

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.003>

УДК 517.956.4

І.П. Мединський^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-0651-4198>

Г.С. Пасічник³, <https://orcid.org/0000-0002-1759-5042>

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

² Національний університет “Львівська політехніка”, Львів, Україна

³ Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

E-mail: h.pasichnyk@chnu.edu.ua, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua

Фундаментальний розв’язок задачі Коші для рівняння типу Колмогорова з необмеженими коефіцієнтами, які не залежать від змінних виродження

Представлена членом-кореспондентом НАН України В.О. Пелихом

Розглянуто вироджене рівняння типу Колмогорова другого порядку з необмеженими коефіцієнтами, які не залежать від змінних виродження. Коефіцієнти рівняння є диференційовними, а їх ріст залежить від деякої зростаючої і диференційовної функції. Для такого рівняння побудовано фундаментальний розв’язок задачі Коші та одержано оцінки його похідних за основною групою змінних. Отримані результати можуть бути використані для вивчення розв’язності задачі Коші розглядуваного рівняння та побудови і дослідження фундаментального розв’язку задачі Коші для рівняння з коефіцієнтами, що залежать від усіх груп просторових змінних та зростають при $|x| \rightarrow \infty$.

Ключові слова: рівняння типу Колмогорова, зростаючий коефіцієнт, фундаментальний розв’язок задачі Коші, метод Леві.

Вступ. Клас рівнянь, які розглядаються у статті, є узагальненням відомого рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова [1] і належать до підкласу E_{22} класу E_2 за термінологією з праці [2]. Ці рівняння є виродженими диференціальними рівняннями із частинними похідними параболічного типу. Вони містять за частиною просторових змінних лише молодші похідні в сенсі теорії параболічних рівнянь. Такі рівняння належать до класу ультрапараболічних або еліптико-параболічних рівнянь. Ці рівняння і їх різноманітні узагальнення вивчалися багатьма дослідниками. Лінійні і нелінійні ультрапараболічні рівняння виникають у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання опціонів, у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів, під час мо-

Ц и т у в а н н я: Мединський І.П., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв’язок задачі Коші для рівняння типу Колмогорова з необмеженими коефіцієнтами, які не залежать від змінних виродження. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 3. С. 3—16. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.003>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

делювання процесів дифузії з інерцією та розсіювання електронів, у віковому наближенні енергії сповільнених електронів, у біології, економіці та інших галузях науки [2, 3—11].

Крім структури Колмогорова розглянуті рівняння мають ще одну особливість: коефіцієнти групи молодших членів при $|x| \rightarrow \infty$ необмежено зростають.

У праці [12] С.Д. Ейдельманом та Г.П. Малицькою означено новий клас рівнянь — клас рівнянь дифузії з інерцією, коефіцієнти яких зростають. Але цей клас виявився вужчим, ніж клас E_{22} . Що стосується вироджених параболічних рівнянь другого порядку з коефіцієнтами, які є сталими в групі старших і зростають у групі молодших членів, але не мають структури Колмогорова, то основні результати наведено в працях [13, 14].

Повнота результатів про розв'язки задачі Коші залежить від властивостей відповідних фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК).

Мета. У цій статті для виродженого параболічного рівняння з двома групами просторових змінних будується ФРЗК і встановлюються оцінки ФРЗК та його похідних за основними змінними. Коефіцієнти рівняння припускаються достатньо гладкими і не залежними від змінних виродження. Крім того, вони зростають на нескінченності за основною групою змінних. Для побудови ФРЗК використано метод Леві та метод введення додаткової просторової змінної.

Позначення, припущення та допоміжні відомості. Нехай n_1, n_2 — задані натуральні числа такі, що $n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2$; $M := n_1 m_1 + n_2 m_2$, де $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$. Вважатимемо, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, де $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l})$, $l \in \{1, 2\}$, так, що $x := (x_1, x_2)$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2)$, де $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$. Використовуватимемо ще такі позначення: $\Pi_H := \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, $\Pi_H^1 := \{(t, x_1) | t \in H, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq R\}$, $B_R^1 := \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} | |x_1| \leq R\}$, $R > 0$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$; $\Delta_{x_p}^{z_p} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(p)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $p \in \{1, 2\}$, де $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$; $X_1(t) := (X_1(t), X_2(t))$, $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + tx_1'$, $x_1' := (x_{11}', \dots, x_{1n_1}')$.

Позначимо через S диференціальний вираз вигляду $\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}}$.

Розглянемо рівняння вигляду

$$Lu(t, x_1, \partial_t, \partial_x) := \left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} - a_0(t, x_1) \right) \times \\ \times u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}.$$
(1)

Припустимо, що коефіцієнти a_{js} , a_j і a_0 є комплекснозначними функціями в $\Pi_{[0,T]}^1$, а рівняння (1) є в $\Pi_{[0,T]}$ дисипативним ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова, тобто існує неперервна функція $D: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

- 1) $D(x_1) \rightarrow \infty$ при $|x_1| \rightarrow \infty$;
- 2) функції $b_{js}(t, x_1) := a_{js}(t, x_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $b_j(t, x_1) := a_j(t, x_1) D(x_1)^{-1}$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $b_0(t, x_1) := a_0(t, x_1) D(x_1)^{-2}$, $(t, x_1) \in \Pi_{[0,T]}^1$, обмежені;
- 3) для рівняння

$$\left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} (-i \partial_{x_{n+1}}) - b_0(t, x_1) (-i \partial_{x_{n+1}})^2 \right) v(t, x) = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} : \\ \operatorname{Re} \left(- \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1) \sigma_{1j} \sigma_{1s} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1) \sigma_{1j} \mu - b_0(t, x_1) \mu^2 \right) \geq \delta (|\sigma_1|^2 + \mu^2). \quad (2)$$

Функція D при цьому називається характеристикою дисипації рівняння (1).

Припустимо, що виконуються такі умови на коефіцієнти рівняння (1).

A₁. Рівняння (1) є дисипативним ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова в $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D .

A₂. Існують неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $\partial_x^{k_1} a_0$, $|k_1| \leq 2$, для яких справджуються оцінки $|\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}(t, x_1)| \leq C(D(x_1))^{|k_1|(1-\varepsilon)}$, $|\partial_{x_1}^{k_1} a_j(t, x_1)| \leq C(D(x_1))^{1+|k_1|(1-\varepsilon)}$, $|\partial_{x_1}^{k_1} a_0(t, x_1)| \leq C(D(x_1))^{2+|k_1|(1-\varepsilon)}$, $t \in [0, T]$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, де $C > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$; функції $b_{js}(t, x_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $b_j(t, x_1)$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $b_0(t, x_1)$ як функції t є неперервними рівномірно щодо $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

A₃. Похідні $\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_0$, $|k_1| \leq 2$, задовольняють локальну умову Гельдера за x з показником $\lambda \in (0, 1)$ рівномірно щодо $t \in [0, T]$, тобто

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall \{x_1, z_1\} \subset B_R^1 \quad \forall t \in [0, T]: \quad |\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} a(t, x_1)| \leq C |x_1 - z_1|^\lambda,$$

де символ a позначає коефіцієнти рівняння a_{js} , a_j та a_0 .

Нехай $g : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow [1, \infty)$ — функція, яка пов'язана з характеристикою дисипації D умовою

A₄. $g(x_1) \rightarrow \infty$ при $|x_1| \rightarrow \infty$; існують локально неперервні за Гельдером з показником λ з умови **A₃** похідні $\partial_{x_1}^{k_1} g$, $0 < |k_1| \leq 4$, які пов'язані з характеристикою дисипації D співвідношеннями

$$|\partial_{x_1}^{k_1} g(x_1)| \leq C \eta (D(x_1))^{|k_1|(1-\varepsilon)}, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad 0 < |k_1| \leq 4,$$

де $C > 0$; $\varepsilon \in (0, 1)$; η — досить мале додатне число, вибором якого в кожній конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

Використовуватимемо такі оцінні функції:

$$E_c^p(t, z_p) := \exp\{-ct^{1-2p} |z_p|^2\}, \quad t > 0, \quad z_p \in \mathbb{R}^{n_p}, \quad p \in \{1, 2\};$$

$$E_c^p(t, z_p) := \exp\{-ct^{1-2p} |z_p|^2\}, \quad t > 0, \quad z_p \in \mathbb{R}^{n_p}, \quad p \in \{1, 2\};$$

$$E_c(t, x, \xi) := E_c^1(t, x_1 - \xi_1) E_c^2(t, X_2(t) - \xi_2), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n;$$

$$F_c(t, x, \xi) := \exp\{-c((4t)^{-1} |x_1 - \xi_1|^2 + 3t^{-3} |x_2 + 2^{-1}t(x'_1 + \xi'_1) - \xi_2|^2)\}, \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ці функції згідно з [2] мають такі властивості:

$$E_c(t, x, \xi) \leq F_{c_1}(t, x, \xi) \leq E_{c_2}(t, x, \xi), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < c_2 < c_1 < c, \quad (3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_c(t, x, \xi) d\xi = C, \quad (4)$$

$$\forall \delta \in (0, 1) \exists C_\delta \forall \{t, \theta, \tau\} \subset \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < \theta < t \leq T \quad \forall \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n :$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_c(t - \theta, x, y) E_c(\theta - \tau, y, \xi) ((t - \theta)(\theta - \tau))^{-M} dy \leq C_\delta (t - \tau)^{-M} E_{c(1-\delta)/4}(t - \tau, x, \xi), \quad (5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_c(t - \theta, x, y) F_c(\theta - \tau, y, \xi) ((t - \theta)(\theta - \tau))^{-M} dy = C(t - \tau)^{-M} F_c(t - \tau, x, \xi), \quad c > 0. \quad (6)$$

Зазначимо, що справджуються ще такі нерівності:

$$E_c(\theta - \tau, X(t - \theta), \xi) \leq E_c(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \leq \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

$$E_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t - \theta)), \xi) \leq E_{c/2}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c}^1(\theta - \tau, y_1 - x_1), \quad (8)$$

$$0 \leq \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

З нерівності (8) і урахуванням того, що $\theta - \tau \geq t - \theta$ при $\theta \in [(t + \tau)/2, t]$, одержуємо

$$E_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t - \theta)), \xi) \leq E_{c/2}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c}^1(t - \theta, y_1 - x_1),$$

$$(t + \tau)/2 < \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}. \quad (9)$$

Властивості параметриксу. Опишемо спочатку головний член формули для ФРЗК. Для цього розглянемо рівняння

$$\left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, y_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, y_1) \partial_{x_{1j}} (-i \partial_{x_{n+1}}) - b_0(t, y_1) (-i \partial_{x_{n+1}})^2 \right) v(t, x, x_{n+1}) = 0,$$

$$(t, x, x_{n+1}) \in \Pi_{(0,T]} \times \mathbb{R}, \quad (10)$$

де y_1 — фіксована точка простору $\mathbb{R}^{n_1}$. Коефіцієнти рівняння (10) є симетричними функціями, які залежать від t і параметра y_1 . За зроблених припущень на коефіцієнти рівняння так само, як і в [2], доводиться існування ФРЗК $G_0(t, x, \tau, \xi, x_{n+1} - \xi_{n+1}, y_1)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_{n+1}, \xi_{n+1}\} \subset \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, рівняння (10), для якого справджуються оцінки

$$|\partial_x^k \partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}} G_0(t, x, \tau, \xi, x_{n+1} - \xi_{n+1}, y_1)| \leq C_{kk_{n+1}} (t - \tau)^{-M - M_k - |k_{n+1}|/2} E_c(t - \tau, x, \xi) \times$$

$$\times \exp \{-c |x_{n+1} - \xi_{n+1}|^2 (t - \tau)^{-1}\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{x_{n+1}, \xi_{n+1}\} \subset \mathbb{R}, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad (11)$$

де $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_{n+1} \in \mathbb{Z}_+^1$, $C_{kk_{n+1}} > 0$, $c > 0$ — деякі сталі, $M_k := |k_1| m_1 + |k_2| m_2$; $M_{k_1} := |k_1| m_1$ при $k = (k_1, 0)$. При цьому, зокрема, похідна $\partial_x^k G_0(t, x, \tau, \xi, z, y_1)$, $z = \bar{z} + i\bar{z} \in \mathbb{C}$, як функція аргументу $(t - \tau)^{-1/2} z$ за фіксованих t, τ, x, ξ і y_1 є цілою функцією, для якої справджуються оцінки

$$|\partial_x^k G_0(t, x, \tau, \xi, z, y_1)| \leq C_k (t - \tau)^{-M - M_k} E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c|\bar{z}|^2(t - \tau)^{-1} + c'|\bar{z}|^2(t - \tau)^{-1}\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad (12)$$

де $C_k > 0$, $c > 0$, $c' > 0$.

Нехай $\hat{G}_0(t, x; \tau, \xi; v; y_1) := F_{z \rightarrow v}[G_0(t, x; \tau, \xi; z; y_1)]$. Тоді функція $\hat{G}_0(t, x; \tau, \xi; v; y_1)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $v \in \mathbb{R}$, є ФРЗК рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, y_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, y_1) \partial_{x_{1j}} v - b_0(t, y_1) v^2 \right) \hat{v}(t, x) = 0$$

для довільно фіксованих точок $v \in \mathbb{R}$ і $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$. Поклавши $\hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) := \hat{G}_0(t, x; \tau, \xi; D(y_1); y_1)$, з оцінок (12) на підставі леми про перетворення Фур'є з [2] одержуємо

$$|\partial_x^k \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1)| \leq C_k (t - \tau)^{-M - M_k} E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad (13)$$

де $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $C_k > 0$, $c > 0$. При цьому функція

$$\hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) = F_{\sigma \rightarrow X(t - \tau) - \xi}^{-1}[V_0(t, \tau, \sigma, y_1)](t, \tau, x, \xi, y_1)$$

є ФРЗК для рівняння

$$L(t, y_1, \partial_t, \partial_x) v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (14)$$

для кожної фіксованої точки $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, а $V_0(t, \tau, \sigma, y_1)$ є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} & \left[\partial_t - \left(- \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1) ([\sigma_{1j} + (t - \tau)\sigma_{2j}]\zeta'_j + \sigma_{1j}\zeta''_j) ([\sigma_{1s} + (t - \tau)\sigma_{2s}]\zeta'_s + \sigma_{1s}\zeta''_s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1) ([\sigma_{1j} + (t - \tau)\sigma_{2j}]\zeta'_j + \sigma_{1j}\zeta''_j) + a_0(t, y_1) \right) \right] V_0(t, \tau, \sigma, y_1) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\zeta'_j := \begin{cases} 1, & j \in \{1, \dots, n_2\}, \\ 0, & j \in \{n_2 + 1, \dots, n_1\}, \end{cases} \quad \zeta''_j := \begin{cases} 0, & j \in \{1, \dots, n_2\}, \\ 1, & j \in \{n_2 + 1, \dots, n_1\}, \end{cases}$$

і правильна оцінка

$$|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma, y_1)| \leq C \exp\{(-\delta_1 |\sigma_1|^2 + c_1 |\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_1 |\sigma_2|^2 + c_1 |\gamma_2|^2)(t - \tau)^3 - \delta(D(y_1))^2(t - \tau)\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{\sigma, \gamma\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad (16)$$

де $C > 0$, $\delta_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\delta > 0$.

Наведемо деякі властивості ФРЗК для рівняння (14) $\hat{G}$, в основі отримання повного аналітичного опису якого лежить оцінка (16).

Твердження 1. Нехай коефіцієнти рівняння (14) задовольняють умови A_1 і A_2 . Тоді справджуються оцінки

$$\left| \partial_x^k \partial_{y_1}^{l_1} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \right| \leq C(t - \tau)^{-(M + M_k + |l_1|(1 - \varepsilon)/2)} E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad l_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, \quad |l_1| \leq 2. \quad (17)$$

Доведення. Оцінимо похідні від $\hat{G}$ за y_1 . Згідно з вищевикладеним досить одержати оцінку похідних від $V_0(t, \tau, \varrho, y_1)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\varrho \in \mathbb{C}^n$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Диференціюючи рівність (15) за y_{1j} , $j \in \{1, \dots, n_1\}$, одержуємо

$$\begin{aligned} \partial_{y_{1j}} V_0(t, \tau, \varrho, y_1) = & \int_{\tau}^t V_0(t, \theta; \varrho; y_1) \left(- \sum_{j, s=1}^{n_1} \partial_{y_{1j}} a_{js}(\theta, y_1) ([\varrho_{1j} + (\theta - \tau)\varrho_{2j}] \zeta'_j + \right. \\ & \left. + \varrho_{1j} \zeta''_j) ([\varrho_{1s} + (\theta - \tau)\varrho_{2s}] \zeta'_s + \varrho_{1s} \zeta''_s) + i \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{y_{1j}} a_j(\theta, y_1) ([\varrho_{1j} + (\theta - \tau)\varrho_{2j}] \zeta'_j + \varrho_{1j} \zeta''_j) + \right. \\ & \left. + \partial_{y_{1j}} a_0(\theta, y_1) \right) V_0(\theta, \tau, \varrho, y_1) d\theta. \end{aligned}$$

Використавши умову A_2 , оцінку (16), нерівності $(t - \tau)^3 / 4 \leq (t - \theta)^3 + (\theta - \tau)^3 \leq (t - \tau)^3$ та нерівність

$$|r|^k \exp\{-c|r|^p\} \leq C_k \exp\{-c_0|r|^p\}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

в якій $k > 0$, $p > 0$, $c > 0$, $0 < c_0 < c$, $C_k > 0$, одержимо

$$\begin{aligned} \left| \partial_{y_{1j}} V_0(t, \tau; \varrho; y_1) \right| \leq & C \exp\{(-\delta_1 |\sigma_1|^2 + c_1 |\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_2 |\sigma_2|^2 + c_1 |\gamma_2|^2)(t - \tau)^3 - \\ & - \delta(D(y_1))^2(t - \tau)\} \left((D(y_1))^{1-\varepsilon} + (D(y_1))^{2-\varepsilon} + (D(y_1))^{3-\varepsilon} \right) \int_{\tau}^t d\theta \leq C(t - \tau)^{-(1-\varepsilon)/2} \times \\ & \times \exp\{(-\delta_1 |\sigma_1|^2 + c_1 |\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_2 |\sigma_2|^2 + c_1 |\gamma_2|^2)(t - \tau)^3 - \delta^1(D(y_1))^2(t - \tau)\}, \\ & 0 \leq \tau < t \leq T, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \varrho := \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n, \end{aligned}$$

де $c_1 > 0$, $0 < \delta^1 < \delta$, $\delta_2 = \delta_1 / 4$. Аналогічно, диференціюючи співвідношення (15) за y_{1j} , а потім за y_{1k} , $k \in \{1, \dots, n_1\}$, дістаємо оцінку $|\partial_{y_{1j}y_{1k}}^2 V_0(t, \tau, \varrho, y_1)|$, що дає можливість одержати повний аналітичний опис для похідних від функції $\hat{G}$.

Зауваження 1. З оцінок (18) випливають оцінки

$$\begin{aligned} \left| \partial_{x_1}^{k_1} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; x_1) \right| &\leq C(t - \tau)^{-M - M_{k_1}} E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c(t - \tau)(D(x_1))^2\}, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \quad |k_1| \leq 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Твердження 2. Нехай коефіцієнти рівняння (14) задовольняють умови $A_1 - A_3$. Тоді справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall \{y_1, z_1\} &\subset B_R^1: \\ \left| \Delta_{y_1}^{z_1} \partial_x^k \partial_{y_1}^{l_1} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \right| &\leq C |y_1 - z_1|^\lambda (t - \tau)^{-(M + M_{k_0} + |l_1|(1 - \varepsilon)/2)} E_c(t - \tau, x, \xi), \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad l_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, \quad |l_1| \leq 2, \end{aligned} \quad (20)$$

де $C > 0$, $c > 0$, $\lambda \in (0, 1]$ з умови A_3 , $\varepsilon \in (0, 1)$ з умови A_2 .

Доведення. Оцінка різниці $\Delta_{y_1}^{z_1} \partial_{y_1}^{l_1} V_0(t, \tau, \varrho, y_1)$, $\{y_1, z_1\} \subset B_R^1$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\varrho \in \mathbb{C}^n$, про-
водиться так само, як для $\partial_{y_1}^{l_1} V_0(t, \tau, \varrho, y_1)$, з використанням умови A_3 , оцінок (16), $|\partial_{y_1}^{l_1} V_0|$
та обмеженості в B_R^1 коефіцієнтів рівняння.

Твердження 3. Справджується рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = \exp\left\{\int_{\tau}^t a_0(\theta, y_1) d\theta\right\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}. \quad (21)$$

Зауваження 2. З оцінок (21) випливає, що для довільних $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, $0 \leq \tau < t \leq T$ і $x \in \mathbb{R}^n$,
 $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджуються рівності

$$\partial_x^k \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = 0$$

і

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = 1$$

рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$, а якщо $a_0 = 0$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = 1, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}.$$

Твердження 4. Нехай коефіцієнти рівняння (14) задовольняють умови A_1 і A_2 , а непер-
ервна функція $\varphi(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, задовольняє умови

$$|\varphi(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M - 1 + \varepsilon/2} E_c(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \forall R > 0 \quad \exists \lambda_1^p \in (0, 1), \quad \lambda_1^1 < \varepsilon, \quad \lambda_1^2 < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \{x, z^{(p)}\} \subset B_R : \\ |\Delta_{x_p}^{z_p} \varphi(t, x; \tau, \xi)| \leq C |x_p - z_p|^{\lambda_1^p} (t - \tau)^{-M-1+\lambda_2^p m_p} (F_c(t - \tau, x, \xi) + F_c(t - \tau, z^{(p)}, \xi)), \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_2^1 := \varepsilon - \lambda_1^1, \quad \lambda_2^2 := \frac{\varepsilon}{3} - \lambda_1^2, \quad p \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тоді функція

$$w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \theta, y, x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} w$, $|k_1| \leq 2$, і Sw , для яких правильні формули

$$\begin{aligned} \partial_{x_{1j}} w(t, x; \tau, \xi) &= \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \\ \partial_{x_{1j} x_{1l}}^2 w(t, x; \tau, \xi) &= \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j} x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j} x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j} x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi) d\theta, \\ Sw(t, x; \tau, \xi) &= \varphi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} S \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi) d\theta, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t_1 &:= t - (t - \tau) / 2. \end{aligned}$$

Доведення проводиться за методикою з праці [2]. Зазначимо лише, що для $x \in B_{R/2}$, де R — будь-яке фіксоване додатне число, і $y \in B_R$ приріст

$$\begin{aligned} \left| \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) \right| &\leq \left| \Delta_{(y_1, X_2(t-\theta))}^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) \right| + \left| \Delta_y^{(y_1, X_2(t-\theta))} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) \right| \leq C(\theta - \tau)^{-M-1} \times \\ &\times \left(|x_1 - y_1|^{\lambda_1^1} (\theta - \tau)^{\lambda_2^1 m_1} (F_c(\theta - \tau, X(t-\theta), \xi) + F_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t-\theta)), \xi)) + \right. \\ &\left. + |X_2(t-\theta) - y_2|^{\lambda_1^2} (\theta - \tau)^{\lambda_2^2 m_2} (F_c(\theta - \tau, y, \xi) + F_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t-\theta)), \xi)) \right), \end{aligned}$$

а для $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_R$

$$\begin{aligned} \left| \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) \right| &\leq |\varphi(\theta, y; \tau, \xi)| + |\varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi)| \leq \\ &\leq C(\theta - \tau)^{-M-1+\varepsilon/2} (E_c(\theta - \tau, y, \xi) + E_c(t - \tau, x, \xi)) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} E_c(t - \theta, x, y) &\leq \exp\{-c((t - \theta)^{-1} + (t - \theta)^{-3})(R/2)^2\} \leq \exp\{-c_1(t - \theta)^{-q} R^2\}, \\ 0 \leq \theta < t \leq T, \quad x &\in B_{R/2}, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus B_R, \end{aligned}$$

де $q = 3$ при $t - \theta < 1$ і $q = 1$ при $t - \theta \geq 1$. Для обґрунтування формули для $\hat{S}\hat{G}$ треба скористатись рівністю

$$\begin{aligned} \hat{S}\hat{G}(t, x; \tau, \xi; x_1) &= \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, x_1) \right) \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1}, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Побудова і оцінки ФРЗК. Основним результатом статті є така теорема.

Теорема. Нехай для рівняння (1) виконуються умови $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3$. Тоді для нього існує ФРЗК $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, для якого справджуються оцінки

$$\left| \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C(t - \tau)^{-M-M_{k_1}} E_c(t - \tau, x, \xi), \quad (24)$$

і

$$\left| \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C \sum_{j=0}^{|k_1|} (t - \tau)^{-M-M_{k_1}+jm_1} (D(x_1))^{j(1-\varepsilon)} E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{g(x_1) - g(\xi_1)\}, \quad (25)$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k_1| \leq 2,$$

де C і $\tilde{n}$ — додатні сталі, а g — будь-яка функція, що задовольняє умову $\mathbf{A}_4$.

Доведення. Згідно з методом Леві ФРЗК для рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$G(t, x; \tau, \xi) = \hat{G}(t, x; \tau, \xi; x_1) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy,$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (25)$$

де $\varphi(\cdot, \cdot; \tau, \xi) : \Pi_{[0, T]} \rightarrow \mathbb{C}$ — функція, яку підбираємо так, щоб функція $G(\cdot, \cdot; \tau, \xi) : \Pi_{[0, T]} \rightarrow \mathbb{C}$, яка визначається формулою (25), була розв'язком рівняння (1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{[0, T]}$.

Припускаючи, що функція φ є неперервною і для неї справджуються оцінки (22) та (23), застосовуючи диференціальний вираз L з (1) до функції (25) і припущення щодо φ ,

на підставі твердження 4 одержуємо для φ інтегральне рівняння

$$\varphi(t, x; \tau, \xi) = K(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де ядро K визначається формулою

$$\begin{aligned} K(t, x; \tau, \xi) := & \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1) (\partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{y_{1s}}) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1) \partial_{y_{1j}} \right) \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Використовуючи умову A_1 на коефіцієнти рівняння, оцінки (17) та нерівності (3) і (18), одержуємо для ядра K оцінки

$$K(t, x; \tau, \xi) \leq C(t - \tau)^{-M-1+\varepsilon/2} F_{c_1}(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $C > 0$, $0 < c_1 < c$, а c — стала з оцінок (17). Отже, для ядра K виконуються умови леми 1.10 з [2], на підставі якої для φ справджується оцінка (22).

При $|x_1 - z_1|^{1/m_1} > (t - \tau)/2$ та $|x_2 - z_2|^{1/m_2} > (t - \tau)/2$ відповідно оцінки (23) випливають з (22). Тому розглянемо випадок $|x_p - z_p|^{1/m_p} \leq (t - \tau)/2$, $p \in \{1, 2\}$.

Запишемо

$$\begin{aligned} \Delta_{x_p}^{z_p} \varphi(t, x; \tau, \xi) = & \Delta_{x_p}^{z_p} K(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_p}^{z_p} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ & + \int_{\nu}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy - \int_{\nu}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, z^{(p)}; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \end{aligned}$$

де $\nu := t - |x_p - z_p|^{1/m_p}$. Для оцінки першого доданка з урахуванням (26) маємо

$$\begin{aligned} \Delta_{x_1}^{z_1} K(t, x; \tau, \xi) = & \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{js}(t, x_1) (\partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{y_{1s}}) + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_j(t, x_1) \partial_{y_{1j}} \right) \times \\ & \times \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, z_1) ((\partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{y_{1s}}) \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} - \\ & - (\partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{y_{1s}}) \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=z_1} + \\ & + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, z_1) (\partial_{y_{1j}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} - \partial_{y_{1j}} \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=z_1}), \\ \Delta_{x_2}^{z_2} K(t, x; \tau, \xi) = & \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1) ((\partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{y_{1s}}) \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \partial_{y_{1j}} \partial_{y_{1s}}) \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1, x=z^{(2)}} + \\
 & + \sum_j^{n_1} a_j(t, x_1) (\Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{y_{1j}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1)) \Big|_{y_1=x_1}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, z^{(p)}, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

Запишемо

$$\begin{aligned}
 & \partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} - \partial_{z_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=z_1} = \\
 & = (\partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} - \partial_{z_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1}) + \\
 & + (\partial_{z_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} - \partial_{z_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=z_1}). \tag{27}
 \end{aligned}$$

Використовуючи оцінки (17), нерівність з [15] $E_c(t - \tau, \chi^{(p)}, \xi) \leq C_1 E_{c_1}(t - \tau, x, \xi)$, $t > \tau$, $C_1 > 0$, $0 < c_1 < c$, де $\chi^{(p)}$ — довільна точка відрізка, що сполучає точки x і $z^{(p)}$, $p \in \{1, 2\}$, одержуємо оцінки

$$\begin{aligned}
 & \left| \partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) - \partial_{z_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \right| \leq \\
 & \leq C |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t - \tau)^{-M-1/2-(1-\varepsilon)/2-\alpha_1^0 m_1} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\}, \\
 & |x_1 - z_1|^{1/m_1} \leq (t - \tau) / 2, \quad \alpha_1^0 \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

З формули (27), останньої оцінки з $\alpha_1^0 = \lambda$ та оцінки (20) одержуємо

$$\begin{aligned}
 & \forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall \{x_1, z_1\} \subset B_R, \quad |x_1 - z_1| \leq (t - \tau)^{m_1} : \\
 & \left| \partial_{x_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=x_1} - \partial_{z_{1j}} \partial_{y_{1s}} \hat{G}(t, z^{(1)}; \tau, \xi; y_1) \Big|_{y_1=z_1} \right| \leq C |x_1 - z_1|^\lambda \times \\
 & \times (t - \tau)^{-M-1/2-(1-\varepsilon)/2-\lambda m_1} (E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) + E_c(t - \tau, z^{(1)}, \xi)).
 \end{aligned}$$

Аналогічно розглядаються інші прирости, які використовуються для доведення (23).

Для доведення оцінки (24) використовуються вирази (3)—(9), а для одержання рівняння (25) потрібно в (1) зробити заміну $u(t, x) = e^{g(x_1)} v(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{(0, T]}$, в якій функція g задовольняє умову A_4 . При цьому для коефіцієнтів отриманого рівняння виконуються умови A_4 — A_3 , причому умова параболічності (3) задовольняється за малих η .

Висновки. Для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних і зростаючими коефіцієнтами побудовано ФРЗК, досліджено його властивості і властивості потенціалів, а також отримано оцінки ФРЗК та його похідних. Отримані результати мають теоретичний характер і використовуватимуться для дослідження коректної розв'язності задачі Коші для таких рівнянь, а також для дослідження дисипативних вироджених рівнянь з більшою кількістю груп змінних виродження.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung). *Ann. Math.* 1934. **35**, № 1. P. 116—117. <https://doi.org/10.2307/1968123>
2. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Basel: Springer, 2004. 390 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 152). <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9>
3. Процах Н.П., Пташник Б.Й. Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності. Київ: Наук. думка, 2017. 280 с.
4. Citti G., Pascucci A., Polidoro S. On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance. *Differ. Integral Equ.* 2001. **14**, № 6. P. 701—738. <https://doi.org/10.57262/die/1356123243>
5. Di Francesco M., Pascucci A. On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type. *Appl. Math. Res. eXpress*. 2005. № 3. P. 77—116. <https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77>
6. Di Francesco M., Pascucci A. A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing. *J. Math. Anal. Appl.* 2007. **336**, № 2. P. 1026—1041. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.031>
7. Foschi P., Pascucci A. Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems. *Lect. Notes Semin. Interdiscip. Mat.* 2007. **6**. P. 145—156.
8. Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. The Fokker—Planck—Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Theory Stoch. Process.* 2009. **16**, № 1. P. 57—66.
9. Lanconelli E., Polidoro S. On a class hypoelliptic evolution operators. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*. 1994. **52**, № 1. P. 29—63.
10. Pascucci A. Kolmogorov equations in physics and in finance. *Elliptic and parabolic problems*. Basel: Birkhäuser, 2005. P. 353—364. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 63). https://doi.org/10.1007/3-7643-7384-9_35
11. Polidoro S. A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov—Fokker—Planck equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1997. **137**, № 4. P. 321—340. <https://doi.org/10.1007/s002050050031>
12. Ейдельман С.Д., Малицька Г.П. Про рівняння дифузії з інерцією, коефіцієнти яких ростуть. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1974. № 2. С. 106—110.
13. Бабич О.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв’язок задачі Коші для виродженого параболического рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів. *Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: Математика*. 2011. **1**, № 1—2. С. 13—24.
14. Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв’язок задачі Коші для одного параболического рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*. 2014. **11**, № 2. С. 126—153.
15. Івасишен С.Д., Мединський І.П. Класичний фундаментальний розв’язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *Буковинський мат. журн.* 2014. **2**, № 2—3. С. 94—106.

Надійшла до редакції 18.04.2025

REFERENCES

1. Kolmogoroff, A. (1934). Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung). *Ann. Math.*, 35, No. 1, pp. 116-117. <https://doi.org/10.2307/1968123>
2. Eidelman, S. D., Ivasyshen, S. D. & Kochubei, A. N. (2004). Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. *Operator Theory: Advances and Application* (Vol. 152). Basel: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9>
3. Protsach, N. P. & Ptashnyk, B. Yo. (2017). Nonlinear ultraparabolic equations and variational inequalities. Kyiv: Naukova Dumka (in Ukrainian).
4. Citti, G., Pascucci, A. & Polidoro, S. (2001). On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance. *Differ. Integral Equ.*, 14, No. 6, pp. 701-738. <https://doi.org/10.57262/die/1356123243>
5. Di Francesco, M. & Pascucci, A. (2005). On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type. *Appl. Math. Res. eXpress*, No. 3, pp. 77-116. <https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77>
6. Di Francesco, M. & Pascucci, A. (2007). A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing. *J. Math. Anal. Appl.*, 336, No. 2, pp. 1026-1041. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.031>
7. Foschi, P. & Pascucci, A. (2007). Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems. *Lect. Notes Semin. Interdiscip. Mat.*, 6, pp. 145-156.
8. Ivasyshen, S. D. & Medynsky, I. P. (2010). The Fokker—Planck—Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Theory Stoch. Process.*, 16, No. 1, pp. 57-66.
9. Lanconelli, E. & Polidoro, S. (1994). On a class hypoelliptic evolution operators. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 52, No. 1, pp. 29-63.
10. Pascucci, A. (2005). Kolmogorov equations in physics and in finance. In *Elliptic and parabolic problems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* (Vol. 63) (pp. 353-364). Basel: Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/3-7643-7384-9_35
11. Polidoro, S. (1997). A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov—Fokker—Planck equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 137, No. 4, pp. 321-340. <https://doi.org/10.1007/s002050050031>
12. Eidelman, S. D. & Malyska, H. P. (1974). On equations diffusion with inertia with growing coefficients. *Dop. AN URSR. Ser. A*, No. 2, pp. 106-110 (in Ukrainian).
13. Babych, O. O., Ivasyshen, S. D. & Pasichnyk, H. S. (2011). An fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate parabolic equation with growing young members. *Nauk. Visn. Cherniv. nats. Un-tu im. J. Fedkovycha. Ser.: Matematyka*, 1, No. 1-2, pp. 13-24 (in Ukrainian).
14. Ivasyshen, S. D. & Pasichnyk, H. S. (2014). Fundamental solution of the Cauchy problem for an parabolic equation with growing young members. *Zbirnyk prats' In-tu matematyky NAN of Ukrainy*, 11, No. 2, pp. 126-153 (in Ukrainian).
15. Ivasyshen, S. D. & Medensky, I. P. (2014). Classical fundamental solution for degenerate Kolmogorov equation whose coefficients do not depend on variables of degeneration. *Bukovynskyi Mat. Zhurn.*, 2, No. 2-3, pp. 94-106 (in Ukrainian).

Received 18.04.2025

I.P. Medinskyi^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-0651-4198>

H.S. Pasichnyk³, <https://orcid.org/0000-0002-1759-5042>

¹ Y.S. Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

² Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

³ Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

FUNDAMENTAL SOLUTION TO CAUCHY PROBLEM
FOR KOLMOGOROV-TYPE EQUATION WITH UNBOUNDED COEFFICIENTS
THAT DO NOT DEPEND ON DEGENERATION VARIABLES

The class of equations considered in the work is a generalization of the well-known equation diffusion with inertia of A.M. Kolmogorov. These equations are degenerate differential equations with partial derivatives of the parabolic type. They contain only lower derivatives in the sense of the theory of parabolic equations for some of the spatial variables. Such equations belong to the class of ultraparabolic or elliptic-parabolic equations. These equations and their various generalizations have been studied by many authors. Linear and nonlinear ultraparabolic equations arise in some problems of probability theory, mathematical modeling of options, Brownian motion theory, convective diffusion theory, binary electrolytes theory, modeling of diffusion processes with inertia and electron scattering, and other branches of science. In addition to the Kolmogorov structure, the equations under consideration have another peculiarity: the coefficients of the group of junior terms grow indefinitely. A degenerate second-order Kolmogorov equation with unbounded coefficients independent of the degeneracy variables is considered. The coefficients of the equation are differentiable, and their growth depends on some increasing and differentiable function. For such an equation, a fundamental solution of the Cauchy problem has been constructed and estimates of its derivatives with respect to the main group of variables are obtained. The obtained results can be used in studying the solvability of the Cauchy problem for the equation under consideration, as well as in constructing and investigating the fundamental solution of the Cauchy problem for an equation with coefficients depending on all groups of spatial variables and growing at $|x| \rightarrow \infty$.

Keywords: *Kolmogorov-type equations, increasing coefficients, fundamental solution of the Cauchy problem, Levi method.*