

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.01.022>

УДК 539.3

Я.Я. Рушицький, <https://orcid.org/0000-0002-0839-5030>

В.М. Юрчук, <https://orcid.org/0000-0003-4686-1052>

Інститут механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, Київ, Україна

E-mail: rushch@inmech.kyiv.ua yurchuk@inmech.kyiv.ua

Про один нелінійний хвильовий ефект, який виникає за генерації другої гармоніки

Представлена академіком НАН України А.А. Мартинюком

Засвідчено існування (описано і прокоментовано) нелінійного хвильового ефекту, який супроводжує класичний ефект утворення другої гармоніки гармонічної хвилі на виході з квадратично нелінійного середовища, коли на вході генерується перша гармоніка. Ефект полягає в несиметричному деформуванні профіля другої гармоніки, яке відбувається з моменту початку руху хвилі і виявляється в зміщенні нулів вліво та вершин вгору. В результаті поєднання двох ефектів — присутності другої гармоніки в другому наближенні і деформуванні її класичного профіля — отриманий за двома наближеннями профіль стає несиметричним.

Ключові слова: нелінійно пружна гармонічна хвиля, генерація другої гармоніки, явище деформування профіля другої гармоніки.

Вступ. Вказаний у назві статті ефект супроводжує класичний хвильовий ефект утворення другої гармоніки гармонічної хвилі на виході з квадратично нелінійного середовища, коли на вході генерується перша гармоніка. Теоретичну задачу про утворення другої гармоніки часто використовують як приклад у нелінійній оптиці як таку, що адекватно описує експерименти з генерації другої гармоніки. Класичний тест з оптичною хвилею полягає в наступному: червоне світло (частота 400 Гц) рубінового лазера перетворюється на фіолетове світло (частота 800 Гц), коли світло лазера пропускають крізь кристал дигідрофосфату аміаку [1, 2]. Один з простих варіантів теоретичної задачі про утворення другої гармоніки в рамках нелінійної теорії пружності і теорії нелінійних пружних хвиль формулюється таким чином.

Для опису нелінійності деформування застосовується п'ятиконстантна модель Мернагана [3—5] і з ряду можливих нелінійних хвильових рівнянь вибирається квадратично нелінійне, яке відповідає схемі поширення плоскої поздовжньої хвилі зміщення $u_1(x, t)$ вздовж осі абсцис при виборі декартової прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$ [4, 5]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]. \quad (1)$$

Ц и т у в а н н я: Рушицький Я.Я., Юрчук В.М. Про один нелінійний хвильовий ефект, який виникає за генерації другої гармоніки. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 1. С. 22—30. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.01.022>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Тут ρ — густина; u_k — зміщення; λ, μ, A, B, C — пружні константи моделі Мернагана.

Отже, проведене дослідження відноситься до механіки і стосується конкретного типу хвиль (плоскі поздовжні) і конкретного середовища поширення хвиль (нелінійно пружно деформівне за моделлю Мернагана).

Мета дослідження — виявлення і коментування нового механічного хвильового явища.

Квадратично нелінійне хвильове рівняння аналізувалося, головним чином, за допомогою трьох методів — методу повільно змінних амплітуд (методу Ван дер Поля), методу послідовних наближень (методу збурень, методу малого параметра), методу обмеження на градієнт зміщення.

1. Про метод повільно змінних амплітуд і розв’язування цим методом рівняння (1) стосовно гармонічної хвилі.

Цей метод ще широко відомий як метод Ван дер Поля завдяки його фундаментальним роботам при застосуванні цього методу в області нелінійної теорії коливань [3]. Такі ж фундаментальні роботи стосовно застосування методу в теорії нелінійних гармонічних хвиль належать Блоембергену [1].

Основне припущення методу — нелінійність є слабкою. Рівняння (1) відповідає цьому припущенню, оскільки модель Мернагана описує слабку нелінійність, починаючи з малих значень деформації. З основного припущення випливає наступне — розв’язок нелінійного рівняння у вигляді гармонічної хвилі є близьким до лінійного розв’язку. Термін “повільно змінна амплітуда” означає, що амплітуда хвилі повинна змінюватися дуже повільно на відстані однієї довжини хвилі. Аналізується лінійний розв’язок у вигляді гармонічної хвилі і нелінійна хвиля характеризується невідомою змінною амплітудою і приймається у вигляді

$$u_1(x, t) = A_1(x)e^{i(k_1x - \omega t)}$$

або

$$u_1(x, t) = \text{Re}\{A_1(x)e^{i(k_1x - \omega t)}\} = a_1(x) \cos(k_1x - \omega t). \quad (2)$$

Стандартно вивчається взаємодія трьох хвиль-учасниць і розв’язок шукається як сума

$$u_1(x_1, t) = \sum_{m=1}^3 A_{1m}(x_1)e^{i\sigma_m}, \quad \sigma_m = k_{1m}x_1 - \omega_m t. \quad (3)$$

Процедура методу передбачає далі побудову трьох так званих вкорочених рівнянь, у якій вводяться обмеження: відсутність енергії ззовні і збереження в рівняннях лише добутків амплітуд (враховуються тільки пряма взаємодія хвиль і їх самогенерація). Далі задається умова синхронізації частот хвиль-учасниць

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3 \quad (4)$$

і будуються три еволюційні рівняння, в яких необхідно прийняти умову синхронізації хвильових чисел

$$k_{11} \pm k_{12} = k_{13}. \quad (5)$$

Найпростішою задачею про взаємодію трьох хвиль є задача про самогенерацію першої гармоніки. Перша і друга хвилі генеруються ззовні і вважаються такими, що мають вигляд гармонічної хвилі (2) з заданими постійними параметрами і ці параметри ідентичні $A_1 = A_2$, $k_1 = k_2$, $\omega_1 = \omega_2$. Третя хвиля не збуджується ззовні $A_3(0) = 0$, а її параметри визначаються умовами синхронізації (4), (5) і тому це друга гармоніка з невідомою амплітудою $A_{1m}(x_1)e^{2i(k_1x_1 - \omega_1 t)}$. Амплітуда визначається з третього еволюційного рівняння

$$A_3(x_1) = -\frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A + 3B + C)}{(\lambda + 2\mu)} \right] (k_{L1})^2 (A_1)^2 x_1. \quad (6)$$

Розв'язок (3) набуває вигляду

$$u_1(x_1, t) = A_1 e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} - \frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A + 3B + C)}{(\lambda + 2\mu)} \right] (k_{L1})^2 (A_1)^2 x_1 e^{2i(k_1 x_1 - \omega t)}. \quad (7)$$

Таким чином, з початку руху хвилі у вигляді першої гармоніки, друга гармоніка яка виникає внаслідок механізму самогенерації хвилі, приєднується до першої з амплітудою, яка зростає з часом поширення хвилі. Друга гармоніка поступово накладається на першу і через деякий час стає домінуючою. Вважається, що у такий спосіб теоретично описується генерація 2-ї гармоніки.

2. Про метод послідовних наближень і розв'язування цим методом рівняння (1) стосовно гармонічної хвилі. Основною особливістю методу є введення малого параметра [4, 5]. Згідно з методом, зміщення як функція $\bar{u}(x, t, \varepsilon)$ (ε — малий параметр) шукається у вигляді збіжного ряду

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{u}^{(n)}(x, t) = \bar{u}^{(0)}(x, t) + \varepsilon \bar{u}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 \bar{u}^{(2)}(x, t) + \dots. \quad (8)$$

Припускається, що нульовий член є розв'язком спорідненого з (1) лінійного хвильового рівняння $u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = 0$. Розв'язок нелінійного рівняння (1) шукається у вигляді послідовних наближень

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}(x_1, t, \varepsilon = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}^{(n)}(x_1, t) = \bar{u}^{(0)}(x, t) + \bar{u}^{(1)}(x_1, t) + \bar{u}^{(2)}(x_1, t) + \dots. \quad (9)$$

Особливістю та характерною перевагою цього методу є те, що довільне наближення знаходиться як розв'язок неоднорідного лінійного рівняння

$$u_{1,tt}^{(n)} - (c_L)^2 u_{1,11}^{(n)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(n-1)} u_{1,1}^{(n-1)}. \quad (10)$$

Отже, для знаходження n -го наближення необхідно знати лише $(n-1)$ -е наближення (вже відоме) і розв'язувати неоднорідне лінійне хвильове рівняння. Цей метод добре працює в теорії хвиль, коли для збереження практичної збіжності амплітуда наближення зменшується зі збільшенням його номера.

Нехай хвиля генерується імпульсом $u_1(x_1, t=0) = u_{1o} \cos k_L x_1$ (u_{1o} — початкова амплітуда, k_L — хвильове число) і має вигляд першої гармоніки гармонічної плоскої позовжньої хвилі [4, 6]

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) \quad (\omega \text{ — частота хвилі}). \quad (11)$$

Далі класичний лінійний розв'язок (11) рівняння $u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = 0$ вважається першим наближенням. Друге наближення $u_1^{(2)}(x_1, t)$ знаходиться як розв'язок неоднорідного лінійного хвильового рівняння

$$u_{1,tt}^{(2)} - (c_L)^2 u_{1,11}^{(2)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(1)} u_{1,1}^{(1)} \quad (12)$$

і має вигляд другої гармоніки з певним множником

$$u_1^{(2)}(x_1, t) = x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \quad (13)$$

Наближений розв'язок в рамках перших двох наближень є сумою [4, 5]

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (14)$$

Розв'язок (14) включає першу гармоніку з постійною амплітудою і другу гармоніку зі змінним множником x_1 . Вважається, що саме завдяки цьому множнику зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, амплітуда другої гармоніки зростає і вклад другої гармоніки у загальний рух хвилі (14) стає домінуючим. Хвиля починає рух як перша гармоніка і згодом продовжує рух як друга гармоніка. Так відбувається генерація другої гармоніки і це класичний нелінійний хвильовий ефект.

3. Про метод обмеження на градієнт зміщення і розв'язування цим методом рівняння (1) стосовно гармонічної хвилі. Ідея методу полягає у введенні в нелінійне хвильове рівняння змінної фазової швидкості хвилі і викладена в піонерських публікаціях Фу і Скотта [7, 8]. Цей метод застосовується при аналізі нелінійних хвильових рівнянь стосовно хвиль з поодинокими профілями, але він успішно працює і для випадку гармонічної хвилі (хвилі з періодичним профілем) [9—11]. Первинне рівняння повинно мати особливу структуру. Рівняння (1) має саме таку структуру: праву нелінійну частину рівняння можна перенести в ліву частину і записати формально нелінійне рівняння як лінійне хвильове рівняння зі змінною швидкістю хвилі v :

$$u_{1,tt} - \{(v_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1}\} u_{1,11} = 0 \rightarrow u_{1,tt} - v^2 u_{1,11} = 0, \quad (15)$$

$$v = v_L \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}, \quad \alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)].$$

Метод дозволяє розглядати хвилю Д'Алямбера, профіль якої вважається довільною функцією F , яка описує хвилю $u(x_1, t) = F(\sigma)$, де вводяться стандартна змінна фази хвилі $\sigma = a(x_1 - vt)$ і параметр a , що задається і характеризує довжину хвилі для гармонійних хвиль і підосхву хвилі для поодиноких хвиль.

Далі розглядається корінь у представленні змінної швидкості $v = v_L \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$ з припущенням, що значення цієї швидкості мало відхиляється від постійного значення швидкості плоскої поздовжньої лінійної хвилі v_L . Це припущення рівносильне обмеженню $|\alpha u_{1,1}| \ll 1$, яке є обмеженням на величину градієнта зміщення і дозволяє отримати ланцюжок наближених рівностей

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} \rightarrow \sigma \approx [a(x_1 - v_L t) - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t] \rightarrow$$

$$u_1(x_1, t) \cong F[a(x_1 - v_L t) - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t] = F[\tilde{\sigma} = a(x_1 - v_L t) - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t].$$

Тут вводиться ще одне обмеження $|\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t| \ll 1$, необхідне для наближеного представлення змінної фази хвилі і градієнта зміщення

$$u_{1,1}(x_1, t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_{x_1} \approx a F'_\sigma(\sigma),$$

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'_{,1}(\sigma) a \delta = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'_{,1}(\sigma)]^2. \quad (16)$$

У випадку гармонічного профіля $F(\sigma) = u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t)$ формула (16) набуває вигляду

$$u_1(x_1, t) = a^o e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2)c_L t \alpha (k_L)^2 (a^o)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}. \quad (17)$$

Отримане наближене представлення (17) розв'язку рівняння (1) описує нелінійний ефект — початково перша гармоніка доповнюється породженою нелінійністю матеріалу другої гармоніки. З точки зору хвильової механіки, наявність другої гармоніки означає спотворення початкового профіля хвилі. Так еволюціонує хвиля і згодом домінує друга гармоніка.

4. Щодо сутності нового нелінійного хвильового ефекту для гармонічної хвилі. Зберемо разом формули (7), (14), (17), які, як вважається, описують генерацію другої гармоніки трьома різними методами:

М1 (повільно змінних амплітуд)

$$u_1(x_1, t) = A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} - \frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A + 3B + C)}{(\lambda + 2\mu)} \right] (k_{L1})^2 (A_1)^2 x_1 e^{2i(k_1 x - \omega t)},$$

М2 (послідовних наближень)

$$u_1(x_1, t) = u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{10})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t),$$

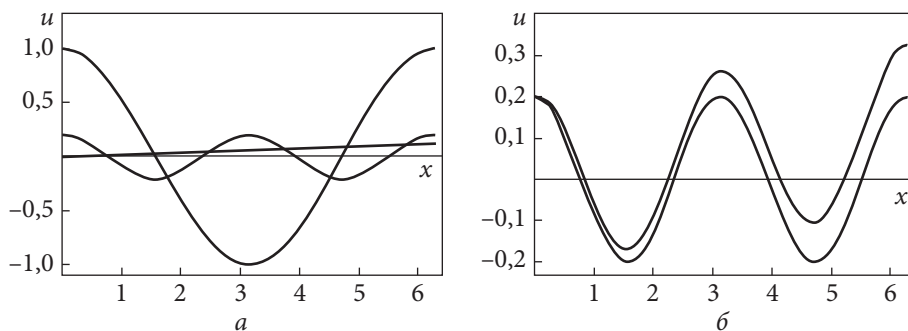


Рис. 1. Профілі хвиль для гіпотетичного випадку

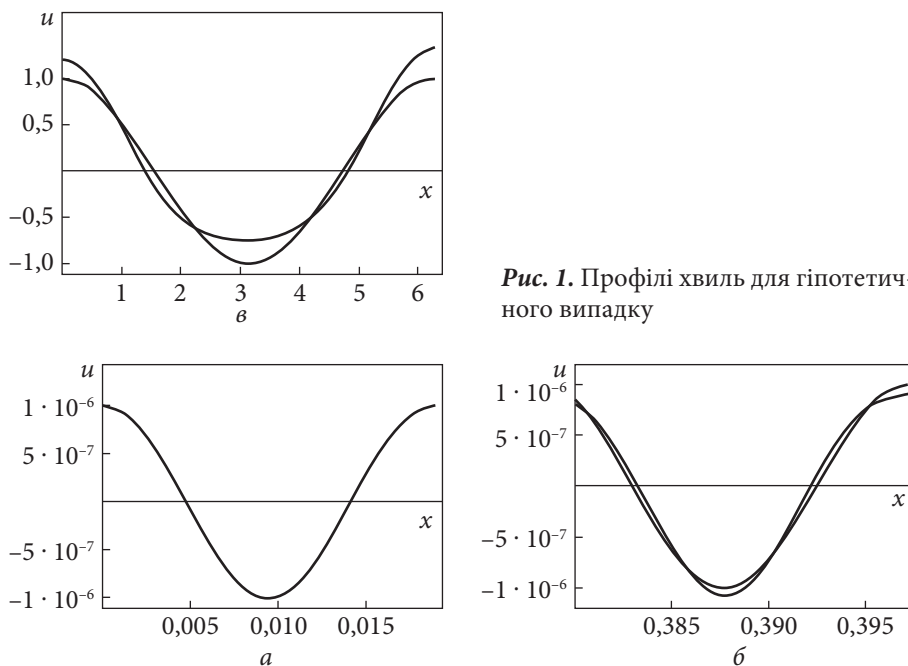


Рис. 2. Профілі хвиль для реального випадку

М3 (обмеження на градієнт амплітуди)

$$u_1(x_1, t) = a^o e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2)c_L t \alpha(k_L)^2 (a^o)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}$$

і порівняємо перші та другі доданки.

Перші доданки є ідентичними і описують першу гармоніку. Другі доданки дуже подібні, але не ідентичні і їх доцільно записати в більш уніфікованому вигляді. Оминемо при цьому ідентичні множники у вигляді другої гармоніки змінної x_1 , квадратів початкової амплітуди хвилі та хвильового числа:

$$M1: -\frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{2(\lambda + 2\mu)}, M2: \frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{8(\lambda + 2\mu)},$$

$$M3: -\frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{4(\lambda + 2\mu)}.$$

Таким чином, уніфіковані множники є постійними для вибраного матеріалу, мають різні знаки і відрізняються між собою множником.

Оцінимо порядок множника $-\frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{4(\lambda + 2\mu)}$. Цей множник для переважної більшості реальних матеріалів (металів, сплавів, полімерів) є додатним, оскільки вираз $(A + 3B + C)$ є від'ємним. Він теж перевищує постійні Ляме на порядок і тому є числом з інтервалу $(10, 30)$. Хвильове число для вказаних матеріалів і при виборі частоти з ультразвукового діапазону $\omega \sim 10^4 - 10^6$ має порядок $k_L = (\omega / v_L) \sim 10 - 10^3$. Відповідно, довжина хвилі має порядок $L \sim 10^{-1} - 10^{-3}$. Початкова амплітуда хвилі зазвичай вибирається в діапазоні $u^o \sim 10^{-4} - 10^{-6}$.

Представимо розв'язок (14) у вигляді, зручному для порівняння величин амплітуд першої та другої гармонік

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \left[\cos \sigma + \frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{8(\lambda + 2\mu)} u_{1o} k_L^2 x_1 \cos 2\sigma \right], \sigma = k_L x_1 - \omega t. \quad (18)$$

Формула (18) дає змогу порівняти одиничну (1 м) амплітуду першої гармоніки з амплітудою другої гармоніки, для якої використовуємо запис через середній порядок її величини 10^{-1} . Отже, щоб другій амплітуді досягнути величини амплітуди першої гармоніки, хвиля повинна пройти відстань 10 м, що складає 1000 довжин хвилі. Для домінування другої гармоніки потрібен ще такий же шлях. Цей приклад засвідчує істотний вплив вибору параметрів матеріалу і хвилі на виявлення домінування виразу з другою гармонікою.

Записані вище міркування складають підставу для загальноприйнятого твердження, що при поширенні першої гармоніки з часом вона перетворюється у другу. При цьому акцентується увага на факті збільшення амплітудного множника перед другою гармонікою.

Це виглядає дивно, але ніхто не акцентував увагу на тому, що другий доданок у (18) містить функцію $x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t)$. І вона вже є деформованою другою гармонікою.

Виберемо для прикладу формулу (18) з осередненим значенням множника перед другою гармонікою

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} [\cos(k_L x_1 - \omega t) + 0,1 x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t)]. \quad (19)$$

Спочатку розглянемо простий приклад, де покажемо графічно деформацію другої гармоніки. На рис. 1, а зображені графіки прямої лінії $y = x_1$, недеформованої $\cos 2(k_L = 10^2)x_1$ і деформованої $x_1 \cos 2(k_L = 10^2)x_1$ функцій на проміжку $x = [0; (2\pi = 6,2832)10^{-2}]$ (одному періоду першої гармоніки).

На рис. 1, а зображені графіки прямої лінії $y = 0,02x_1$, першої $\cos x_1$ і другої $0,2 \cos 2x_1$ гармонік на проміжку $x = [0; (2\pi = 6,2832)10^{-2}]$ (одному періоду першої гармоніки).

Рис. 1, б відповідає першому періоду другої гармоніки і містить два графіки — чистої недеформованої гармоніки $0,2 \cos 2x_1$ і деформованої функції $0,2x_1 \cos 2x_1$. У даному випадку виявляється істотна відмінність між графіками — як якісна, так і кількісна.

Графік 1, в відповідає формулі (19) і теж стосується лише першого періоду першої гармоніки. Нижній графік показує початковий профіль верхній — деформований. Тут

більш наглядно спостерігається несиметричне деформування початкового профіля для розв'язку (19).

На рис. 2 зображені графіки, які відповідають формулі (18) і вже реальному випадку композитного матеріалу і довжині хвилі 0,018. На рис. 2, а зображено початковий профіль хвилі (профіль першої гармоніки) з заданою амплітудою і довжиною хвилі. На рис. 2, б показані початковий профіль і профіль хвилі, де враховані перше і друге наближення при проходженні хвилею 25-ти довжин хвилі.

При аналізі кількісної відмінності слід врахувати, що задані масштаби на осях координат відрізняються на порядки.

Основне спостереження полягає у тому, що насправді другий доданок в (21) вносить зміну в профіль першої гармоніки. Ця зміна вводить несиметрію стосовно горизонтальної і вертикальної осей і викликана такою ж несиметрією деформованої другої гармоніки. Вертикальна несиметрія може бути спостережена вже на першому періоді, коли амплітуда крайнього лівого горба залишається незмінною, а амплітуда крайнього правого зростає на певну величину (горб піднімається вгору). Горизонтальна виявляється у тому, що ліві і праві схили горбів деформуються по-різному — праві стають більш похилими. Крім того, нулі зміщуються вліво.

Висновки. Розв'язки, які відповідають трьом методам наближеного аналізу нелінійного хвильового рівняння, що описує еволюцію гармонічної плоскої поздовжньої хвилі при її поширенні в квадратично нелінійно пружному матеріалі, виявляють новий не описаний і не коментований раніше нелінійний хвильовий ефект — несиметричне деформування профіля другої гармоніки як відносно горизонтальної, так і вертикальної осей. Відповідно, цей ефект (явище) спостерігається і в еволюції першої гармоніки — її початковий симетричний профіль трансформується в несиметричний профіль, який виявляє тенденцію до утворення несиметрично деформованого профіля другої гармоніки.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Bloembergen N. *Nonlinear Optics*. 4th Ed. Singapore: World Scientific Pub Co Inc., 1996. 190 p.
2. Yariv A. *Quantum Electronics*. New York: John Wiley, 1967. 328 p.
3. Murnaghan F. *Finite Deformation in an Elastic Solid*. 2nd ed. New York: John Wiley, 1967. 162 p.
4. Rushchitsky J.J. *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Heidelberg: Springer, 2014. 455 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8>
5. Rushchitsky J. *Theory of Waves in Materials*. Copenhagen: Ventus Publishing ApS., 2012. 246 p.
6. Krasilnikov V.A., Krylov V.V. *Введение в физическую акустику*. Москва: Наука, 1984. 326 с.
7. Fu Y.B., Scott N.H. Propagation of simple waves and shock waves in a rod of slowly varying cross-sectional area. *Int. J. Engng. Sci.* 1994. **32**, № 1. P. 35—44. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)90147-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90147-3)
8. Fu Y.B., Scott N.H. The transition from acceleration wave to shock wave. *Int. J. Engng. Sci.* 1991. **29**, № 5. P. 617—624. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90066-C](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90066-C)
9. Rushchitsky J., Yurchuk V. One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials. *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 3. P. 282—290. <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0751-9>
10. Rushchitsky, J. Yurchuk, V. A. Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 1. P.104—110. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0794-6>
11. Rushchitsky J., Yurchuk V. Comparison of Evolution of Five Types of Elastic Waves (harmonic, Gauss, Whittaker, MacDonald, Friedlander Initial Profiles). Chapter 25: *Advanced Problems of Mechanics*, Berlin, Springer, 2023. P. 435—468. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_25

Надійшла до редакції 04.01.2025

REFERENCES

1. Bloembergen, N. (1996). *Nonlinear Optics*. 4th Ed. Singapore: World Scientific Pub Co Inc.
2. Yariv, A. (1967). *Quantum Electronics*. New York: John Wiley.
3. Murnaghan, F. (1967). *Finite Deformation in an Elastic Solid*. 2nd ed. New York: John Wiley.
4. Rushchitsky, J. J. (2014). *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8>
5. Rushchitsky, J. (2012). *Theory of Waves in Materials*. Copenhagen: Ventus Publishing ApS.
6. Krasilnikov, V. A. & Krylov, V. V. (1984). *Vvedeniie v fizicheskuiu akustiku*. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Fu, Y. B. & Scott, N. H. (1994). Propagation of simple waves and shock waves in a rod of slowly varying cross-sectional area. *Int.J. Engng.Sci.*, 32, No. 1, pp. 35-44. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)90147-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90147-3)
8. Fu, Y. B. & Scott, N. H. (1991). The transition from acceleration wave to shock wave. *Int.J. Engng.Sci.*, 29, No. 5, pp. 617-624. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90066-C](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90066-C)
9. Rushchitsky, J. & Yurchuk, V. (2016). One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials. *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 3, pp. 282-290. <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0751-9>
10. Rushchitsky, J. & Yurchuk, V. A. (2017). Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles. *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 1, pp. 104-110. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0794-6>
11. Rushchitsky, J. & Yurchuk, V. (2023). Comparison of Evolution of Five Types of Elastic Waves (harmonic, Gauss, Whittaker, MacDonald, Friedlander Initial Profiles). Chapter 25 in the book: *Advanced Problems of Mechanics.*, Berlin, Springer, pp.435-468. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_25

Received 04.01.2024

J.J. *Rushchitsky*, <https://orcid.org/0000-0002-0839-5030>

V.M. *Yurchuk*, <https://orcid.org/0000-0003-4686-1052>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: rushch@inmech.kyiv.ua, yurchuk@inmech.kyiv.ua

ON CERTAIN NONLINEAR WAVE EFFECT, WHICH OCCURS WHEN THE SECOND HARMONIC IS GENERATING

The problem under consideration belongs to mechanics. A specific type of waves (plane longitudinal waves) and a specific propagation medium (nonlinear elastically deforming according to the Murnaghan model) are selected and analyzed. The main goal of the analysis is to detect and comment on a new mechanical wave phenomenon. As a result, the existence of the nonlinear wave effect is certified (described and commented on) that accompanies the classical effect of forming the second harmonic of a harmonic wave at the output of a quadratically nonlinear medium when the first harmonic is generated at the input. The effect consists in asymmetric deformation of the profile of the formed second harmonic, which appears at the beginning of the wave motion and manifests itself in the shift of zeros to the left and peaks upward. As a result of the combination of two effects — the presence of the second harmonic in the second approximation and the deformation of its classical profile — the profile obtained in the two approximations becomes asymmetric.

Keywords: *nonlinear elastic harmonic wave, generation of the second harmonic, phenomenon of deformation of the second harmonic profile.*