ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.025
УДК 539.3

І.Я. Жбадинський, https://orcid.org/0000-0003-2525-0885

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: zhbadynskyi.igor@gmail.com

Визначення коефіцієнта проходження пружних хвиль у метаматеріалі з ґратками двоперіодичних еліптичних тріщин

Представлена академіком НАН України Р.М. Кушніром

Розглянуто тривимірну задачу поширення гармонічної поздовжньої хвилі у пружному просторі з двоперіодичними масивами еліптичних тріщин за їх укладання в скінченний набір рівновіддалених паралельних квадратних ґраток. У частотній області отримано граничне інтегральне рівняння стосовно розкриття відлікової тріщини в унітарній комірці двоперіодичної структури за допомогою відповідної функції Гріна. Для стійкості числових розрахунків використано подання функції Гріна в експоненціально збіжній формі та здійснено регуляризацію цієї функції шляхом залучення замкнутих значень спеціальних ґраткових сум. Числове розв'язання рівняння виконано за допомогою методу відображень. Обчислення коефіцієнта проходження хвиль у метаматеріалі з поодинокою ґраткою тріщин забезпечено підстановкою граничноелементних розв'язків у співвідношення апроксимації віддаленого від ґраткового масиву хвильового поля. Для випадку множинних ґраток цей коефіцієнт визначено на основі широкопросторової еквідистантної моделі хвильового перенесення.

Ключові слова: *періодичні еліптичні тріщини, коефіцієнт проходження хвиль, дифракція та інтерференція хвиль, метод граничних інтегральних рівнянь, широкопросторова модель, метод відображень.*

Вступ. Практичне зацікавлення метаматеріалами зі штучно організованою регулярністю їх структури зумовлено досягненням унікальних хвильових якостей, наприклад здатності, крім локалізації хвильової енергії [1] і негативної рефракції [2], до вибіркового пропускання чи блокування хвиль на частотному спектрі [3]. Збагачення цих проявів конструктивної чи деструктивної хвильової інтерференції забезпечується розглядом пружних середовищ внаслідок виникнення і перетворення у них різномодових хвиль (поздовжніх і поперечних).

До нового класу належать метаматеріали, сформовані введенням у пружне середовище періодично розташованих тонкостінних неоднорідностей. На противагу об'ємистим [4],

Цитування: Жбадинський І.Я. Визначення коефіцієнта проходження пружних хвиль у метаматеріалі з ґратками двоперіодичних еліптичних тріщин. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 3. С. 25—32. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.025

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

тонкостінні розсіювачі, зокрема кругові [5] та прямокутні [6] тріщини, уможливлюють утворення плоских ґраток на шляху поширення хвиль, а відтак приводять до спеціальних ефектів хвильового відбиття і проникнення. У роботі [7] на прикладі еквідистантного каскаду з таких ґраток показано існування частот з нульовим коефіцієнтом проходження поздовжньої пружної хвилі.

Мета роботи — поширити аналіз гармонічного за часом проникнення пружних хвиль на випадок наявності в метаматеріалі множини рівновіддалених площинних екранів із нескінченними двоперіодичними системами еліптичних тріщин.

Постановка задачі. Розглянемо тривимірний пружний метаматеріал, сформований розташуванням у безмежному просторі довільного, проте скінченного числа N рівновіддалених з інтервалом h площин $x_3 = 0, h, 2h, \ldots, (N-1)h$ з двоперіодичними масивами еліптичних тріщин з однаковими великими a та малими b півосями. Геометричні центри областей $S_{nm}\,(n, m \in \mathbb{Z})$, які займають тріщини у кожній площині, розташовані з періодичністю d уздовж двох взаємно перпендикулярних осей, а малі та великі півосі еліпсів є паралельними до цих осей. Таке розташування забезпечує квадратний візерунок утворених ґраток з тріщин та трипереодичність загального масиву розсіювачів. Механічні властивості матеріалу простору визначаються густиною ρ, модулем зсуву μ та коефіцієнтом Пуассона ν. Перпендикулярно на каскад з ґраток тріщин у напрямку осі Ox_3 набігає плоска поздовжня гармонічна у часі хвиля переміщень $u_3^{in}(\mathbf{x}) = u_0 \exp(ik_1 x_3)$ із заданими сталою амплітудою u_0 та циклічною частотою k (тут і далі загальний експоненціальний часовий множник вилучається з розв'язку, $k_1 = \sqrt{(1-2\nu)\rho}k / \sqrt{2(1-\nu)\mu}$, $k_2 = \sqrt{\rho}k / \sqrt{\mu}$ — хвильові числа поздовжньої і поперечної мод, $i = \sqrt{-1}$).

Вихідними для сформульованої задачі приймаються рівняння коливань пружного середовища у переміщеннях $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, які за відсутності масових сил мають вигляд [8]

$$k_1^{-2}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - k_2^{-2}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0\,, \tag{1}$$

де ∇ — тривимірний набла-вектор.

Крайові умови на поверхнях тріщин записуються як

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in S_{nm} \;\; (n, m \in \mathbb{Z})\,. \tag{2}$$

У точному формулюванні розглянута задача передбачає задоволення крайових умов (2) на всій сукупності тріщин, включно з урахуванням індивідуальних взаємодій між тими, що розташовані в різних площинах. Спрощення аналізу досягається для відносно розрідженого каскаду та з використанням хвильових розподілів у віддаленій зоні.

Широкопросторова апроксимація хвильових полів для еквідистантного каскаду розсіювачів. Виходитимемо з припущення, що відстань між сусідніми площинами розсіювачів є достатньо великою ($h > 2a$), щоб знехтувати впливом на взаємодію між цими площинами хвиль, відмінних від плоских поздовжніх з напрямком спадної хвилі. Також відстань між площинами повинна перевищувати довжину генерувальної хвилі ($k_1 h > 1$). Вказані умови забезпечують достатньо великий простір між ґратками тріщин, гарантуючи їх розділення у фізичному сенсі, тобто вплив решти площин на поле розсіяних хвиль біля кожної ґратки є мінімальним. Це спрощує аналіз, оскільки кожна площина розглядається незалежно від інших [7]. У рамках такого наближення коефіцієнти відбиття R_N та проходження T_N хвиль на періодичній структурі, що складається з $N \geq 2$ рівновіддалених площин з тріщинами, визначаються співвідношеннями [9]

$$R_N = -\frac{t_{21}}{t_{22}}, \quad T_N = \exp[-ik_1 h(N-1)]\left(t_{11} - \frac{t_{12}t_{21}}{t_{22}}\right). \tag{3}$$

Тут $t_{jk}\ (j,k=1,2)$ — коефіцієнти матриці $\mathbf{S}^N$ розмірності 2 × 2, яка отримується перемноженням матриці розсіяння $\mathbf{S}$ для одноплощинного масиву двоперіодичних тріщин стільки разів, скільки бар'єрів у каскаді, а саме:

$$\mathbf{S}^N = \underbrace{\mathbf{S} \times \mathbf{S} \times \ldots \times \mathbf{S}}_{N}. \tag{4}$$

У рівнянні (4) матриця розсіяння $\mathbf{S}$ виражається через коефіцієнти відбиття R_1 та проходження T_1 хвиль для одноплощинного масиву тріщин таким чином:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{T_1}\begin{pmatrix} \left[T_1^2 - R_1^2\right]\exp\left(ik_1 h\right) & R_1 \exp\left(ik_1 h\right) \\ -R_1 \exp\left(-ik_1 h\right) & \exp\left(-ik_1 h\right) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

У частотному діапазоні $0 \leqslant k_2 d \leqslant 2\pi$ спостерігається дифракція лише поздовжніх хвиль. Щоб знайти R_1 та T_1-коефіцієнти у цьому діапазоні, використовуватимемо формули [10]

$$R_1 = (2d^2 u_0)^{-1} \iint_S \Delta u(\mathbf{y})\, dS_{\mathbf{y}}, \quad T_1 = 1 + (2d^2 u_0)^{-1} \iint_S \Delta u(\mathbf{y})\, dS_{\mathbf{y}}, \tag{6}$$

де Δu — стрибок переміщень на відліковій тріщині $S = S_{00}$, введений як результат природних умов періодичності

$$\Delta u_{nm}(x_1 + nd,\ x_2 + md) = \Delta u(x_1, x_2), \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Отже, задача поширення пружної поздовжньої хвилі у розглянутому метаматеріалі зводиться до знаходження функції стрибка переміщень (7) за набігу на тріщини в одноплощинному двоперіодичному масиві та підстановки цієї функції у співвідношення (3)—(6) для коефіцієнтів відбиття R_N і проходження T_N хвиль за розгляду N-площинного еквідистантного каскаду розсіювачів.

Визначення стрибків динамічних переміщень на репрезентативній тріщині у квадратній ґратці. З урахуванням умов періодичності (7) та крайових умов на тріщинах (2) задача зводиться до граничного інтегрального рівняння (ГІР) з інтегруванням за областю розташування лише відлікового дефекту S відносно стрибка нормальних переміщень Δu у цій області:

$$\iint_S \Delta u(\mathbf{y})\left[R(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + G(\mathbf{x},\mathbf{y})\right] dS_{\mathbf{y}} = -\frac{\pi k_2^2}{\mu}\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S. \tag{8}$$

Тут ядро $R(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ відповідає за індивідуальну реакцію відлікової тріщини на хвильове навантаження і має вигляд

$$R(r)=\{(9-9ik_2r-4k_2^2r^2+ik_2^3r^3)\exp(ik_2r)-[9-9ik_1r+(k_2^2-5k_1^2)r^2+$$
$$+ik_1(2k_1^2-k_2^2)r^3+\frac{1}{4}(2k_1^2-k_2^2)^2r^4]\exp(ik_1r)\}r^{-5}, \tag{9}$$

$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ — відстань між точкою джерела $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ і точкою інтегрування $\mathbf{y}(y_1, y_2)$, а ядро $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — за взаємодію відлікової тріщини з усіма іншими у двоперіодичній ґратці. Це ядро інтерпретується як функція Гріна і має вигляд подвійно-нескінченної суми, експоненціально збіжний аналог якої можна записати у формі

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{d^5}\sum_{j=1}^{2}\left[\int_0^\infty t\frac{\exp(-U_j(t))}{U_j(t)[1-\exp(-U_j(t))]}Y_j\left(\frac{x_1-y_1}{d},t\right)\times\right.$$
$$\times\Omega_j\left(\left|\frac{x_2-y_2}{d}\right|,t\right)dt+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(2\pi in\frac{x_1-y_1}{d}\right)\times$$
$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-W_{jn}(t))}{W_{jn}(t)[1-\exp(-W_{jn}(t))]}X_{jn}\left(\frac{x_2-y_2}{d},t\right)\Phi_j(t)dt\right], \tag{10}$$

де

$$Y_j(q,t)=\exp[qU_j(t)]+\exp[-qU_j(t)],$$

$$\Omega_1(p,t)=\left(\frac{k_2^2}{2}-k_1^2\right)^2d^4J_0(pt)+t(k_2^2-2k_1^2)\,d^2\,\frac{J_1(pt)}{p}+$$

$$+3t^2\frac{J_2(pt)}{p^2},\ \ \Omega_2(p,t)=tk_2^2d^2\frac{J_1(pt)}{p}-3t^2\frac{J_2(pt)}{p^2},$$

$$U_j(t)=\sqrt{t^2-(k_jd)^2},\ \ W_{jn}(t)=\sqrt{t^2+(2\pi n)^2-(k_jd)^2},$$

$$X_{jn}(r,t)=\exp[rW_{jn}(t)]+\exp[-rW_{jn}(t)],$$

$$\Phi_1(t)=\left(\frac{k_2^2}{2}-k_1^2\right)^2d^4+t^2(k_2^2-2k_1^2)\,d^2+t^4,$$

$$\Phi_2(t)=t^2k_2^2d^2-t^4.$$

Ефективне числове розв'язування ГІР (8) повинно спиратися на відповідні регуляризаційні процедури щодо інтегралів з гіперсингулярністю $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-3}$ в ядрі R у точці джерела $\mathbf{y}=\mathbf{x}$, а також інтегралів з сингулярностями в ядрі G у точках $t=k_jd$, що є коренями функцій $U_j(t)$. Методику усунення сингулярностей ядра G детально описано в роботі [5].

Метод відображень ГІР задачі. Зважаючи на збіг характеристичних частин ГІР розглянутої задачі і задачі динамічного навантаження безмежного однорідного тіла з тріщиною, для побудови регулярного аналога рівняння (8) можна використати методику роботи [11], яка передбачає відображення еліптичної області S на кругову область $\tilde{S}$ одиничного радіуса. Для цього виконуємо заміну змінних:

$$\begin{cases} x_1 = a\xi_1, \\ x_2 = b\xi_2, \end{cases} \begin{cases} y_1 = a\eta_1, \\ y_2 = b\eta_2, \end{cases} \tag{11}$$

де $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2)$, $\boldsymbol{\eta}(\eta_1, \eta_2)$ — нові змінні в області $\tilde{S}$. Після такої заміни ГІР (8) набуває вигляду

$$\iint_S \Delta\tilde{u}(\boldsymbol{\eta}) \left[R\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|}{\beta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})} \right) + \tilde{G}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \right] d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{\pi k_2^2}{\mu} \tilde{\sigma}_{33}^{\text{in}}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{S}, \tag{12}$$

У рівнянні (12) введено такі позначення для складних функцій:

$$\Delta\tilde{u}(\boldsymbol{\xi}) = ab\Delta u(\mathbf{x})\Big|_{\substack{x_1=a\xi_1\\ x_2=b\xi_2}}; \quad \tilde{\sigma}_{33}^{\text{in}}(\boldsymbol{\xi}) = \sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x})\Big|_{\substack{x_1=a\xi_1\\ x_2=b\xi_2}}; \quad \tilde{G}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big|_{\substack{x_1=a\xi_1,\, y_1=a\eta_1\\ x_2=b\xi_2,\, y_2=b\eta_2}};$$

функція $\beta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ описує відношення відстаней між точками $\boldsymbol{\xi}$ і $\boldsymbol{\eta}$ та їх прообразами, тобто

$$\beta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{a}\left[1 - q^2 \frac{(\eta_2-\xi_2)^2}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2} \right]^{-1/2}, \quad q = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2}.$$

У ГІР (12) виділяємо особливі інтеграли, перетворивши його тотожно [5]:

$$-\iint_{\tilde{S}} \Delta\tilde{u}(\boldsymbol{\eta}) \frac{[\beta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})]^3}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^3} d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} - \frac{(7-12\nu+8\nu^2)k_2^2}{8(1-\nu)} \iint_{\tilde{S}} \frac{\Delta\tilde{u}(\boldsymbol{\eta})}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|} d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} -$$

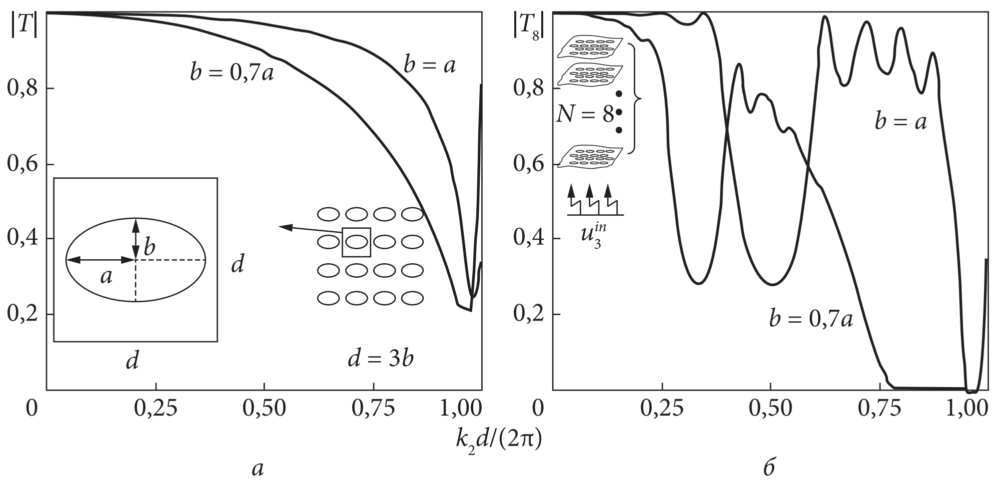
$$-\iint_{\tilde{S}} \Delta\tilde{u}(\boldsymbol{\eta}) \left[\frac{4(1-\nu)}{k_2^2} R\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|}{\beta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})} \right) - \frac{[\beta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})]^3}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^3} - \frac{(7-12\nu+8\nu^2)k_2^2 \beta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})}{8(1-\nu)|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|} \right] d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} -$$

$$-\frac{4(1-\nu)}{k_2^2} \iint_{\tilde{S}} \Delta\tilde{u}(\boldsymbol{\eta}) \tilde{G}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} \tilde{\sigma}_{33}^{\text{in}}(\boldsymbol{\xi}), \qquad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{S}. \tag{13}$$

Тут перший інтеграл гіперсингулярний, а другий — слабосингулярний. Ці інтеграли мають форму своїх статичних аналогів, а їх регуляризація [5] реалізується через подання

$$\Delta\tilde{u}(\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\, \tilde{\alpha}(\boldsymbol{\eta}), \tag{14}$$

де $\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\eta})$ — нова невідома функція. Подання (14) відповідає фізичній інтерпретації функції $\Delta u(\mathbf{x})$ як стрибка нормальних переміщень на тріщині та умові неперервності переміщень на контурі цієї тріщини.



Залежності модуля коефіцієнта проходження хвиль від безрозмірного хвильового числа для: *а* — одноплощинного, *б* — восьмиплощинного тріщинного бар'єру з двоперіодичних еліптичних ($b = 0{,}7a$) та кругових ($b = a$) тріщин з міжґратковою відстанню ($d = 3b$)

Рівняння (13) розв'язували числово, використовуючи метод колокацій у вузлових точках граничноелементного покриття області $\tilde{S}$. Під час розрахунків область репрезентативної тріщини розбивали на 177 елементів з інтервалами 1/12 у радіальному та π/8 кутовому напрямках. На кожному елементі шукану функцію приймали сталою. У такий спосіб отримали систему з 177 лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами для визначення значень функції $\tilde{\alpha}$ у вузлових точках області $\tilde{S}$.

Аналіз одержаних результатів. Числові результати стосуються частотної поведінки модулів коефіцієнтів хвильового проходження $|T_1|$ для одноплощинного масиву тріщин (рисунок, *а*) та $|T_8|$ у еквідистантному каскаді, утвореному вісьмома квадратними плоскими ґратками з однаковою відстанню $h = 3b$ між ними (рисунок, *б*). Розмір унітарної комірки квадратної ґратки з періодичних еліптичних тріщин вибирався як $d \times d$, $d = 3b$. На обох панелях рисунку графіки стосуються кругових ($b = a$) та еліптичних ($b = 0{,}7a$) тріщин. Коефіцієнт Пуассона матеріалу ν приймався рівним 0,3.

Для одноплощинного тріщинного бар'єру за низьких частот значення амплітуд коефіцієнта хвильового проходження близькі до одиниці $|T| = 1$, що відповідає безперешкодному проникненню хвиль, і не залежать від форми тріщин (див. рисунок, *а*). Зі збільшенням частоти спостерігається зменшення коефіцієнта проходження хвиль, яке стрімкіше для масиву еліптичних тріщин.

Здатність блокувати пружні хвилі фіксується для восьмиплощинного каскаду розсіювачів і продемонстрована частотними смугами, за яких спостерігається відсутність хвильового проникнення, коли $|T_8| = 0$ (див. рисунок, *б*). Частотна смуга блокування хвиль є значно ширшою для еліптичних тріщин порівняно з круговими.

Висновки. Поєднуючи методи широкопросторової апроксимації, відображень та ГІР, можна отримати ефективний аналітично-числовий інструментарій для аналізу поширення гармонічних хвиль у пружних метаматеріалах з каскадними системами періодичних тріщин зі змінною кривиною контуру. Такі метаматеріали дають змогу маніпулювати шириною спектра частот хвильового блокування вибором форми розсіювачів у ґратковій структурі. Збільшення кількості ґраток у метаматеріалі призводить до розширення смуги блокування хвиль, яка для еліптичних тріщин є стабільно ширшою, ніж для кругових. Отримані результати щодо коефіцієнта проходження хвиль застосовні в технологіях дизайну і продукування тривимірних метаматеріалів та фононних кристалів з контрольованою хвилепровідністю.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Lee G., Park J., Choi W., Ji B., Kim M., Rho J. Multiband elastic wave energy localization for highly amplified piezoelectric energy harvesting using trampoline metamaterials. *Mech. Syst. Signal Process*. 2023. **200**. 110593. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110593
2. Bonnet G., Monchiet V. Negative refraction of elastic waves on a metamaterial with anisotropic local resonance. *J. Mech. Phys. Solids*. 2022. **169**. 105060. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105060
3. Tian Y., Shen Y. Selective guided wave mode transmission enabled by elastic metamaterials. *J. Sound Vib*. 2020. **485**. 115566. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115566
4. Isakari H., Niino K., Yoshikawa H., Nishimura N. Calderon's preconditioning for periodic fast multipole method for elastodynamics in 3D. *Int. J. Numer. Meth. Eng*. 2012. **90**, № 4. P. 484—505. https://doi.org/10.1002/nme.3332
5. Mykhas'kiv V.V., Zhbadynskyi I.Ya., Zhang Ch. On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks. *Eur. J. Mech. A / Solids*. 2019. **73**. P. 306—317. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.09.009
6. Remizov M.Yu., Sumbatyan M.A. Three-dimensional one-mode penetration of elastic waves through a doubly periodic array of cracks. *Math. Mech. Solids*. 2017. **23**. P. 636—650. https://doi.org/10.1177/1081286516684902
7. Zhbadynskyi I.Ya., Mykhas'kiv V.V. Acoustic filtering properties of 3D elastic metamaterials structured by crack-like inclusions. *Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED):* Proceedings of the 23rd International Seminar/Workshop (Tbilisi, 24—27 Sept. 2018). Tbilisi, 2018. P. 145—148. https://doi.org/10.1109/DIPED.2018.8543137
8. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
9. Linton C.M. Lattice sums for the Helmholtz equation. *SIAM Rev.* 2010. **52**, № 4. P. 630—674. https://doi.org/10.1137/09075130X
10. Sotiropoulos D.A., Achenbach J.D. Ultrasonic reflection by a planar distribution of cracks. *J. Nondestruct. Eval.* 1988. **7**. P. 123—129. https://doi.org/10.1007/BF00565997
11. Хай М.В., Михаськів В.В., Галего Р., Стасюк Б.М. Симетрична задача про усталену за часом взаємодію еліптичних тріщин у безмежному тілі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2000. **43**, № 2. С. 112—118.

Надійшла до редакції 08.04.2025

REFERENCES

1. Lee, G., Park, J., Choi, W., Ji, B., Kim, M. & Rho, J. (2023). Multiband elastic wave energy localization for highly amplified piezoelectric energy harvesting using trampoline metamaterials. Mech. Syst. Signal Process., 200, 110593. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110593
2. Bonnet, G. & Monchiet, V. (2022). Negative refraction of elastic waves on a metamaterial with anisotropic local resonance. J. Mech. Phys. Solids, 169, 105060. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105060
3. Tian, Y. & Shen, Y. (2020). Selective guided wave mode transmission enabled by elastic metamaterials. J. Sound Vib., 485, 115566. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115566
4. Isakari, H., Niino, K., Yoshikawa, H. & Nishimura, N. (2012). Calderon's preconditioning for periodic fast multipole method for elastodynamics in 3D. Int. J. Numer. Meth. Eng., 90, No. 4, pp. 484-505. https://doi.org/10.1002/nme.3332
5. Mykhas'kiv, V. V., Zhbadynskyi, I. Ya. & Zhang, Ch. (2019). On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks. Eur. J. Mech. A / Solids, 73, pp. 306-317. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.09.009

6. Remizov, M. Yu. & Sumbatyan, M. A. (2017). Three-dimensional one-mode penetration of elastic waves through a doubly periodic array of cracks. Math. Mech. Solids, 23, pp. 636-650. https://doi.org/10.1177/1081286516684902
7. Zhbadynskyi, I. Y. & Mykhas'kiv, V. V. (2018, September). Acoustic filtering properties of 3D elastic metamaterials structured by crack-like inclusions. Proceedings of the 23rd International Seminar/Workshop Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED) (pp. 145-148). Tbilisi. https://doi.org/10.1109/DIPED.2018.8543137
8. Hrinchenko, V.T., & Meleshko, V.V. (1981). Harmonic oscillations and waves in elastic solids. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
9. Linton, C. M. (2010). Lattice sums for the Helmholtz equation. SIAM Rev., 52, No. 4, pp. 630-674. https://doi.org/10.1137/09075130X
10. Sotiropoulos, D. A. & Achenbach, J. D. (1988). Ultrasonic reflection by a planar distribution of cracks. J. Nondestruct. Eval., 7, pp. 123-129. https://doi.org/10.1007/BF00565997
11. Khaj, M. V., Mykhas'kiv, V. V., Galego, R. & Stasyuk, B. M. (2000). Symmetric problem on Time-harmonic interaction of elliptic cracks in an infinite solid. Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya, 43, No. 2, pp. 112-118 (in Ukrainian).

Received 08.04.2025

I.Ya. Zhbadynskyi, https://orcid.org/0000-0003-2525-0885

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
E-mail: zhbadynskyi.igor@gmail.com

DETERMINATION OF ELASTIC WAVE TRANSMISSION COEFFICIENT
IN A METAMATERIAL WITH LATTICES OF DOUBLY-PERIODIC ELLIPTICAL CRACKS

The three-dimensional problem of propagation of harmonic longitudinal waves in an elastic solid containing double-periodic arrays of elliptical cracks located in a finite set of equidistant parallel square lattices is considered. In the frequency domain, a boundary integral equation for the reference crack opening in the unit cell of the double-periodic structure is obtained using the appropriate Green's function. For the stability of numerical calculations, the Green's function is represented in an exponentially convergent form, and its regularization is achieved by employing closed-form expressions for special lattice sums. The numerical solution of the equation is carried out using the mapping method. The wave transmission coefficient in a metamaterial with a single crack in the lattice is calculated by substituting the boundary element solutions into approximation relations for the wave field distant from the lattice. In the case of multiple lattices, this coefficient is determined based on a wide-space equidistant model of wave propagation.

Keywords: *periodic elliptical cracks, wave transmission coefficient, wave diffraction and interference, boundary integral equation method, wide-space model, mapping method.*