameters of the layer material, layer thickness and initial stresses. In the long-wave approximation, the propagation velocities of symmetric and antisymmetric torsional waves for each layer are equal to the propagation velocities of transverse waves in a homogeneous material with initial stresses in the first and second layers, respectively.

Keywords*: laminated composite, compressible hyperelastic material, initial (residual) stresses, torsion waves, dispersion equation, long-wave approximation.*