ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.02.024
УДК 539.375

В.Л. Богданов, https://orcid.org/0000-0001-9864-9120

О.І. Лесик, https://orcid.org/0009-0002-5999-8197

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
E-mail: bogd1965@gmail.com, alexey27lesik@gmail.com

Напружено-деформований стан попередньо напруженої півплощини з приповерхневою тріщиною нормального відриву

Представлена академіком НАН України В.М. Назаренком

Запропоновано аналітико-чисельний метод дослідження плоскої задачі механіки руйнування для напівобмеженого тіла, що містить приповерхневу тріщину нормального відриву, паралельну граничній поверхні, з урахуванням дії спрямованих вздовж тріщини початкових (залишкових) напружень. Метод базується на співвідношеннях тривимірної лінеаризованої механіки деформівних тіл. Із застосуванням подань загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні гармонічні функції та з використанням інтегрального перетворення Фур'є сформульовану крайову задачу зведено спочатку до парних інтегральних рівнянь, а потім до системи неоднорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. З аналізу асимптотичного розподілу напружень в околі тріщини зроблено висновок про збіг порядку сингулярності в розподілі напружень біля кінчиків тріщини в задачі, що розглядається, з порядком сингулярності, який отримується в плоскій задачі для півплощини з тріщиною нормального відриву за відсутності початкових напружень, та отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень. Для високоеластичного (гіперпружного) тіла, матеріал якого описується пружним потенціалом Трелоара (тіло неогуківського типу), обчислено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від початкових (залишкових) напружень та оцінено вплив на них ефекту взаємодії тріщини та граничної поверхні тіла. Також виявлено резонансне зростання значень коефіцієнтів інтенсивності напружень при досягненні початковими стискаючими напруженнями певних критичних значень, що відповідають для даного матеріалу локальній втраті стійкості стану рівноваги в околі тріщини.

Ключові слова: *півплощина з приповерхневою тріщиною, тріщина нормального відриву, початкові (залишкові) напруження, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

Цитування: Богданов В.Л., Лесик О.І. Напружено-деформований стан попередньо напруженої півплощини з приповерхневою тріщиною нормального відриву . *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 2. С. 24—41. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.02.024

Вступ. Практично всім елементам конструкцій властиві початкові (за іншою термінологією — залишкові, технологічні) напруження, виникнення яких зумовлено технологічними операціями, що необхідні для виготовлення матеріалів, або складання конструкцій [1, 2]. Їх необхідно враховувати у виробничих процесах для створення матеріалів та при визначенні міцності і ресурсу виробів з них, особливо за наявності концентраторів напружень у вигляді тріщин.

Особливістю проблем механіки руйнування тіл з тріщинами за наявності спрямованих вздовж тріщин початкових напружень є те, що з розв'язку відповідних задач лінійної теорії пружності випливає, що ці напруження не входять до виразів для коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН), *J*-інтеграла, величини розкриття тріщини та інших параметрів руйнування і, отже, не можуть бути враховані в класичних критеріях руйнування Гріффітса—Ірвіна, Черепанова—Райса, критичного розкриття тріщин чи їх узагальненнях [3]. Такі проблеми відносять до некласичних проблем механіки руйнування і для їх адекватного дослідження розробляють специфічні підходи [4].

Один із таких загальних підходів, який дозволяє достовірно оцінити вплив початкових напружень на параметри руйнування, запропоновано в роботах О.М. Гузя в рамках строгої тривимірної лінеаризованої механіки деформівних тіл (ТЛМДТ) [5, 6]. Варто зазначити, що вказаний лінеаризований підхід дозволяє досліджувати в єдиній загальній формі для стисливих та нестисливих пружних тіл з довільною структурою пружного потенціалу. При цьому конкретизація моделі матеріалу здійснюється лише на кінцевому етапі дослідження — при чисельному аналізі отриманих у загальному вигляді характеристичних рівнянь, розв'язуючих інтегральних рівнянь тощо.

За допомогою вказаного загального підходу в рамках ТЛМДТ було отримано розв'язки окремих класів статичних плоских та просторових задач для ізольованих тріщин (тобто коли тріщини не взаємодіють ні між собою, ні з границями тіл) [5, 6]. При цьому були виявлені нові механічні ефекти, пов'язані з впливом початкових (залишкових) напружень. У подальшому в загальній постановці досліджувались ряд просторових (осесиметричних та неосесиметричних) задач про руйнування матеріалів з початковими напруженнями, що містять взаємодіючі тріщини. Так, були розглянуті окремі просторові задачі для кругових тріщин у півпросторі та у шарі з початковими напруженнями, а також для систем паралельних тріщин в необмежених попередньо напружених тілах (див. огляди [7, 8]).

Водночас результати дослідження задач механіки руйнування попередньо напружених тіл з взаємодіючими тріщинами за умов плоскої деформації чи плоского напруженого стану на сьогодні відсутні. Проте багато практичних задач можуть математично формулюватися саме як плоскі задачі про руйнування попередньо напружених матеріалів чи елементів конструкцій з взаємодіючими тріщинами (мова, зокрема, йде про протяжні тіла призматичної чи циліндричної форми, що містять приповерхневі тріщини чи системи внутрішніх близько розташованих одна до одної тріщин, при дії навантажень вздовж бокової поверхні таких тіл, тонкостінні елементи конструкцій з взаємодіючими тріщинами тощо). При цьому варто враховувати, що взаємний вплив тріщин між собою та з границями тіл, як відомо з відповідних робіт в рамках класичної механіки руйнування [9], може призводити в плоских задачах механіки руйнування до істотних відмінностей параметрів напружено-деформованого стану, зокрема, КІН, в околі взаємодіючих тріщин у порівнянні з випадком ізольованих (невзаємодіючих) тріщин.

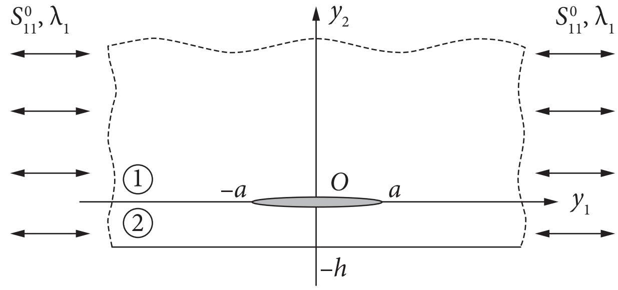

Рис. 1. Напівобмежене тіло, що містить приповерхневу тунельну тріщину, за дії початкових (залишкових) напружень

Мета дослідження — розробка та апробація методу вивчення плоских задач механіки руйнування напівобмежених тіл з приповерхневими тріщинами з урахуванням дії спрямованих вздовж тріщин початкових (залишкових) напружень. Метод ґрунтується на співвідношеннях ТЛМДТ [6] з використанням подань загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціали [10] і передбачає представлення цих потенціалів через інтегральні розклади Фур'є, зведення поставлених задач до парних інтегральних рівнянь, а потім до розв'язуючих інтегральних рівнянь, які досліджуються чисельно.

З використанням запропонованого методу для випадку плоскої деформації досліджено задачу про напружено-деформований стан попередньо напруженої півплощини з паралельною границі півплощини приповерхневою тунельною тріщиною, береги якої завантажені нормальними напруженнями (тріщина моди І). З аналізу асимптотичного розподілу напружень біля кінчиків (вершин) тріщини отримано аналітичні вирази для КІН. Для нестисливого високоеластичного (нелінійно-пружного) матеріалу з потенціалом Трелоара (тіло неогуківського типу) чисельно проаналізована залежність КІН від значень початкових (залишкових) напружень та нормованої на довжину тріщини відстані між тріщиною та вільною границею півплощини. Отримані результати можуть використовуватись для оцінки міцності та залишкового ресурсу конструкційних матеріалів (зокрема, еластомерів) та виробів з них, що містять приповерхневі гострокінцеві дефекти.

Основні співвідношення. Постановка задачі. Розглянемо напівобмежене однорідне ізотропне тіло $y_2 \geq -h$ з початковими напруженнями S_{11}^0, які діють вздовж площин $y_2 =$ $=$ const (рис. 1). Тіло містить на лінії $y_2 = 0$ плоску тунельну тріщину довжиною $2a$, яка є нескінченною в напрямку осі Oy_3 і займає область $-a \leq y_1 \leq +a$.

Під дією початкових (залишкових) напружень в тілі виникає однорідний напружено-деформований стан плоскої деформації, який характеризується такими співвідношеннями для компонентів симетричного тензора напружень Лагранжа $\tilde{S}$ і вектора переміщень u:

$$S_{ii}^0 = \text{const}\,,\ S_{22}^0 = 0\,,\ S_{11}^0 \neq 0\,,\ S_{33}^0 \neq 0\,, \tag{1}$$

$$u_i^0 = \lambda_i^{-1}(\lambda_i - 1)y_i\,,\ \lambda_i = \text{const}\ \ (i = 1, 2, 3).$$

В (1) і далі верхній індекс «0» означає, що величина відноситься до початкового напружено-деформованого стану, зумовленого дією початкових напружень S_{ii}^0.

При дослідженні використовуються лагранжеві координати

$$y_n = \lambda_n x_n\,, \tag{2}$$

які в початковому стані (зумовленому дією початкових напружень) є декартовими координатами. В (2) x_n — декартові координати недеформованого стану, λ_n — коефіцієнти подовжень (чи скорочень) матеріальних волокон вздовж координатних осей, викликаних початковими розтягуючими (чи стискаючими) напруженнями.

У випадку стисливих матеріалів лінеаризовані рівняння рівноваги в частинних похідних мають вигляд [5, 6]

$$\omega'_{ij\alpha\beta}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y_i \partial y_\beta}=0\,, \tag{3}$$

а лінеаризовані співвідношення пружності

$$Q'_{ij}=\omega'_{ij\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta}\,, \tag{4}$$

де u_α — компоненти вектора переміщень, викликаних додатковими напруженнями Q'_{ij}, що діють на берегах тріщини та на граничній поверхні тіла (тут Q'_{ij} — компоненти несиметричного тензора напружень Піоли—Кірхгофа), а $\omega'_{ij\alpha\beta}$ — компоненти тензора четвертого рангу, які визначаються вибором моделі пружного матеріалу (для гіперпружного тіла — видом пружного потенціалу) і залежать від початкових напружень (від параметрів λ_n) [6].

На берегах тріщини діють рівномірно розподілені нормальні навантаження інтенсивності $\sigma(y_1)$, направлені перпендикулярно до лінії розташування тріщини; границя півплощини вільна від напружень. Граничні умови такої задачі мають вигляд

$$Q'_{22}=-\sigma(y_1)\,,\ Q'_{21}=0\ \ (|y_1|\leqslant a\,;\ y_2=\pm 0\,),$$

$$Q'_{22}=0\,,\ Q'_{21}=0\ \ (-\infty\leqslant y_1\leqslant\infty\,;\ y_2=-h\,), \tag{5}$$

де знаки «±» в першому рядку означають верхні та нижні береги тріщини. Слід зазначити, що якщо вважати, що $S_{11}^0<0$, $0<\lambda_1<1$, а в (5) покласти $\sigma(y_1)=0$, то вирази (3)—(5) відповідатимуть математичній постановці лінеаризованої задачі про стискання півплощини з приповерхневою тріщиною зусиллями, спрямованими вздовж тріщини [10].

Для зручності подальших викладок умовно розіб'ємо півплощину $y_2\geq -h$ на області: «1» (півплощина $y_2\geq 0$) та «2» (смуга $-h\leq y_2\leq 0$) (зазначимо, що при цьому береги тріщини належать різним областям). На межі областей поза тріщиною ($|y_1|>a$; $y_2=0$) виконуються умови неперервності переміщень і напружень

$$u_1^{(1)}=u_1^{(2)}\,,\ u_2^{(1)}=u_2^{(2)}\ \ (|y_1|>a\,;\ y_2=0\,),$$

$$Q_{22}'^{(1)}=Q_{22}'^{(2)}\,,\ Q_{21}'^{(1)}=Q_{21}'^{(2)}\ \ (|y_1|>a\,;\ y_2=0\,). \tag{6}$$

В (6) і в подальших виразах верхній індекс в круглих дужках означає належність величини до області «1» або «2».

Враховуючи перший рядок у граничних умовах (5), приходимо до висновку, що умови неперервності напружень (другий рядок у (6)) є дійсними на всій області $y_2=0$:

$$Q_{22}'^{(1)}=Q_{22}'^{(2)}\,,\ Q_{21}'^{(1)}=Q_{21}'^{(2)}\ \ (-\infty\leq y_1\leq\infty;\ y_2=0\,). \tag{7}$$

Математичне формулювання лінеаризованої крайової задачі, що розглядається, включає лінеаризовані рівняння рівноваги (3), співвідношення пружності (4), а також граничні умови (5) (з урахуванням розбиття на області) і умови неперервності переміщень (перший рядок в (6)) та напружень (7), які набувають вигляду

$$Q_{22}'^{(2)} = -\sigma(y_1),\ Q_{21}'^{(2)} = 0\ (|y_1| \le a;\ y_2 = 0),$$

$$Q_{22}'^{(2)} = 0,\ Q_{21}'^{(2)} = 0\ (-\infty \le y_1 \le \infty;\ y_2 = -h), \tag{8}$$

$$u_1^{(1)} = u_1^{(1)},\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)}\ (|y_1| > a;\ y_2 = 0),$$

$$Q_{22}'^{(1)} = Q_{22}'^{(1)},\ Q_{21}'^{(1)} = Q_{21}'^{(2)}\ (-\infty \le y_1 \le \infty;\ y_2 = 0).$$

Крім того, повинні виконуватись умови затухання компонент вектора переміщень та тензора напружень при віддаленні від тріщини

$$u_j \to 0,\ Q_{ij}' \to 0\ (y_1 \to +\infty,\ y_2 \to +\infty). \tag{9}$$

Переміщення u_α та напруження Q_{ij}' можна представити через гармонічні потенціали, причому вигляд цих представлень залежить від співвідношення між коренями відповідного характеристичного рівняння (див., наприклад, [5, 6]). Так, для випадку нерівних коренів характеристичного рівняння ($n_1^* \ne n_2^*$) (цим випадком обмежимося в подальших викладках) ці представлення мають вигляд

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}(\varphi_1 + \varphi_2),\ u_2 = m_1^*(n_1^*)^{-1/2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^*(n_2^*)^{-1/2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2},$$

$$Q_{21}' = C_{44}^* \frac{\partial}{\partial y_1}\left[d_1^*(n_1^*)^{-1/2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + d_2^*(n_2^*)^{-1/2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\right], \tag{10}$$

$$Q_{22}' = C_{44}^*\left(d_1^* l_1^* \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2^* l_2^* \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2}\right),$$

$$z_1 = (n_1^*)^{-1/2} y_2,\ \ z_2 = (n_2^*)^{-1/2} y_2,\ C_{44}^* = \omega_{1212}',\ m_j^* = \frac{\omega_{1111}' n_j^* - \omega_{2112}'}{\omega_{1122}' + \omega_{1212}'},$$

$$d_j^* = \frac{\omega_{2112}'}{\omega_{1212}'} + m_j^*,\ l_j^* = \frac{\omega_{2222}' m_j^* - \omega_{2211}' n_j^*}{\omega_{1212}' d_j^* n_j^*}\ (j = 1, 2). \tag{11}$$

Корені характеристичного рівняння визначаються з виразів

$$n_{1,2}^* = a' \pm \sqrt{a'^2 - \frac{\omega_{2222}'\omega_{2112}'}{\omega_{1111}'\omega_{1221}'}},$$

$$2\omega_{1111}'\omega_{1221}' a' = \omega_{1111}'\omega_{2222}' + \omega_{2112}'\omega_{1221}' - (\omega_{1122}' + \omega_{1212}')^2. \tag{12}$$

При цьому потенціали $\varphi_1(y_1, z_1)$, $\varphi_2(y_1, z_2)$ є гармонічними функціями своїх аргументів і задовольняють рівнянням Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right)\varphi_i(y_1, z_i)=0\,,\ i=1,2\,.$$

Підставляючи в (8) вирази для напружень і переміщень через гармонічні потенціальні функції (10), можна переформулювати граничні умови та умови неперервності в термінах потенціальних функцій.

Метод дослідження. Розв'язуючі інтегральні рівняння. Подальший хід розв'язування сформульованої крайової задачі є таким. Невідомі потенціальні функції $\varphi_1(y_1, z_1)$, $\varphi_2(y_1, z_2)$ в кожній із областей «1» та «2» подаються у вигляді інтегральних розкладів Фур'є по просторовій координаті з невідомими функціями параметрів розкладу

$$\varphi_1^{(1)}(y_1, z_1)=\int_0^\infty A(\lambda)e^{-\lambda z_1}\cos\lambda y_1\frac{d\lambda}{\lambda}\,,$$

$$\varphi_2^{(1)}(y_1, z_2)=\int_0^\infty B(\lambda)e^{-\lambda z_2}\cos\lambda y_1\frac{d\lambda}{\lambda}\,, \tag{13}$$

$$\varphi_1^{(2)}(y_1, z_1)=\int_0^\infty [C_1(\lambda)\cosh\lambda(z_1+h_1)+C_2(\lambda)\sinh\lambda(z_1+h_1)]\cos\lambda y_1\frac{d\lambda}{\lambda\sinh\lambda h_1}\,,$$

$$\varphi_2^{(2)}(y_1, z_2)=\int_0^\infty [D_1(\lambda)\cosh\lambda(z_2+h_2)+D_2(\lambda)\sinh\lambda(z_2+h_2)]\cos\lambda y_1\frac{d\lambda}{\lambda\sinh\lambda h_2}\,,$$

де $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_j(\lambda)$, $D_j(\lambda)$, $j = 1{,}2$ — невідомі функції, які залежать від однієї змінної і потребують визначення в процесі подальшого розв'язування задачі. Зазначимо, що подання потенціальних гармонічних функцій у вигляді (13) відповідає парності по y_1 компоненти переміщення u_2 і непарності по цій змінній компоненти переміщення u_1, тому далі буде розглядатися лише область $y_1 \geq 0$. Також подання (13) забезпечує виконання умов (9), тобто умов перетворення в нуль у нескінченній по y_2 області «1» компонентів вектора переміщень та тензора напружень при прямуванні y_2 до нескінченності.

Умови в (8), які задаються на всій площині $y_2 = \text{const}$, дозволяють скоротити кількість невідомих функцій, що входять до інтегральних розкладів Фур'є, на кількість зазначених умов. Дійсно, з другого і четвертого рядків в (8) маємо

$$A(\lambda)=\frac{1}{k}\{[k_1(\coth\mu_1-\gamma\coth\mu_2)+(k_2-k_1\gamma)]C_1(\lambda)+[k_2(\coth\mu_1-\gamma\coth\mu_2)+(k_1-k_2\gamma)]C_2(\lambda)\},$$

$$B(\lambda)=-\frac{d_1^*l_1^*}{d_2^*l_2^*}\frac{1}{k}\{[k_2(\coth\mu_1-\gamma\coth\mu_2)+(k_2-k_1\gamma)C_1(\lambda)]+\frac{k_2}{k_1}\left[k_1(\coth\mu_1-\gamma\coth\mu_2)+(k_1-k_2\gamma)]C_2(\lambda)\right]\},$$

$$D_1(\lambda)=-\frac{d_1^*l_1^*}{d_2^*l_2^*}\gamma C_1(\lambda)\,,\ D_2(\lambda)=-\frac{d_1^*l_1^*}{d_2^*l_2^*}\frac{k_2}{k_1}\gamma C_2(\lambda)\,, \tag{14}$$

$$\mu_i = \lambda h_i,\ h_i = (n_i^*)^{-1/2} h,\ i = 1, 2;\ \gamma = \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1};$$

$$k_1 = l_1^* (n_2^*)^{-1/2},\ k_2 = l_2^* (n_1^*)^{-1/2},\ k = k_1 - k_2. \tag{15}$$

Решта умов (перший і третій рядок в (8)) призводять до такої системи парних інтегральних рівнянь щодо невідомих функцій $C_1(\lambda)$ та $C_2(\lambda)$:

$$\int_0^\infty [(\coth \mu_1 - \gamma \coth \mu_2) C_1(\lambda) - \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\gamma\right) C_2(\lambda)] \lambda \cos \lambda y_1 \lambda d\lambda = -\frac{\sigma(y_1)}{C_{44}^* d_1^* l_1^*},\ y_1 \le a,$$

$$\int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\gamma\right) C_1(\lambda) + (\coth \mu_1 - \gamma \coth \mu_2) C_2(\lambda)\right] \lambda \sin \lambda y_1 \lambda d\lambda = 0,\ y_1 \le a,$$

$$\int_0^\infty X_1 \cos \lambda y_1 d\lambda = 0,\ y_1 > a;\ \int_0^\infty X_2 \sin \lambda y_1 d\lambda = 0,\ y_1 > a, \tag{16}$$

$$X_1 \equiv \frac{k_1}{k}[(\coth \mu_1 - \gamma \coth \mu_2) + (1-\gamma)] C_1(\lambda) + \frac{1}{k}[(k_1 \coth \mu_1 - k_2 \gamma \coth \mu_2) +$$
$$+ (k_1 - k_2 \gamma)] C_2(\lambda),$$
$$X_2 \equiv \frac{1}{k}[(k_2 \coth \mu_1 - k_1 \gamma \coth \mu_2) + (k_2 - k_1 \gamma)] C_1(\lambda) + \frac{k_2}{k}[(\coth \mu_1 - \gamma \coth \mu_2) +$$
$$+ (1-\gamma)] C_2(\lambda). \tag{17}$$

На практиці парні інтегральні рівняння (16) розв’язуються методом підстановки [11]. В результаті отримуються розв’язуючі інтегральні рівняння Фредгольма. Для цього представимо вирази X_1 та X_2 (17) у вигляді інтегральних розкладів через функції Бесселя

$$X_1 = \int_0^a \varphi(t) \mathcal{J}_0(\lambda t) dt,$$
$$X_2 = \int_0^a \psi(t) \mathcal{J}_1(\lambda t) dt = -\lambda^{-1} \int_0^a \tilde{\psi}(t) [\mathcal{J}_0(\lambda a) - \mathcal{J}_0(\lambda t)] dt;\ \tilde{\psi}(t) \equiv \frac{d\psi(t)}{dt}, \tag{18}$$

де $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ — невідомі функції, які є неперервними, як і їх перші похідні, на відрізку $[0, a]$.

Підставивши вирази (18) в третє і четверте рівняння в (16) та врахувавши розривні інтеграли Вебера—Шафхейтліна [12]

$$\int_0^\infty \cos \lambda x \mathcal{J}_0(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} 0, 0 \leqslant t < x, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - x^2}}, 0 \leqslant x < t, \end{cases} \quad \int_0^\infty \sin \lambda x \mathcal{J}_1(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} 0, 0 \leqslant t < x, \\ \dfrac{x}{t\sqrt{t^2 - x^2}}, 0 \leqslant x < t, \end{cases}$$

можна показати, що ці рівняння задовольняються автоматично.

Перше та друге рівняння в (16) після деяких досить громіздких перетворень, аналогічних тим, що виконувались у випадку осесиметричної задачі про попередньо напружене тіло з приповерхневою тріщиною нормального відриву (див., наприклад, [13]), та з урахуванням формули [14]

$$\int_0^\infty e^{-p\lambda}\mathcal{J}_0(\lambda x)\mathcal{J}_0(\lambda t)\,d\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{xt}}Q_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2+x^2+t^2}{2xt}\right),$$

(де $Q_{-1/2}$ — функція Лежандра другого роду) і формул операційного числення приводять до розв'язуючої системи неоднорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду:

$$f(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K_{11}(\xi,\eta)f(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K_{12}(\xi,\eta)g(\eta)d\eta=\frac{4k_1}{\pi k}\xi\int_0^{\pi/2}\Sigma(\xi\sin\theta)d\theta\,, \tag{19}$$

$$g(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K_{21}(\xi,\eta)f(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K_{22}(\xi,\eta)g(\eta)d\eta=0\,;\ 0\le\xi\le 1,\ \Sigma(\xi)=-\frac{\sigma(a\xi)}{C_{44}^* d_1^* l_1^*}\,.$$

В (19) використовуються такі безрозмірні змінні і функції:

$$\xi\equiv a^{-1}x\,,\ \eta\equiv a^{-1}t\,,\ f(\xi)\equiv a^{-1}\varphi(a\xi)=a^{-1}\varphi(x)\,,\ g(\xi)\equiv\tilde{\psi}(a\xi)=\tilde{\psi}(x)\,. \tag{20}$$

(Зазначимо, що якщо в (19) покласти $\Sigma(\xi) = 0$, то отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, які є розв'язуючими для плоскої задачі про стискання півплощини з приповерхневою тріщиною зусиллями, спрямованими вздовж тріщини; ця система дещо відрізняється від отриманої в [10] розв'язуючої системи інтегральних рівнянь через різні методики розв'язку парних інтегральних рівнянь).

Ядра в інтегральних рівняннях Фредгольма (19) мають вигляд

$$K_{11}(\xi,\eta)=\frac{1}{k\sqrt{\xi}\eta^{3/2}}[k_1(k_1+k_2)\beta_1 S(z_{11})+k_2(k_1+k_2)\beta_2 S(z_{12})-2k_1k_2(\beta_1+\beta_2)S(z_1)]\,,$$

$$\begin{aligned}K_{12}(\xi,\eta)=\frac{k_1(k_1+k_2)}{k^2}\sqrt{\xi}\Bigg\{\eta^{-1/2}\left[Q_{-\frac{1}{2}}(z_{11})+Q_{-\frac{1}{2}}(z_{12})-2Q_{-\frac{1}{2}}(z_1)\right]-\Bigg[Q_{-\frac{1}{2}}(z_{21})+\\+Q_{-\frac{1}{2}}(z_{22})-2Q_{-\frac{1}{2}}(z_2)\Bigg]\Bigg\},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}K_{21}(\xi,\eta)=\frac{k_2(k_1+k_2)}{2k^2\sqrt{\xi}\eta^{3/2}32}\Bigg\{\left[1-\frac{2(2\beta_1)^2 z_{11}}{\xi\eta(z_{11}^2-1)}\right]S(z_{11})-\frac{(2\beta_1)^2}{2\xi\eta(z_{11}^2-1)}Q_{-\frac{1}{2}}(z_{11})+\Bigg[1-\\-\frac{2(2\beta_2)^2 z_{12}}{\xi\eta(z_{12}^2-1)}\Bigg]S(z_{12})-\frac{(2\beta_2)^2}{2\xi\eta(z_{12}^2-1)}Q_{-\frac{1}{2}}(z_{12})-2\left[1-\frac{2(\beta_1+\beta_2)^2 z_1}{\xi\eta(z_1^2-1)}\right]S(z_1)+\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\xi\eta(z_1^2-1)}Q_{-\frac{1}{2}}(z_1)\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{22}(\xi,\eta)=\frac{1}{k^2\sqrt{\xi}}[k_2(k_1+k_2)\beta_1[\eta^{-3/2}S(z_{11})-S(z_{21})]+k_1(k_1+k_2)\beta_2[\eta^{-3/2}S(z_{12})-\\-S(z_{22})]-2k_1k_2(\beta_1+\beta_2)[\eta^{-3/2}S(z_1)-S(z_2)]\},\end{aligned}$$

де введено такі позначення:

$$\beta = ha^{-1},\ \beta_i = (n_i^*)^{-1/2}\beta,\ i = 1, 2;$$

$$z_{1i} = (4\beta_i^2 + \xi^2 + \eta^2)(2\xi\eta)^{-1},\ z_{2i} = (4\beta_i^2 + \xi^2 + 1)(2\xi)^{-1},$$

$$z_1 = [(\beta_1 + \beta_2)^2 + \xi^2 + \eta^2](2\xi\eta)^{-1},\ z_2 = [(\beta_1 + \beta_2)^2 + \xi^2 + 1](2\xi)^{-1};$$

$$S(z) = (z^2 - 1)^{-1}[Q_{1/2}(z) - zQ_{-1/2}(z)]. \qquad (22)$$

Таким чином, поставлену співвідношеннями (3), (4) та (8) крайову задачу зведено до системи неоднорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (19) відносно невідомих функцій $f(\xi)$ та $g(\xi)$, яка буде досліджуватись чисельно.

Коефіцієнти інтенсивності напружень. Далі проаналізуємо асимптотичний розподіл напружень в околі кінчиків тріщини та визначимо КІН, які, як і в класичній механіці руйнування без початкових напружень [3, 9], являють собою коефіцієнти при сингулярностях у зазначеному розподілі напружень при наближенні (з боку суцільного тіла) до кінчика (вершини) тріщини.

З представлень компонент тензора напружень через потенціальні гармонічні функції $\varphi_1(y_1, z_1)$, $\varphi_2(y_1, z_2)$ у вигляді (10) з урахуванням (13), (14) та (17) можемо отримати такі вирази для компонент тензора напружень Q'_{22} та Q'_{21} в області $|y_1| > a$, $y_2 = 0$ (тобто на лінії розташування тріщини поза її межами, в області «2»):

$$Q_{22}^{'(2)}(y_1, 0) = C_{44}^* d_1^* l_1^* \left\{ \frac{k}{2k_1} \int_0^\infty X_1 \lambda \cos\lambda y_1 d\lambda + \int_0^\infty [M(\lambda)X_1 + F(\lambda)X_2]\lambda \cos\lambda y_1 d\lambda \right\},$$

$$Q_{21}^{'(2)}(y_1, 0) = -C_{44}^* d_1^* (n_1^*)^{-1/2} \left\{ \frac{k}{2k_2} \int_0^\infty X_2 \lambda \sin\lambda y_1 d\lambda + \int_0^\infty [F(\lambda)X_1 + L(\lambda)X_2]\lambda \sin\lambda y_1 d\lambda \right\} \qquad (23)$$

де X_1, X_2, визначаються з (17), та введено позначення

$$M(\lambda) = 2\frac{k_2}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{k_1 + k_2}{2k}\left(e^{-2\mu_1} + \frac{k_2}{k_1} e^{-2\mu_2} \right),$$

$$L(\lambda) = 2\frac{k_1}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{k_1 + k_2}{2k}\left(e^{-2\mu_1} + \frac{k_1}{k_2} e^{-2\mu_2} \right),\ F(\lambda) = \frac{k_1 + k_2}{2k}(e^{-\mu_1} - e^{-\mu_2})^2. \qquad (24)$$

З аналізу виразів (23) випливає, що сингулярність при $y_1 \to a$ містять лише перші інтеграли в фігурних дужках виразів для $Q_{22}^{'(2)}(y_1, 0)$ та $Q_{21}^{'(2)}(y_1, 0)$, оскільки в других інтегралах в фігурних дужках, як випливає з відповідних формул для інтегралів від функцій Бесселя [12], вказана сингулярність відсутня.

Розглянемо перший інтеграл у виразі для $Q_{22}^{'(2)}(y_1, 0)$. З урахуванням першого виразу в (18), а також беручи до уваги співвідношення [12]

$$\lambda \mathcal{J}_0(\lambda t) = t^{-1}\frac{d}{dt}[t\mathcal{J}_1(\lambda t)]$$

і змінюючи порядок інтегрування, маємо

$$I_1=\int_0^\infty[\int_0^a \varphi(t)\mathcal{J}_0(\lambda t)\,dt]\lambda\cos\lambda y_1\,d\lambda=\int_0^a t^{-1}\varphi(t)\frac{d}{dt}[t\int_0^\infty \cos\lambda y_1\mathcal{J}_1(\lambda t)\,d\lambda]\,dt\,. \tag{25}$$

Далі використаємо розривний інтеграл Вебера—Шафхейтліна [12]

$$\int\limits_0^\infty \cos\lambda y_1\mathcal{J}_1(\lambda t)\,d\lambda=\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & 0\leqslant y_1<t,\\ -\dfrac{t}{\sqrt{{y_1}^2-t^2}\left(y_1+\sqrt{{y_1}^2-t^2}\right)}, & 0<t<y_1\end{cases}$$

та врахуємо, що t змінюється в межах від 0 до a та розглядається область поза тріщиною ($y_1 > a$) і, таким чином, маємо $t < y_1$. Тоді з (25), беручи інтеграл по частинах, маємо

$$I_1=-\frac{a\varphi(a)}{\sqrt{{y_1}^2-a^2}\left(y_1+\sqrt{{y_1}^2-a^2}\right)}-\int_0^a\frac{\varphi(t)-t^{-1}\varphi'(t)}{\sqrt{{y_1}^2-t^2}\left(y_1+\sqrt{{y_1}^2-t^2}\right)}dt\,. \tag{26}$$

При цьому другий доданок в (26) не містить особливостей при $y_1 \to a$ [15].

З першого виразу в (23) з урахуванням (26) отримуємо

$$Q_{22}^{'(2)}(y_1,0)=-C_{44}^{*}d_1^{*}l_1^{*}\,\frac{k}{2k_1}\frac{a\varphi(a)}{\sqrt{(y_1-a)(y_1+a)}\left(y_1+\sqrt{{y_1}^2-a^2}\right)}+O(1)\,, \tag{27}$$

де символом $O(1)$ позначено регулярні члени, тобто такі, які не мають особливостей при $y_1 \to a$.

Провівши аналогічні викладки для $Q_{21}^{'(2)}(y_1,0)$, маємо

$$Q_{21}^{'(2)}(y_1,0)=C_{44}^{*}d_1^{*}(n_1^{*})^{-1/2}\,\frac{k}{2k_2}\frac{\psi(a)}{\sqrt{(y_1-a)(y_1+a)}}+O(1)\,. \tag{28}$$

З виразів (27), (28) випливає, що порядок особливості в розподілі напружень біля кінчика (вершини) приповерхневої тріщини в попередньо напруженій півплощині дорівнює −1/2, тобто збігається з порядком особливості в розподілі напружень біля кінчика тріщини в тілі без початкових напружень [9].

Вирази (27), (28) можна записати так:

$$Q_{22}^{'(2)}(y_1,0)=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi(y_1-a)}}+O(1)\,,\ Q_{21}^{'(2)}(y_1,0)=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi(y_1-a)}}+O(1)\,, \tag{29}$$

де K_{I}, K_{II} — КІН біля кінчика тріщини, які визначаються з таких співвідношень:

$$K_{\mathrm{I}} = -C_{44}^* d_1^* l_1^* \frac{k}{2k_1}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\varphi(a),$$

$$K_{\mathrm{II}} = C_{44}^* d_1^* (n_1^*)^{-1/2} \frac{k}{2k_2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\psi(a) = C_{44}^* d_1^* (n_1^*)^{-1/2} \frac{k}{2k_2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_0^a \tilde{\psi}(t)\,dt\,. \quad (30)$$

Переходячи в (30) з урахуванням (20) до безрозмірних змінних та функцій, отримаємо такі вирази для КІН

$$K_{\mathrm{I}} = -C_{44}^* d_1^* l_1^* \frac{k}{2k_1}\sqrt{\pi a}\, f(1)\,,\; K_{\mathrm{II}} = C_{44}^* d_1^* (n_1^*)^{-1/2} \frac{k}{2k_2}\sqrt{\pi a}\int_0^1 g(\eta)\,d\eta\,, \quad (31)$$

де функції $f(\eta)$, $g(\eta)$ визначаються з розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (19).

З виразів (30), (31) випливає, що взаємний вплив приповерхневої тріщини та вільної границі півплощини зумовлює якісні зміни в асимптотичному розподілі напружень біля кінчика тріщини, а саме, обидва КІН K_{I} та K_{II} виявляються відмінними від нуля у випадку завантаження берегів тріщини лише нормальними зусиллями (в задачі про ізольовану тріщину нормального відриву в нескінченній площині як з початковими напруженнями [5], так і без початкових напружень [9] маємо $K_{\mathrm{I}} \neq 0$, $K_{\mathrm{II}} = 0$). Крім того, вирази (30), (31) підтверджують, що для задачі, що розглядається, обидва КІН залежать від початкових напружень, оскільки параметри n_1^*, n_2^*, C_{44}^*, d_1^*, l_1^*, k_1, k_2, k залежать від параметра λ_1, зумовленого дією початкових напружень S_{11}^0.

Проаналізуємо граничний випадок розташування тріщини в півплощині, коли відстань між нею та границею півплощини прямує до нескінченності. З аналізу виразів для ядер (21) випливає, що при $\beta = h/a \to \infty$ граничні значення всіх ядер дорівнюють нулю, а система інтегральних рівнянь (19) після деяких перетворень приводить до таких граничних значень функцій $f(\eta)$ та $g(\eta)$:

$$f^{\infty}(\xi) \equiv \lim_{\beta\to\infty} f(\xi) = -\frac{4k_1}{\pi k}\frac{\xi}{C_{44}^* d_1^* l_1^*}\int_0^{\xi}\frac{\sigma(a\eta)}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\,d\eta\,,\; g^{\infty}(\xi) \equiv \lim_{\beta\to\infty} g(\xi) = 0\,. \quad (32)$$

Підставивши ці вирази для функцій в (30), (31), отримаємо при $\beta \to \infty$ такі вирази для КІН:

$$K_{\mathrm{I}}^{\infty} = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^1\frac{\sigma(a\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^a\frac{\sigma(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt\,,\; K_{\mathrm{II}}^{\infty} = 0\,. \quad (33)$$

Ці значення КІН не залежать від початкових напружень і повністю збігаються з виразами, які були отримані при дослідженні плоскої задачі механіки руйнування для нескінченної площини з тріщиною нормального відриву [9]. Зокрема, коли на берегах тріщини діють постійні напруження

$$\sigma(y_1) = \sigma = \mathrm{const}\,, \quad (34)$$

з (33) маємо

$$K_{\mathrm{I}}^{\infty} = \sqrt{\pi a}\sigma, \; K_{\mathrm{II}}^{\infty} = 0, \qquad (35)$$

що повністю збігається з результатом для тріщини в нескінченному тілі без початкових напружень [3, 9].

Чисельні результати. Викладений вище метод дослідження плоских задач механіки руйнування попередньо напружених напівобмежених тіл з приповерхневими тріщинами дозволяє розв'язувати задачі в єдиній (уніфікованій) формі для стисливих і нестисливих пружних тіл з різними пружними потенціалами, для яких реалізується випадок нерівних коренів характеристичного рівняння (12). Конкретизацію моделі матеріалу необхідно здійснювати лише на етапі чисельного дослідження системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (19) та обрахунку значень КІН (31) шляхом задання конкретних значень параметрів C_{44}^{*}, n_i^{*}, d_i^{*}, l_i^{*}, k_i, k; $i = 1,2$, які є специфічними для кожної моделі пружного тіла.

Нижче наведено приклад чисельного розрахунку для нестисливого високоеластичного матеріалу, що описується пружним потенціалом Трелоара (неогуківське тіло) [16]. Для цього потенціалу маємо

при $\lambda_1 < 1$: $n_1^{*} = \lambda_1^{-4}$, $n_2^{*} = 1$, $C_{44}^{*} = 2C_{10}\lambda_1^{-2}$, $d_1^{*} = 1 + \lambda_1^{-4}$, $d_2^{*} = 2$, $l_1^{*} = \dfrac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2}}$,

$$l_2^{*} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1^4), \; k_1 = \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2}}, \; k_2 = \frac{1}{2}\lambda_1^2(1 + \lambda_1^4), \; k = \frac{\lambda_1^2[4\lambda_1^2 - (1 + \lambda_1^4)^2]}{2(1 + \lambda_1^4)};$$

при $\lambda_1 > 1$: $n_1^{*} = 1$, $n_2^{*} = \lambda_1^{-4}$, $C_{44}^{*} = 2C_{10}\lambda_1^{-2}$, $d_1^{*} = 2$, $d_2^{*} = 1 + \lambda_1^{-4}$, $l_1^{*} = \dfrac{1}{2}(1 + \lambda_1^4)$,

$$l_2^{*} = \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2}}, \; k_1 = \frac{1}{2}\lambda_1^2(1 + \lambda_1^4), \; k_2 = \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2}}, \; k = -\frac{\lambda_1^2[4\lambda_1^2 - (1 + \lambda_1^4)^2]}{2(1 + \lambda_1^4)}.$$

Тут C_{10} — константа матеріалу.

Результати наведено для випадку рівномірного нормального навантаження на берегах тріщини у вигляді (34). На рис. 2, 3 для різних значень нормованої на половину довжини тріщини відстані між тріщиною і границею тіла $\beta = h/a$ продемонстровано характер залежності нормованих КІН $K_{\mathrm{I}} / K_{\mathrm{I}}^{\infty}$ та $K_{\mathrm{II}} / K_{\mathrm{I}}^{\infty}$ (де K_{I}^{∞} — КІН для випадку тріщини нормального відриву в нескінченній площині, який не залежить від початкових напружень і визначається з (35)) від параметра початкових напружень λ_1 (значення цього параметра в діапазоні $0 < \lambda_1 < 1$ відповідають стискаючим початковим напруженням, при $\lambda_1 > 1$ — розтягуючим, при $\lambda_1 = 1$ початкові напруження відсутні). Як випливає з цих рисунків, обидва КІН (K_{I} та K_{II}) суттєво залежать від початкових напружень, причому вплив стискаючих початкових напружень є сильнішим, ніж розтягуючих.

Криві, наведені на рис. 2 та 3, в області стискаючих початкових напружень мають вертикальні асимптоти. Це свідчить про те, що при досягненні стискаючими напруженнями

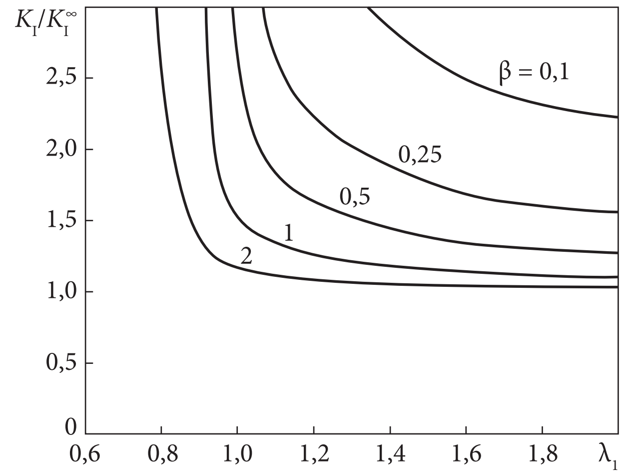

Рис. 2. Залежність нормованих КІН $K_{\mathrm{I}} / K_{\mathrm{I}}^{\infty}$ від параметра початкових напружень λ_1 для матеріалу з потенціалом Трелоара

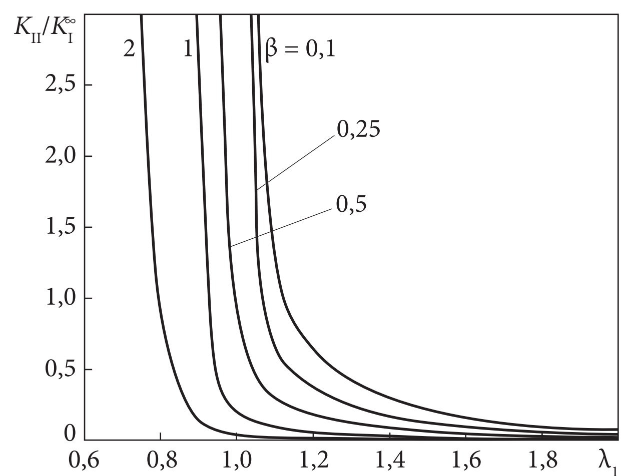

Рис. 3. Залежність нормованих КІН $K_{\mathrm{II}} / K_{\mathrm{I}}^{\infty}$ від параметра початкових напружень λ_1 для матеріалу з потенціалом Трелоара

S_{11}^0 (і, відповідно, параметром λ_1) певних значень (ці значення є різними для різних величин β) відбувається різке (резонансне) зростання КІН.

В таблиці для окремих значень безрозмірної відстані між тріщиною і границею β наведено числові значення параметрів λ_1, при яких відбувається зазначене резонансне явище, та подано відповідні значення КІН. Слід зазначити, що ці значення λ_1 збігаються з критичними значеннями коефіцієнта скорочення вздовж координатної осі Oy_1 за дії стискаючого зусилля S_{11}^0, які були отримані при дослідженні плоскої задачі про стиск півплощини вздовж приповерхневої тріщини і відповідають втраті стійкості стану рівноваги частини матеріалу в локальній області біля тріщини (за симетричною формою) (див., наприклад, [10]). Так, при великих значеннях β значення λ_1 збігається з критичним значенням $\lambda_1^* = 0{,}544$, яке отримується в плоскій задачі про стиск нескінченної площини вздовж ізольованої тріщини [10]. Це обґрунтовує доцільність поширення об'єднаного підходу до дослідження двох некласичних механізмів руйнування, а саме, руйнування тіл з діючими вздовж тріщин початковими (залишковими) напруженнями та руйнування тіл при стисканні вздовж тріщин, який раніше було запропоновано при розгляді просторових задач [17], і на плоскі задачі механіки руйнування за дії спрямованих вздовж тріщин зусиль (детальніше із зазначеним об'єднаним підходом можна ознайомитись в [13]).

β	0,1	0,25	0,5	1,0	2,0	10,0	100,0	1000,0
λ_1	0,996	0,969	0,912	0,824	0,731	0,595	0,549	0,544
K_I / K_I^∞	52207,9	25575,6	1551540,0	39871,6	12345,2	3454,5	6886,1	11071,7
K_{II} / K_I^∞	48213,4	27861,2	1494780,0	33792,7	8573,7	987,7	257,9	42,8

Рис. 4 та 5 ілюструють для цього ж матеріалу залежності нормованих КІН K_I / K_I^∞ та K_{II} / K_I^∞ від безрозмірної відстані між тріщиною та границею тіла $\beta = h/a$ для різних значень параметра початкових напружень λ_1. При зменшенні цієї відстані взаємодія трі-

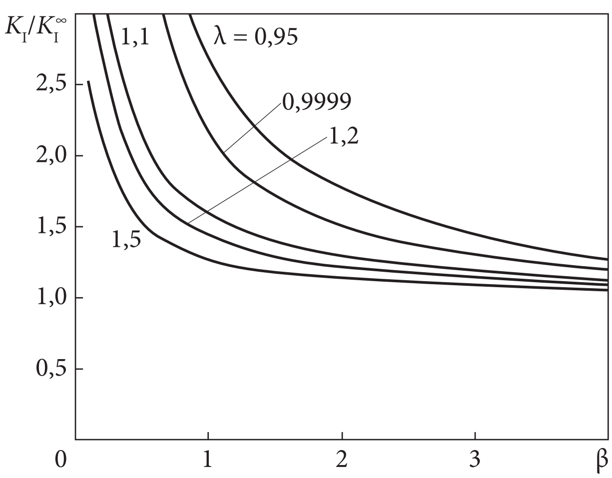

Рис. 4. Залежність нормованих КІН K_I / K_I^∞ від безрозмірної відстані між тріщиною і границею півплощини $\beta = h/a$ для матеріалу з потенціалом Трелоара

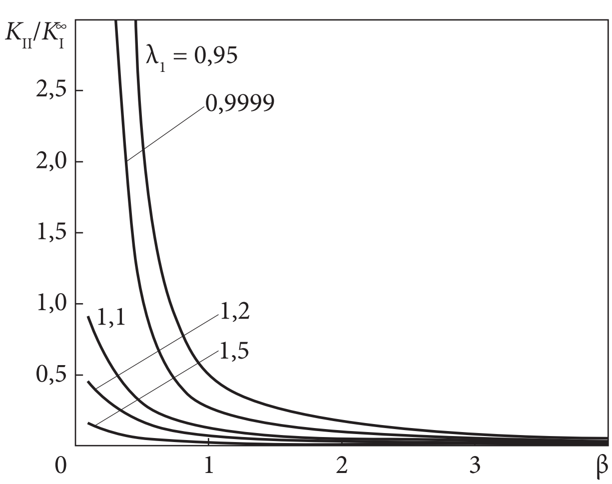

Рис. 5. Залежність нормованих КІН K_{II} / K_I^∞ від безрозмірної відстані між тріщиною і границею півплощини $\beta = h/a$ для матеріалу з потенціалом Трелоара

щини і граничної поверхні зумовлює суттєве зростання значень КІН (наприклад, при $\lambda_1 = 0{,}95$ (початковий стиск) значення $K_\mathrm{I} / K_\mathrm{I}^\infty$ при $\beta = 0{,}5$ перевищує значення $K_\mathrm{I} / K_\mathrm{I}^\infty$ при $\beta = 5$ в 2,6 раза, а при $\lambda_1 = 1{,}1$ (початковий розтяг) відмінність між значенням $K_\mathrm{I} / K_\mathrm{I}^\infty$ при $\beta = 0{,}1$ та значенням $K_\mathrm{I} / K_\mathrm{I}^\infty$ при $\beta = 5$ становить у 3,9 раза. Аналогічним є вплив відстані між тріщиною та границею і на значення $K_\mathrm{II} / K_\mathrm{I}^\infty$. З іншого боку, при віддаленні тріщини від границі тіла їх взаємний вплив помітно зменшується, а відповідні значення КІН прямують до значень, які отримуються для ізольованої тріщини в нескінченній площині. Так, розрахунки показують, що при значеннях відстані між тріщиною та границею, що становлять 2,5 довжини тріщини і більше, відмінність значень K_I та K_I^∞ у всьому діапазоні досліджених значень параметра λ_1 не перевищує 5 %, тобто при таких відстанях між тріщиною і вільною границею тіла їх взаємним впливом з придатною для інженерних розрахунків точністю можна нехтувати.

Висновки. В роботі вперше в рамках тривимірної лінеаризованої механіки деформівних тіл досліджено плоску задачу механіки руйнування напівскінченного тіла з приповерхневою тріщиною нормального відриву, паралельною границі тіла, з урахуванням дії вздовж тріщини початкових (залишкових) напружень. Проаналізовано залежності КІН в околі кінчика (вершини) тріщини від початкових напружень та від відстані між тріщиною та границею тіла. З отриманих результатів можна зробити такі висновки:

- порядок особливості (сингулярності) в околі кінчика (вершини) тріщини в плоскій задачі про півплощину з початковими напруженнями, що містить приповерхневу тріщину нормального відриву, дорівнює -1/2, тобто збігається з порядком особливості біля кінчика тріщини в аналогічній задачі для півплощини без початкових напружень;
- взаємний вплив тріщини та граничної поверхні приводить до якісних змін в розподілі напружень в околі вершини тріщини нормального відриву, а саме, до ненульових значень обох КІН K_I та K_II (в задачі про ізольовану тріщину в нескінченній площині мали $K_\mathrm{I} \neq 0$, $K_\mathrm{II} = 0$);
- обидва КІН $\mathrm{K_I}$ та $\mathrm{K_{II}}$ суттєво залежать від початкових напружень;
- при збільшенні відстані між тріщиною та межею півплощини приходимо до граничних значень КІН, які повністю збігаються зі значеннями, які отримуються в задачі про нескінченну площину з тріщиною нормального відриву.

Слід також зазначити, що з отриманого в цій роботі розв'язку задачі про попередньо напружену півплощину з тріщиною можна, аналізуючи резонансну поведінку КІН при певних значеннях стискаючих початкових напружень, отримати значення критичних параметрів навантаження при стисканні півплощини вздовж приповерхневої тріщини, паралельної граничній поверхні півплощини.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Лобанов Л.М., Єрмолаєв Г.В., Квасницький В.В., Махненко О.В., Єгоров Г.В., Лабарткава А.В. Напруження та деформації при зварюванні і паянні. Миколаїв: НУК, 2016. 248 с.
2. Технологические напряжения и деформации в материалах. Шульга Н.А., Томашевский В.Т. (ред.). Киев: ПТОО "А.С.К", 1997. 394 с.
3. Cherepanov G.P. Mechanics of brittle fracture. New York: McGraw-Hill, 1979. 939 p.
4. Guz A.N. Eight non-classical problems of fracture mechanics. Cham: Springer, 2022. 366 p. (Advanced Structure Materials, vol. 159).
5. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1991. 288 с.
6. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Berlin: Springer, 1999. 557 p.
7. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (review). *Int. Appl. Mech*. 2015. **51**, № 5. P. 489—560. https://doi.org/10.1007/s10778-015-0710-x
8. Guz A.N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of research (review). III. *Int. Appl. Mech*. 2019. **55**, № 4. P. 343—415. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4
9. Саврук М.П. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 620 с.
10. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. *Fracture of materials under compression along cracks*. Cham: Springer, 2020. P. 149—248. (Advanced Structure Materials, vol. 138). https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3
11. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 404 с.
12. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions. New York: Gordon and Breach Science Publisher, 1986. 756 p.
13. Богданов В.Л., Гузь А.Н., Назаренко В.М. Объединенный подход в неклассических проблемах механики разрушения. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2017. 528 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений. Москва: Физматгиз, 1963. 1108 с.
15. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions. New York: Gordon and Breach Science Publisher, 1986. 808 p.
16. Treloar L.R.G. Large elastic deformations in rubberlike materials. Deformation and Flow of Solids: Grammel, R. (Eds.). Berlin, Heidelberg: Springer, 1956. P. 208—217. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48236-6_20
17. Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L. Combined analysis of fracture under stresses acting along cracks. *Arch. Appl. Mech*., 2013. **83**, № 9. P. 1273—1293. https://doi.org/10.1007/s00419-013-0746-5

Надійшла до редакції 25.03.2025

REFERENCES

1. Lobanov, L. M., Yermolayev, G. V., Kvasnytsky, V. V., Makhnenko, O. V., Yegorov, G. V. & Labartkava, A. V. (2016). Stresses and strains during welding and soldering. Mykolayiv: NUK (in Ukrainian).
2. Shul'ga, N. A. & Tomashevskii, V. T. (Eds.). (1997). Process-induced stresses and strains in materials. Kyiv: ASK (in Russian).
3. Cherepanov, G. P. (1979). Mechanics of brittle fracture. New York: McGraw-Hill.
4. Guz, A. N. (2022). Eight non-classical problems of fracture mechanics. Advanced Structure Materials. (Vol. 159). Cham: Springer.
5. Guz, A. N. (1991). Brittle fracture of materials with initial stresses. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
6. Guz, A. N. (1999). Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Berlin: Springer.
7. Bogdanov, V. L., Guz, A. N. & Nazarenko, V. M. (2015). Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (review). Int. Appl. Mech., 51, No. 5, pp. 489-560. https://doi.org/10.1007/s10778-015-0710-x
8. Guz, A. N. (2019). Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of research (review). III. Int. Appl. Mech., 55, No. 4, pp. 343-415. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4
9. Savruk, M.P. (1988). Stress intensity factors in bodies with cracks. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
10. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. Fracture of materials under compression along cracks. Advanced Structure Materials. (Vol. 138). (pp. 149-248). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3
11. Uflyand, Ya. S. (1967). Integral transformations in problems of the theory of elasticity. Leningrad: Nauka (in Russian).
12. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu .A. & Marichev, O. I. (1986). Special Functions. Integrals and Series. (Vol. 2). New York: Gordon and Breach Science Publisher.
13. Bogdanov, V. L., Guz, A. N. & Nazarenko, V. M. (2017) Unified approach in non-classical problems of fracture mechanics. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ. (in Russian).
14. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (1963). Table of integrals, series, and products. Moscow: Physmatgiz (in Russian).
15. Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A. & Marichev, O. I. (1986). Elementary functions. Integrals and Series. (Vol. 1). New York: Gordon and Breach Science Publisher.
16. Treloar, L. R. G. (1956). Large elastic deformations in rubberlike materials. Grammel, R. (Eds.). Deformation and Flow of Solids. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. (pp.208-217). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48236-6_20
17. Guz, A. N., Nazarenko, V. M. & Bogdanov, V. L. (2013). Combined analysis of fracture under stresses acting along cracks. Arch. Appl. Mech., 83, No. 9, pp. 1273-1293. https://doi.org/10.1007/s00419-013-0746-5

Received 25.03.2025

V.L. Bogdanov, https://orcid.org/0000-0001-9864-9120
O.I. Lesyk, https://orcid.org/0009-0002-5999-8197

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: bogd1965@gmail.com, alexey27lesik@gmail.com

STRESS-STRAIN STATE OF A PRESTRESSED HALFPLANE
WITH CRACK IN MODE I NEAR THE SURFACE

An analytic-numerical method of investigation of the plane fracture mechanics problem for a semi-bounded body containing a near-surface crack of mode I parallel to the boundary surface, taking into account the action of initial (residual) stresses directed along the crack, is proposed. The method is based on the relations of three-dimensional linearized mechanics of deformable bodies. Using representations of general solutions of linearized equilibrium equations in terms of potential harmonic functions and applying the Fourier integral transformation, the formulated boundary value problem is reduced first to dual integral equations and then to a system of inhomogeneous Fredholm integral equations of the second kind. From the analysis of the asymptotic stress distribution in the vicinity of the crack it is concluded that the order of singularity in the stress distribution near the crack tips in the considered problem coincides with the order of singularity obtained in the plane problem for a halfplane with a mode I crack in the absence of initial stresses, and analytical expressions for the stress intensity factors have been obtained. For a highly elastic (hyperelastic) body, the material of which is described by the Treloar elastic potential (a body of neo-Hookian type), the dependences of the stress intensity coefficients on the initial (residual) stresses are calculated and the effect of the interaction between the crack and the boundary surface of the body on them has been estimated. A resonant increase in the values of stress intensity coefficients when the initial compressive stresses reach certain critical values, which for a given material correspond to a local loss of stability of the equilibrium state in the vicinity of the crack, has also been found.

Keywords: *halfplane with a near-surface crack, mode I crack, initial (residual) stresses, stress intensity factors.*