https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.033
УДК 539.3

В.В. Пастернак[1], https://orcid.org/0000-0003-2529-7915
Г.Т. Сулим[2], https://orcid.org/0000-0003-2223-8645

[1]Волинський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: pasternak.viktoriia@vnu.edu.ua, gtsulym@gmail.com

Інтегральні рівняння плоских задач термомеханіки біматеріальних тіл із неідеальним контактом складових із матеріалів зі зв'язаними полями

Представлена академіком НАН України Р.М. Кушніром

Запропоновано матрично-векторний підхід на основі узагальненого формалізму Стро для математичного моделювання плоских задач термомеханіки в біматеріальних тілах. На основі останнього побудовано інтегральні формули та рівняння для моделювання біматеріальних тіл, виготовлених із матеріалів зі зв'язаними фізичними полями (піроелектриків, термомагнітоелектропружних тіл та термопружних квазікристалів). Окрему увагу приділено врахуванню впливу неідеального контакту на внутрішній межі поділу матеріалів. Отримані інтегральні формули та рівняння для опису стану двокомпонентних тіл із матеріалів зі зв'язаними полями автоматично враховують характерний тип неідеального теплового та магніто-електро-механічного контакту на міжфазній поверхні та не містять невластивих інтегралів уздовж останньої. Це дає можливість як аналітичного вивчення розглянутих кусково-однорідних тіл, так і зменшення за потреби кількості ступенів вільності дискретизованої задачі за збереження належної точності при їхньому числовому розв'язуванні.

Ключові слова: *інтегральне рівняння, піроелектрик, піромагнетик, термопружний квазікристал, плоска задача, неідеальний контакт, біматеріал.*

Вступ. Сучасні мультифункціональні матеріали, зокрема піроелектрики, термомагнітоелектропружні середовища та термопружні квазікристали характеризуються складною взаємодією декількох фізичних полів. Їх унікальні властивості відкривають нові широкі можливості для створення сенсорів, енергоефективних пристроїв та інтелектуальних систем керування. Вивчення напружено-деформованого стану таких матеріалів потребує врахування взаємодії між механічними, тепловими, електричними та магнітними полями в

Ц и т у в а н н я: Пастернак В.В., Сулим Г.Т. Інтегральні рівняння плоских задач термомеханіки біматеріальних тіл із неідеальним контактом складових із матеріалів зі зв'язаними полями. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 3. С. 33—47. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.033

єдиному теоретичному підході. Особливої актуальності набувають задачі для біматеріальних тіл, де гетерогенність структури поєднується з багатопольовою взаємодією. Розробка ефективних методів аналізу таких тіл є важливою як для глибшого розуміння фізичних процесів, так і для проєктування новітніх матеріалів і приладів.

Особливої уваги вимагає також моделювання неідеального контакту між складовими біматеріалу, оскільки на практиці поверхні поділу зазвичай поєднані далеко не ідеально. Вивченню задач термопружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті стосуються роботи [1, 2]. Узагальнення цього підходу на задачі взаємодії полів різної фізичної природи здійснено у праці [3].

Проте публікацій, що стосувалися би вивченню впливу неідеального термо-електромагніто-механічного контакту на внутрішній межі поділу матеріалів, є відносно мало. У публікації [4] розглянуто функції Ґріна для біматеріального тіла з різними комбінаціями матеріалів (п'єзоелектрик — провідник, п'єзоелектрик — діелектрик тощо), що призводять до специфічних крайових умов на внутрішній поверхні поділу. У працях [5, 6] побудовано інтегральні рівняння для термомагнітоелектропружного біматеріалу з ідеальним магніто-електро-механічним та неідеальним тепловим (двох типів) контактом складових. У дослідженні [7] отримано функції Ґріна для анізотропного термопружного біматеріалу з неідеальними механічним контактом типу пружного з'єднання та тепловим типу Капіци. Щодо розробки методів аналізу задач термопружності квазікристалічних біматеріальних тіл, то авторам не вдалося знайти жодної праці.

Метою цієї роботи є розробка уніфікованого матрично-векторного підходу до моделювання з єдиних позицій плоских задач термомеханіки для різних типів біматеріалів зі зв'язаними фізико-механічними полями. Із використанням розширеного формалізму Стро отримано інтегральні формули та рівняння для моделювання двокомпонентних тіл із матеріалів зі зв'язаними полями за врахування неідеального теплового та магніто-електро-механічного контакту на внутрішній межі їх поділу.

Узагальнена форма запису визначальних співвідношень для матеріалів зі зв'язаними полями. Розглянемо лінійні задачі теплопровідності та термоелектропружності піроелектричних тіл. Відповідно до [4, 9, 8, 10] у нерухомій прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ рівняння рівноваги, балансу тепла та конститутивні співвідношення плоскої деформації лінійно термоелектропружного тіла і плоскої стаціонарної теплопровідності можна записати у такому уніфікованому вигляді:

$$\tilde{\sigma}_{Ij,j} = 0, \; h_{i,i} = 0; \tag{1}$$

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,m} - \tilde{\beta}_{Ij}\theta, \; h_i = -k_{ij}\theta_{,j} \tag{2}$$

при

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_i = u_i \quad (i=1,2,3), \quad \tilde{u}_4 = \phi;\\
&\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \; (i=1,2,3), \; \tilde{\sigma}_{4j} = D_j \quad (j=1,2);\\
&\tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij} \quad (i=1,2,3), \; \tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j \quad (j=1,2);\\
&\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}, \;\; \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \;\; \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \;\; \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm} \quad (i,k=1,2,3; \quad j,m=1,2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Тут σ_{ij} — компоненти тензора напружень; h_i — компоненти вектора густини теплового потоку; D_i — електричне зміщення; u_i — переміщення точок тіла; ϕ — електричний потенціал; θ — зміна температури порівняно з відліковою; C_{ijkm} — пружні сталі; k_{ij} — коефіцієнти теплопровідності; $\beta_{ij} = C_{ijkm}\alpha_{km} + e_{mij}\lambda_m$ $(i, j, k, m = 1, .., 3)$ — модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень); α_{ij} — коефіцієнти лінійного теплового розширення; e_{ijk} — п'єзоелектричні сталі; κ_{ij} — діелектричні сталі матеріалу; $\chi_i = -e_{ikm}\alpha_{km} + \kappa_{ij}\lambda_j$ — піроелектричні коефіцієнти; λ_i — піроелектричні модулі. Тензори з компонентами C_{ijkm}, k_{ij}, κ_{ij} та β_{ij} вважаються симетричними. Для зручності та легкого розрізнення прийнято, що записані великими літерами індекси змінюються від 1 до 4, а малими традиційно від 1 до 3 (чи 2 у плоскій задачі).

У формулах прийняте узвичаєне правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в індексних позначеннях відповідає диференціюванню за зазначеною після коми координатою, тобто $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Співвідношення (1), (2) можна також використовувати для моделювання поведінки термомагнітоелектропружних матеріалів, якщо вважати, що [11]

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_i = u_i,\ \tilde{u}_4 = \phi,\ \tilde{u}_5 = \psi\ ;\ \tilde{f}_i = f_i,\ \tilde{f}_4 = -q,\ \tilde{f}_5 = b_m;\\
&\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \tilde{\sigma}_{4j} = D_j,\ \tilde{\sigma}_{5j} = B_j;\\
&\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}, \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm},\\
&\tilde{C}_{ij5m} = h_{mij}, \tilde{C}_{5jkm} = h_{jkm}, \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm},\\
&\tilde{C}_{4j5m} = -\gamma_{jm}, \tilde{C}_{5j4m} = -\gamma_{jm},\\
&\tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij},\ \tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j,\ \tilde{\beta}_{5j} = \nu_j \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3),
\end{aligned} \tag{4}$$

де σ_{ij} — компоненти тензора напружень; u_i — компоненти вектора переміщень; D_i — компоненти вектора електричних зміщень; B_i — вектор магнітної індукції; ϕ, ψ — електричний та магнітний потенціали; C_{ijkm} — компоненти тензора пружних сталих; k_{ij} — коефіцієнти теплопровідності; e_{ijk}, h_{ijk} — п'єзоелектричні та п'єзомагнітні сталі; κ_{ij}, μ_{ij}, γ_{ij} — діелектрична і магнітна проникності та електромагнітні сталі; ν_i — піромагнітні коефіцієнти. Однак при моделюванні термомагнітоелектропружної взаємодії у матеріалах зі зв'язаними полями у формулах (1) та (2) позначені великими літерами індекси змінюються від 1 до 5.

Відповідно до [12] для квазікристалічних матеріалів визначальні співвідношення (1), (2) теж застосовні, якщо вважати, що

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{(i+3)j} = H_{ij}, \quad \tilde{u}_i = u_i, \quad \tilde{u}_{i+3} = w_i;\\
&\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij(k+3)m} = R_{ijkm},\\
&\tilde{C}_{(i+3)jkm} = R_{kmij}, \quad \tilde{C}_{(i+3)j(k+3)m} = K_{ijkm},\\
&\tilde{\beta}_{ij} = C_{ijkm}\alpha_{km} + R_{ijkm}\alpha'_{km}, \quad \tilde{\beta}_{(i+3)j} = R_{kmij}\alpha_{km} + K_{ijkm}\alpha'_{km} \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{5}$$

Тут σ_{ij} — фононні напруження; H_{ij} — фазонні напруження; u_i — компоненти вектора фононних переміщень; w_i — фазонні переміщення; C_{ijkm} — компоненти тензора фононних пружних сталих; K_{ijkm} — компоненти тензора фазонних пружних сталих; R_{ijkm} та $R'_{ijkm} = R_{kmij}$ — компоненти тензорів фононно-фазонної взаємодії; α_{ij}, α'_{ij} — фононна та фазонна складові коефіцієнтів лінійного теплового розширення. Зазначимо, що у загальному випадку для квазікристалів позначені великими літерами індекси змінюються від 1 до 6.

Отже, за допомогою поданого підходу задачі для матеріалів зі зв'язаними полями (піроелектричних термомагнітоелектропружних, квазікристалічних) зводяться до уніфікованого вигляду з єдиною відмінністю у розмірності розширених векторів та тензорів. Більше того, розширений 4-валентний тензор $\tilde{C}_{IjKm}$ має таку властивість симетрії:

$$\tilde{C}_{IjKm} = \tilde{C}_{KmIj}. \qquad (6)$$

Останнє співвідношення визначає результуючий тип рівнянь сформульованих задач та дає можливість використати для їхнього розв'язування формалізм Стро.

Розширений формалізм Стро. Відповідно до розширеного формалізму Стро [10, 12] загальний розв'язок рівнянь (1), (2) має вигляд

$$\begin{gathered}\theta = 2\operatorname{Re}\{g'(z_t)\},\ \vartheta = 2k_t \operatorname{Im}\{g'(z_t)\},\ h_1 = -\vartheta_{,2},\ h_2 = \vartheta_{,1},\ k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}{}^2};\\ \tilde{\mathbf{u}} = 2\operatorname{Re}\{\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t)\},\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2\operatorname{Re}\{\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t)\};\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 = -\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,2},\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,1}; \qquad (7)\\ z_t = x_1 + p_t x_2;\ z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2;\ \mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3), \ldots]^{\mathrm{T}},\end{gathered}$$

де ϑ — функція теплового потоку; $g(z_t)$, $F_\alpha(z_\alpha)$ — певні аналітичні функції відповідних аргументів (z_t та z_α $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$); комплексна стала p_t є коренем (із додатною уявною частиною) характеристичного рівняння теплопровідності

$$k_{22}p_t^2 + 2k_{12}p_t + k_{11} = 0; \qquad (8)$$

матриці $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_\alpha]$ та $\mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_\alpha]$ і сталі p_α $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ визначаються із задачі на власні значення формалізму Стро [4, 8, 10]:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \begin{matrix} \mathbf{N}\boldsymbol{\xi} = p\boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} = p\boldsymbol{\eta}, \end{matrix} \qquad (9)$$

а вектори $\mathbf{\tilde{n}}$ і $\mathbf{d}$ задовольняють таке матричне рівняння [10, 8]:

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\zeta} = p_t\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\gamma} = -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{N}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Тут $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{N}_3 = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Q}$; $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^{\mathrm{T}}$ — правий власний вектор, а $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^{\mathrm{T}}$ — лівий власний вектор матриці $\mathbf{N}$; верхній індекс «T» означає операцію транспонування. Компоненти матриць $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ означені так: $Q_{IK} = \tilde{C}_{I1K1}$, $T_{IK} = \tilde{C}_{I2K2}$, $R_{IK} = \tilde{C}_{I1K2} = \tilde{C}_{K2I1}$. Матриці $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{T}$ симетричні з огляду на симетрію компонент $\tilde{C}_{IjKm}$ тензора (6). Розмірність матриць $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ та вектора $\mathbf{p} = [p_\alpha]$ така ж, як і максимальне значення позначеного великою літерою індекса у співвідношеннях (1), (2), тобто, 4 для піроелектриків, 5 для термомагнітоелектропружних матеріалів та 6 для квазікристалів.

Оскільки власні вектори матриці $\mathbf{N}$ означені з точністю до сталих множників, матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ нормують такими співвідношеннями ортогональності [4, 8, 10]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} & \bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Причому, виходячи з рівнянь (9) — (11) виявлено [13] такий важливий для отримання інтегральних рівнянь термомеханічних задач зв'язок:

$$\mathbf{P}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{\mathbf{c}\} + \mathbf{P}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{\mathbf{d}\} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{p_t\mathbf{c}\} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{p_t\mathbf{d}\},\ \mathbf{P} = \mathrm{diag}[\mathbf{p}]. \tag{12}$$

Умови ортогональності (11) дають можливість побудувати такий зв'язок між комплексними потенціалами Стро та вектор-функціями розширених переміщень і напружень:

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{u}}^t - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^t,\ \tilde{\mathbf{u}}^t = 2\,\mathrm{Re}\{\mathbf{c}g(z_t)\},\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^t = 2\,\mathrm{Re}\{\mathbf{d}g(z_t)\}. \tag{13}$$

На основі (7) можна також отримати такий зв'язок між функцією $g'(z_t)$ та температурою і функцією теплового потоку:

$$g'(z_t) = \frac{1}{2}\left(\theta + i\frac{\vartheta}{k_t}\right). \tag{14}$$

Складені півпростори з неідеальним термофізичним контактом. Розглянемо плоску задачу термомеханіки для двох півпросторів $x_2 > 0$ та $x_2 < 0$ із матеріалів зі зв'язаними полями (при розгляді яких вивчаємо лише нормальні до осі x_3 перерізи (півплощини) S_1 та S_2, як зображено на рисунку), поєднаних уздовж площини $x_2 = 0$. При цьому на межі поділу матеріалів не виконуються умови ідеального термофізичного контакту. Для опису умов теплового контакту виберемо модель теплового контакту двох матеріалів за типом Капіци [7]:

$$\begin{aligned} &\vartheta^{(1)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \vartheta^{(2)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \vartheta(x_1), \\ &\theta^{(1)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \theta(x_1) - \rho_0\vartheta_{,1}(x_1), \\ &\theta^{(2)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \theta(x_1) \qquad \forall x_1 \in (-\infty; \infty). \end{aligned} \tag{15}$$

Тут ρ_0 — тепловий опір межі поділу матеріалів.

Умови неідеального фізико-механічного контакту складових біматеріалу запишемо у подібному до моделі пружної основи Вінклера («пружинний інтерфейс» [7]) вигляді:

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}(x_1) + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,1}(x_1), \\ &\tilde{\mathbf{u}}^{(2)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}(x_1), \\ &\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x_1) \quad \forall x_1 \in (-\infty; \infty). \end{aligned} \tag{16}$$

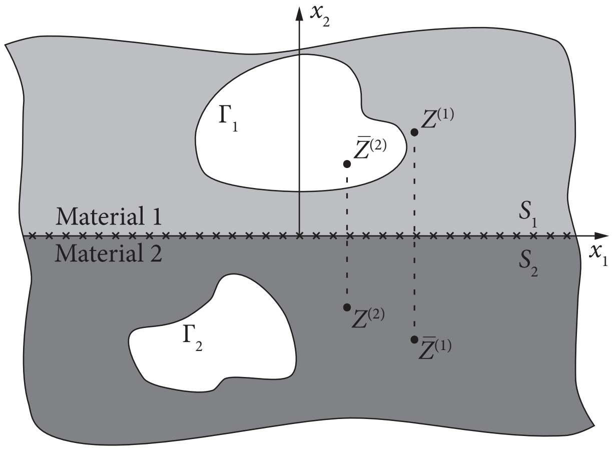

Схема задачі

Кожен із півпросторів містить системи тунельних порожнин, яким в областях S_1 та S_2 відповідають отвори, обмежені плоскими контурами $\Gamma_1 = \bigcup_j \Gamma_j^{(1)}$ та $\Gamma_2 = \bigcup_j \Gamma_j^{(2)}$ відповідно (див. рисунок).

Для побудови інтегральних подань комплексних потенціалів Стро для спряжених півпросторів скористаємося інтегральною формулою Коші [14], що пов'язує контурні значення довільної аналітичної функції $\phi(\tau)$ на межі ∂S області S із її значенням $\phi(z)$ всередині та зовні цієї області:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau - z} = \begin{cases}\phi(z) & \forall z \in S, \\ 0 & \forall z \notin S.\end{cases} \tag{17}$$

Тут $\tau, z \in \mathbb{C}$ — комплексні змінні, що окреслюють розташування відповідно точок витоку та спостереження. При цьому, якщо область S є необмеженою, то вважається, що функція $\phi(z)$ заникає при $z \to \infty$.

Теплопровідність. Унаслідок лінійності задачі теплопровідності, як і у випадку ідеального фізико-механічного контакту складових [5], шукатимемо її розв'язок у вигляді суми заданого функціями $g_{1\infty}(z_t^{(1)})$ та $g_{2\infty}(z_t^{(2)})$ однорідного розв'язку (що безумовно повинен задовольняти також і крайові умови (15)) і збурених наявністю контурів Γ_1 та Γ_2 складових. Позначивши інтеграли Коші від комплексних функцій температури $g_i'(z_t^{(i)})$ через [5]

$$q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i}\frac{g_i'(\tau_t^{(i)})d\tau_t^{(i)}}{\tau_t^{(i)} - z_t^{(i)}},\ \bar{q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i}\frac{\overline{g_i'(\tau_t^{(i)})}d\bar{\tau}_t^{(i)}}{\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}}, \tag{18}$$

а невластиві інтеграли уздовж відрізку $-\infty < x_1 < \infty$ —

$$m_t(z_t^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta(x_1)dx_1}{x_1 - z_t^{(j)}},\ p_t(z_t^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(x_1)dx_1}{x_1 - z_t^{(j)}}, \tag{19}$$

на основі (14) та (17), задовольняючи умови контакту (15), отримаємо такі інтегральні подання для $g_i'(z_t^{(i)})$:

$$g_1'(z_t^{(1)}) = g_{1\infty}'(z_t^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i}\left[q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{2}p_t(z_t^{(1)}) + \frac{i}{2k_t^{(1)}}m_t(z_t^{(1)}) - \frac{\rho_0}{2}m_t'(z_t^{(1)})\right],$$
$$\forall\,\mathrm{Im}(z_t^{(1)}) > 0; \tag{20}$$

$$g_2'(z_t^{(2)}) = g_{2\infty}'(z_t^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i}\left[q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) - \frac{1}{2}p_t(z_t^{(2)}) - \frac{i}{2k_t^{(2)}}m_t(z_t^{(2)})\right]$$
$$\forall\,\mathrm{Im}(z_t^{(2)}) > 0 \tag{21}$$

та системи звичайних диференціальних рівнянь для визначення невластивих інтегралів (19) через інтеграли Коші (18):

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}(z_t^{(1)})>0: \quad \overline{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)})+\frac{1}{2}p_t(z_t^{(1)})-\frac{\rho_0}{2}m_t'(z_t^{(1)})-\frac{i}{2k_t^{(1)}}m_t(z_t^{(1)})=0,\\ q_t^{(2)}(z_t^{(1)})-\frac{1}{2}p_t(z_t^{(1)})-\frac{i}{2k_t^{(2)}}m_t(z_t^{(1)})=0;\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}(z_t^{(2)})<0: \quad \overline{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)})-\frac{1}{2}p_t(z_t^{(2)})+\frac{i}{2k_t^{(2)}}m_t(z_t^{(2)})=0,\\ q_t^{(1)}(z_t^{(2)})+\frac{1}{2}p_t(z_t^{(2)})-\frac{\rho_0}{2}m_t'(z_t^{(2)})+\frac{i}{2k_t^{(1)}}m_t(z_t^{(2)})=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Тут верхнім індексом 1 чи 2 позначено належність до відповідних півпросторів. Також враховано, що внаслідок інтегрування частинами

$$m_t'(z_t^{(i)})=\frac{dm_t(z_t^{(i)})}{dz_t^{(i)}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta(x_1)\,dx_1}{(x_1-z_t^{(j)})^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta_{,1}(x_1)\,dx_1}{x_1-z_t^{(j)}}.$$

Додатним напрямком обходу контурів є той, за якого зайнята тілом область залишається ліворуч, тому у вираз (20) невластиві інтеграли (19) входять зі знаком «+», а в (21) — із протилежним знаком.

Розв’язуючи диференціальні рівняння (22) та (23) стосовно функцій (19), задовольнивши при цьому умову, що $m_t(z_t)=0$ при $g'(z_t)=0$, матимемо:

$$\begin{aligned}p_t(z_t^{(1)})&=2q_t^{(2)}(z_t^{(1)})-\frac{2i}{k_t^{(2)}\rho_0}[\overline{e}_t^{(1)}(\alpha_1;z_t^{(1)})+e_t^{(2)}(\alpha_1;z_t^{(1)})],\\ m_t(z_t^{(1)})&=\frac{2}{\rho_0}[\overline{e}_t^{(1)}(\alpha_1;z_t^{(1)})+e_t^{(2)}(\alpha_1;z_t^{(1)})];\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}p_t(z_t^{(2)})&=2\overline{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)})+\frac{2i}{k_t^{(2)}\rho_0}[e_t^{(1)}(\alpha_2;z_t^{(2)})+\overline{e}_t^{(2)}(\alpha_2;z_t^{(2)})],\\ m_t(z_t^{(2)})&=\frac{2}{\rho_0}[e_t^{(1)}(\alpha_2;z_t^{(2)})+\overline{e}_t^{(2)}(\alpha_2;z_t^{(2)})].\end{aligned} \tag{25}$$

Тут сталі величини α_i дорівнюють

$$\alpha_1=-i\frac{k_t^{(1)}k_t^{(2)}}{k_t^{(1)}+k_t^{(2)}}\rho_0,\ \alpha_2=-\alpha_1, \tag{26}$$

а функції $e_t^{(k)}$ означені такими інтегральними формулами:

$$e_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_k} g'_k(\tau_t^{(k)}) \mathcal{K}\left(\frac{\tau_t^{(k)} - z_t^{(j)}}{\alpha_i}\right) d\tau_t^{(k)},$$

$$\overline{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_k} \overline{g'_k(\tau_t^{(k)})} \mathcal{K}\left(\frac{\overline{\tau_t^{(k)}} - z_t^{(j)}}{\alpha_i}\right) \overline{d\tau_t^{(k)}}; \tag{27}$$

$$\mathcal{K}(z) = \exp(z)\mathrm{E}_1(z);\ \mathrm{E}_1(z) = \int_z^{\infty} t^{-1}\exp(-t)dt.$$

Підставляючи (24) в (20), а (25) в (21), отримаємо інтегральні подання функцій $g'_i(z_t^{(i)})$, що не містять невластивих інтегралів уздовж безмежної межі поділу матеріалів [5] та, як наслідок, спростять розв'язування результуючих інтегральних рівнянь та підвищать точність розрахунків:

$$g'_1(z_t^{(1)}) = g'_{1\infty}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i}\left[q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \overline{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \frac{2i}{\rho_0 k_t^{(1)}}(\overline{e}_t^{(1)}(\alpha_1; z_t^{(1)}) + e_t^{(2)}(\alpha_1; z_t^{(1)}))\right], \tag{28}$$

$$\forall\, \mathrm{Im}(z_t^{(1)}) > 0;$$

$$g'_2(z_t^{(2)}) = g'_{2\infty}(z_t^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i}\left[q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) - \overline{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) - \frac{2i}{\rho_0 k_t^{(2)}}(e_t^{(1)}(\alpha_2; z_t^{(2)}) + \overline{e}_t^{(2)}(\alpha_2; z_t^{(2)}))\right], \tag{29}$$

$$\forall\, \mathrm{Im}(z_t^{(2)}) < 0.$$

Варто зазначити, що спрямувавши у виразах (28), (29) тепловий опір межі поділу до нуля, отримаємо інтегральні подання комплексних потенціалів для біматеріалу з ідеальним тепловим контактом складових. Аналогічно, спрямувавши $\rho_0 \to \infty$, отримаємо відповідні подання для теплоізольованих півпросторів. Це без сумніву підтверджує достовірність отриманих залежностей.

Відповідно до (14) інтеграли Коші (18) зводяться до криволінійних інтегралів першого роду

$$q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_i} \frac{n_2(s) - p_t^{(i)} n_1(s)}{\tau_t^{(i)}(s) - z_t^{(j)}}\theta(s)\,ds + \frac{i}{2k_t^{(i)}}\int_{\Gamma_i} \ln(\tau_t^{(i)}(s) - z_t^{(j)})\, h_n(s)ds,$$

$$\overline{q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_i} \frac{n_2(s) - \overline{p}_t^{(i)} n_1(s)}{\overline{\tau}_t^{(i)}(s) - z_t^{(j)}}\theta(s)\,ds - \frac{i}{2k_t^{(i)}}\int_{\Gamma_i} \ln(\overline{\tau}_t^{(i)}(s) - z_t^{(j)})\, h_n(s)ds, \tag{30}$$

де $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ — дійсний диференціал дуг Γ_1 чи Γ_2; n_j — компоненти одиничного вектора $\mathbf{n}$ зовнішньої нормалі; $h_n = h_i n_i$ — тепловий потік через поверхню тіла.

Аналогічно, з урахуванням співвідношень [11]

$$d\tau_* = dx_1 + p_* dx_2 = -(n_2(s) - p_* n_1(s))\, ds\,, \tag{31}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} = h_2(-n_2) - h_1 n_1 = -h_n \tag{32}$$

та рівнянь (14), інтеграли (27) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
e_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) &= -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_k} (n_2(s) - p_t^{(k)} n_1(s))\mathcal{K}((\tau_t^{(k)}(s) - z_t^{(j)})/\alpha_i)\theta(s)\,ds + \\
&\quad + \frac{i\alpha_i}{2k_t^{(k)}}\int_{\Gamma_k} (\mathcal{K}((\tau_t^{(k)}(s) - z_t^{(j)})/\alpha_i) + \ln)(\tau_t^{(k)}(s) - z_t^{(j)}))\, h_n(s)\, ds, \\
\overline{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) &= -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_k} (n_2(s) - \overline{p}_t^{(k)} n_1(s))\mathcal{K}((\overline{\tau}_t^{(k)}(s) - z_t^{(j)})/\alpha_i)\theta(s)\,ds - \\
&\quad - \frac{i\alpha_i}{2k_t^{(k)}}\int_{\Gamma_k} (\mathcal{K}((\overline{\tau}_t^{(k)}(s) - z_t^{(j)})/\alpha_i) + \ln(\overline{\tau}_t^{(k)}(s) - z_t^{(j)})\, h_n(s)\, ds.
\end{aligned} \tag{33}$$

Тобто застосування співвідношень формалізму Стро та виразів (28), (29), (30) і (33) дає можливість побудувати інтегральні формули теплопровідності біматеріалу з тепловим опором межі. Вони аналогічні до відповідних для біматеріалу з неідеальним тепловим та ідеальним фізико-механічним контактом складових, отриманих у [5].

Для побудови інтегральних подань розширених вектора переміщень та тензора напружень відповідно до (19) необхідно обчислити також первісні функції $g_i'(z_t^{(i)})$, $m_t(z)$ та $p_t(z)$:

$$g_i(z_t^{(i)}) = \int g_i'(z_t^{(i)})\, dz_t^{(i)}\,; \tag{34}$$

$$M_t(z) = \int m_t(z)\,dz = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x_1 - z)\vartheta(x_1)\,dx_1\,; \tag{35}$$

$$P_t(z) = \int p_t(z)\,dz = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x_1 - z)\theta(x_1)\,dx_1\,. \tag{36}$$

Згідно з (24) — (29) отримаємо

$$\begin{aligned}
&P_t(z_t^{(1)}) = (1-K)Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) - (1+K)\overline{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + (1+K)(\overline{e}_t^{(1)}(\alpha_1; z_t^{(1)}) + e_t^{(2)}(\alpha_1; z_t^{(1)})), \\
&M_t(z_t^{(1)}) = -ik_t^{(1)}(1-K)[\overline{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) - (\overline{e}_t^{(1)}(\alpha_1; z_t^{(1)}) + e_t^{(2)}(\alpha_1; z_t^{(1)}))], \\
&g_1(z_t^{(1)}) = g_{1\infty}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i}[Q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - K\overline{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + (1-K)Q_t^{(2)}(z_t^{(1)})] - \\
&\quad - \frac{1-K}{2\pi i}(\overline{e}_t^{(1)}(\alpha_1; z_t^{(1)}) + e_t^{(2)}(\alpha_1; z_t^{(1)})) \quad (\forall\, \mathrm{Im}(z_t^{(1)}) > 0);
\end{aligned} \tag{37}$$

$$P_t(z_t^{(2)}) = (1-K)\overline{Q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) - (1+K)Q_t^{(1)}(z_t^{(2)}) + (1+K)(e_t^{(1)}(\alpha_2; z_t^{(2)}) + \overline{e}_t^{(2)}(\alpha_2; z_t^{(2)})),$$
$$M_t(z_t^{(2)}) = ik_t^{(2)}(1+K)[\overline{Q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + Q_t^{(1)}(z_t^{(2)}) - (e_t^{(1)}(\alpha_2; z_t^{(2)}) + \overline{e}_t^{(2)}(\alpha_2; z_t^{(2)}))],$$
$$g_2(z_t^{(2)}) = g_{2\infty}(z_t^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i}[Q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + K\overline{Q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + (1+K)Q_t^{(1)}(z_t^{(2)})] - \tag{38}$$
$$-\frac{1+K}{2\pi i}(e_t^{(1)}(\alpha_2; z_t^{(2)}) + \overline{e}_t^{(2)}(\alpha_2; z_t^{(2)})) \quad (\forall\, \mathrm{Im}(z_t^{(2)}) < 0).$$

При побудові цих виразів використано позначення

$$Q_t^{(i)}(z) = \int q_t^{(i)}(z)dz, \quad \overline{Q}_t^{(i)}(z) = \int \overline{q}_t^{(i)}(z)dz, \tag{39}$$

а також співвідношення

$$\int e_t^{(k)}(\alpha_i; z)dz = -\alpha_i e_t^{(k)}(\alpha_i; z) + \alpha_i Q_t^{(k)}(z),$$
$$\int \overline{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z)dz = -\alpha_i \overline{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z) + \alpha_i \overline{Q}_t^{(k)}(z). \tag{40}$$

Неідеальний термо-фізико-механічний контакт. Запишемо інтегральні формули (17) для комплексних потенціалів Стро $\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)})$ та $\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})$, аналітичних відповідно в областях S_1 та S_2. При цьому, зважаючи на те, що задані інтегралами Коші функції заникають на безмежності, тобто окреслюють лише збурену складову, повний розв’язок подамо у вигляді суми цієї збуреної частини та заданої потенціалами $\mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)})$, $\mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)})$ однорідної складової, що також задовольняє крайові умови (16).

Увівши позначення [5]

$$\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{d\tau_*^{(j)}}{\tau_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)}),\ \overline{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{d\overline{\tau}_*^{(j)}}{\overline{\tau}_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \overline{\mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)})}, \tag{41}$$

$$\mathbf{m}(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x_1)dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}},\ \mathbf{p}(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{u}}(x_1)dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}}, \tag{42}$$

а також зважаючи на те, що на основі (13), (14) та умов контакту (16) після інтегрування частинами

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{(1)}(x_1)dx_1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} = \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) + \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{m}'(z_\beta^{(i)}) + \boldsymbol{\mu}_1 M_t(z_\beta^{(i)}) + \boldsymbol{\lambda}_1 R_1(z_\beta^{(i)}),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\mathbf{f}^{(1)}(x_1)}dx_1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} = \overline{\mathbf{A}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \overline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) + \overline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{m}'(z_\beta^{(i)}) + \overline{\boldsymbol{\mu}}_1 M_t(z_\beta^{(i)}) + \overline{\boldsymbol{\lambda}}_1 R_1(z_\beta^{(i)}),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{(2)}(x_1)dx_1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} = \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) + \boldsymbol{\mu}_2 M_t(z_\beta^{(i)}) + \boldsymbol{\lambda}_2 R_2(z_\beta^{(i)}), \tag{43}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\mathbf{f}^{(2)}(x_1)}\,dx_1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} = \overline{\mathbf{A}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \overline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) + \overline{\boldsymbol{\mu}}_2 M_t(z_\beta^{(i)}) + \overline{\boldsymbol{\lambda}}_2 R_2(z_\beta^{(i)}),$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2025. No 3

де комплексні векторні сталі $\boldsymbol{\mu}_j$ та $\boldsymbol{\lambda}_j$ означені виразами [5]

$$\boldsymbol{\mu}_j = \frac{1}{k_t^{(j)}}(\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}[\mathbf{d}_j] + \mathbf{B}_j^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}[\mathbf{c}_j]),\ \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Re}[\mathbf{d}_j] + \mathbf{B}_j^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Re}[\mathbf{c}_j], \tag{44}$$

а функції $R_j(z_\beta^{(i)})$ задані залежністю

$$R_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)})\theta^{(j)}(x_1, 0)\,dx_1 = \begin{cases} -P_t(z_\beta^{(i)}) + \rho_0 m_t(z_\beta^{(i)}) & (j=1); \\ -P_t(z_\beta^{(i)}) & (j=2), \end{cases} \tag{45}$$

отримаємо такі інтегральні формули для комплексних потенціалів Стро та рівняння для визначення невідомих невластивих інтегралів:

$$\begin{aligned}&\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) = \mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)}) + \\ &+\frac{1}{2\pi i}[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^{4}\mathbf{I}_\beta(\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) + \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{m}'(z_\beta^{(i)})) + \langle M_t(z_*^{(1)})\rangle\boldsymbol{\mu}_1 + \langle R_1(z_*^{(1)})\rangle\boldsymbol{\lambda}_1];\end{aligned} \tag{46}$$

$$\overline{\mathbf{A}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \overline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) + \overline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{m}'(z_\beta^{(i)}) = -\overline{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(i)}) - \overline{\boldsymbol{\lambda}}_1 R_1(z_\beta^{(i)}) - \overline{\boldsymbol{\mu}}_1 M_t(z_\beta^{(i)}); \tag{47}$$

$$\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) = \mathbf{q}_2(z_\beta^{(i)}) - \boldsymbol{\lambda}_2 R_2(z_\beta^{(i)}) - \boldsymbol{\mu}_2 M_t(z_\beta^{(i)}); \tag{48}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) = \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)}) + \\ &+\frac{1}{2\pi i}[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^{4}\mathbf{I}_\beta(\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(2)})) - \langle M_t(z_*^{(2)})\rangle\boldsymbol{\mu}_2 - \langle R_2(z_*^{(2)})\rangle\boldsymbol{\lambda}_2];\end{aligned} \tag{49}$$

$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{m}'(z_\beta^{(2)}) = -\mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) - \boldsymbol{\lambda}_1 R_1(z_\beta^{(2)}) - \boldsymbol{\mu}_1 M_t(z_\beta^{(2)}); \tag{50}$$

$$\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \overline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = \overline{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) - \overline{\boldsymbol{\lambda}}_2 R_2(z_\beta^{(2)}) - \overline{\boldsymbol{\mu}}_2 M_t(z_\beta^{(2)})\,. \tag{51}$$

Тут $\mathbf{I}_\alpha = \mathrm{diag}[\delta_{i\alpha}]$, тобто, $\mathbf{I}_1 = \mathrm{diag}[1, 0, 0, ...]$, $\mathbf{I}_2 = \mathrm{diag}[0, 1, 0, ...]$ і т.д.

Рівняння (47), (48), (50) та (51) дають можливість виразити інтеграли (42) по безмежному проміжку через інтеграли уздовж скінченних контурів Γ_j за допомогою таких матричних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}\mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{m}'(z_\beta^{(1)}) = \overline{\mathbf{B}}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}_1(z_\beta^{(1)}) - \mathbf{B}_2^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}_2(z_\beta^{(1)}); \\ &\overline{\mathbf{X}}\mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{m}'(z_\beta^{(2)}) = \mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}_4(z_\beta^{(2)}) - \overline{\mathbf{B}}_2^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}); \\ &\mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = \mathbf{B}_2^{-\mathrm{T}}[\mathbf{y}_2(z_\beta^{(1)}) - \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(1)})]; \\ &\mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = \overline{\mathbf{B}}_2^{-\mathrm{T}}[\mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}) - \overline{\mathbf{A}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}(z_\beta^{(2)})],\end{aligned} \tag{52}$$

де позначено

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}_1(z_\beta^{(1)}) = -\overline{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) - \overline{\boldsymbol{\lambda}}_1 R_1(z_\beta^{(1)}) - \overline{\boldsymbol{\mu}}_1 M_t(z_\beta^{(1)});\\
&\mathbf{y}_2(z_\beta^{(1)}) = \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) - \boldsymbol{\lambda}_2 R_2(z_\beta^{(1)}) - \boldsymbol{\mu}_2 M_t(z_\beta^{(1)});\\
&\mathbf{y}_4(z_\beta^{(2)}) = -\mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) - \boldsymbol{\lambda}_1 R_1(z_\beta^{(2)}) - \boldsymbol{\mu}_1 M_t(z_\beta^{(2)});\\
&\mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}) = \overline{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) - \overline{\boldsymbol{\lambda}}_2 R_2(z_\beta^{(2)}) - \overline{\boldsymbol{\mu}}_2 M_t(z_\beta^{(2)}).
\end{aligned} \tag{53}$$

Стала матриця $\mathbf{X}$ означена через матрицю імпедансу

$$\mathbf{M} = -\mathrm{i}\,\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \tag{54}$$

таким співвідношенням:

$$\mathbf{X} = \mathrm{i}[\overline{\mathbf{M}}_1^{-1}(\overline{\mathbf{M}}_1 + \mathbf{M}_2)\mathbf{M}_2^{-1}]^{\mathrm{T}}. \tag{55}$$

Розв’язуючи диференціальні рівняння (52) отримаємо, що шукані функції є лінійною комбінацією інтегралів (39), (40), (41) та контурних інтегралів типу

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}^{(k)}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{X}; z_*^{(j)}) = \int_{\Gamma_k} \mathcal{K}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{X}\langle \tau_*^{(k)} - z_*^{(j)}\rangle)\langle d\tau_*^{(k)}\rangle \mathbf{q}_k(\tau_*^{(k)}),\\
&\overline{\mathbf{e}}^{(k)}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{X}; z_*^{(j)}) = \int_{\Gamma_k} \mathcal{K}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{X}\langle \overline{\tau_*^{(k)}} - z_*^{(j)}\rangle)\langle \overline{d\tau_*^{(k)}}\rangle \overline{\mathbf{q}_k(\tau_*^{(k)})}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Тут функція матриць $\mathcal{K}(\ddot{\mathbf{E}}^{-1}\mathbf{X}\langle \tau_*^{(k)} - z_*^{(j)}\rangle)$ означена так само, як і в (27).

З урахуванням викладеного, на основі (46) та (49) з урахуванням співвідношень (7) формалізму Стро можна побудувати такі інтегральні формули для біматеріалу з неідеальним термофізичним контактом складових:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi) = \begin{cases} 2\,\mathrm{Re}[\mathbf{A}_1\mathbf{f}^{(1)}(Z_*^{(1)}(\xi)) + \mathbf{c}_1 g_1(Z_t^{(1)}(\xi))] & (\forall \xi \in S_1),\\ 2\,\mathrm{Re}[\mathbf{A}_2\mathbf{f}^{(2)}(Z_*^{(2)}(\xi)) + \mathbf{c}_2 g_2(Z_t^{(2)}(\xi))] & (\forall \xi \in S_2). \end{cases} \tag{57}$$

Схема побудови інтегральних рівнянь задачі. Запропонований підхід на основі ТФКЗ дає можливість окрім інтегральних формул також ефективно будувати сингулярні інтегральні рівняння задачі. Зокрема, зручно використати формулу Сохоцького — Племелі [14], яка для гладкої дуги Γ пов’язує граничне значення інтеграла із його головним значенням у такий спосіб:

$$\lim_{z\to\tau_0} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(\tau)\,d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2}\phi(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i}\mathrm{CPV}\int_\Gamma \frac{\phi(\tau)\,d\tau}{\tau - \tau_0}. \tag{58}$$

Тут вважається, що точка z прямує до точки τ_0 межі Γ зсередини області; CPV означає головне значення інтеграла (Cauchy Principal Value).

Отже, спрямувавши в (57) внутрішню точку ξ до деякої точки $\mathbf{x}_0$ на контурах Γ_1 чи Γ_2 та використавши співвідношення (58) отримаємо інтегральні рівняння розглянутої задачі,

ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2025. No 3

що разом із заданими крайовими умовами дають можливість обчислити невідомі крайові функції. Знаючи останні за допомогою (57) можна обчислити фізико-механічні поля всередині області, визначивши зокрема, й термонапружений стан.

Висновки. Запропонований підхід до побудови інтегральних формул та рівнянь для матеріалів зі зв'язаними полями має такі дві переваги щодо існуючих методів.

Завдяки побудові уніфікованих визначальних рівнянь цей підхід придатний до розв'язування плоских задач для біматеріальних тіл різних типів (піроелектриків, магнітоелектриків, квазікристалів) за допомогою лише зміни розмірності результуючих матриць та векторів.

Запропонований підхід дозволяє виключити із розгляду невластиві інтеграли уздовж внутрішньої межі контакту складових біматеріального тіла завдяки врахуванню умов контакту в ядрах інтегральних формул та рівнянь, що дає можливість аналітичного аналізу впливу неідеального термофізичного контакту складових тіла, а також істотно підвищує точність розв'язування відповідних задач числовими методами, оскільки у них відпадає потреба дискретизації внутрішньої межі поділу матеріалів. Це також зменшує необхідну для забезпечення належної точності обчислень кількість ступенів вільності дискретної моделі.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Кушнір Р.М. Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 1998. **41**, № 1. С. 108—116. https://doi.org/10.1007/BF02364925
2. Kushnir R., Popovych V. Application of the generalized functions method for analysis of thermal stresses in piecewise-homogeneous solids. *Encyclopedia of thermal stresses:* Hetnarski R.B. (Ed.). Dordrecht: Springer, 2014. P. 224—230. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_602
3. Гачкевич О.Р., Кушнір Р.М. Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2016. **59**, № 1. С. 7—24. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3666-7
4. Qin Q.H. Green's function and boundary elements of multifield materials. Oxford: Elsevier, 2007. 254 p. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-045134-3.X5045-9
5. Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H. 2D boundary element analysis of defective thermoelectroelastic bimaterial with thermally imperfect but mechanically and electrically perfect interface. *Eng. Anal. Bound. Elem*. 2015. **61**. P. 194—206. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.07.012
6. Sulym H., Vasylyshyn A., Pasternak Ia. Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelectroelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusion. *Acta Mech. Autom*. 2022. **16**, № 3. P. 242—249. https://doi.org/10.2478/ama-2022-0029
7. Wang X., Pan E. Thermal Green's functions in plane anisotropic bimaterials with spring-type and Kapitza-type imperfect interface. *Acta Mech*. 2010. **209**. P. 115—128. https://doi.org/10.1007/s00707-009-0146-7
8. Hwu C. Anisotropic elastic plates. New York: Springer, 2010. 673 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5915-7
9. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities. *Eng. Anal. Bound. Elem*. 2011. **35**, № 4. P. 678—690. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.12.001
10. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications. New York: Oxford University Press, 1996. 567 p. https://doi.org/10.1093/oso/9780195074475.001.0001
11. Pasternak V., Sulym H., Pasternak Ia.M. Frequency domain Green's function and boundary integral equations for multifield materials and quasicrystals. *Int. J. Solids Struct.* 2024. **286—287**. 112562. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112562
12. Pasternak V., Sulym H., Pasternak Ia.M., Hotsyk I. Extended Stroh formalism for plane problems of thermoelasticity of quasicrystals with applications to Green's functions and fracture mechanics. *Int. J. Eng. Sci.* 2024. **203**. 104124. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2024.104124

13. Pasternak Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2012. **36**, № 12. P. 1931—1941. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.07.007
14. Carrier G.F., Krook M., Pearson C.E. Functions of a complex variable: theory and technique. New York: McGraw-Hill, 1966. 438 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898719116

Надійшла до редакції 11.04.2025

REFERENCES

1. Kushnir, R. M. (1999). Application of the method of generalized coupling problems in the thermoelasticity of piecewise-homogeneous bodies under nonideal contact. J. Math. Sci., 97, No. 1, pp. 3854-3861. https://doi.org/10.1007/BF02364925
2. Kushnir, R. & Popovych, V. (2014). Application of the generalized functions method for analysis of thermal stresses in piecewise-homogeneous solids. In Hetnarski, R.B. (Ed.). Encyclopedia of thermal stresses (pp. 224-230). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_602
3. Hachkevych, O. R. & Kushnir, R. M. (2018). Selected problems of the mechanics of coupled fields. J. Math. Sci., 229, No. 2, pp. 115-132. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3666-7
4. Qin, Q. H. (2007). Green's function and boundary elements of multifield materials. Oxford: Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-045134-3.X5045-9
5. Pasternak, Ia., Pasternak, R. & Sulym, H. (2015). 2D boundary element analysis of defective thermoelectroelastic bimaterial with thermally imperfect but mechanically and electrically perfect interface. Eng. Anal. Bound. Elem., **61**, pp. 194-206. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.07.012
6. Sulym, H., Vasylyshyn, A. & Pasternak, Ia. (2022). Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelectroelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusion. Acta Mech. Autom., 16, No. 3, pp. 242-249. https://doi.org/10.2478/ama-2022-0029
7. Wang, X. & Pan, E. (2010). Thermal Green's functions in plane anisotropic bimaterials with spring-type and Kapitza-type imperfect interface. Acta Mech., 209, pp. 115-128. https://doi.org/10.1007/s00707-009-0146-7
8. Hwu, C. (2010). Anisotropic elastic plates. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5915-7
9. Pasternak, Ia. (2011). Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities. Eng. Anal. Bound. Elem., 35, No. 4, pp. 678-690. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.12.001
10. Ting, T. C. T. (1996). Anisotropic elasticity: theory and applications. New York: Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oso/9780195074475.001.0001
11. Pasternak, V., Sulym, H. & Pasternak, Ia.M. (2024). Frequency domain Green's function and boundary integral equations for multifield materials and quasicrystals. Int. J. Solids Struct., 286–287, 112562. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112562
12. Pasternak, V., Sulym, H., Pasternak, Ia.M. & Hotsyk, I. (2024). Extended Stroh formalism for plane problems of thermoelasticity of quasicrystals with applications to Green's functions and fracture mechanics. Int. J. Eng. Sci., 203, 104124. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2024.104124
13. Pasternak, Ia. (2012). Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity. Eng. Anal. Bound. Elem., 36, No. 12, pp. 1931-1941. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.07.007
14. Carrier, G. F., Krook, M. & Pearson, C. E. (1966). Functions of a complex variable: theory and technique. New York: McGraw-Hill. https://doi.org/10.1137/1.9780898719116

Received 11.04.2025

V.V. Pasternak[1], https://orcid.org/0000-0003-2529-7915
H.T. Sulym[2], https://orcid.org/0000-0003-2223-8645

[1] Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine
[2] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
E-mail: pasternak.viktoriia@vnu.edu.ua, gtsulym@gmail.com

INTEGRAL EQUATIONS OF PLANE THERMOMECHANICAL PROBLEMS
FOR BIMATERIAL BODIES WITH IMPERFECT CONTACT BETWEEN COMPONENTS
MADE OF MULTIFIELD MATERIALS

A matrix-vector approach based on the generalized Stroh formalism is proposed for modeling plane thermomechanical problems in bimaterial bodies. Using this approach, integral formulas and equations are derived for modeling bimaterial bodies composed of materials with coupled physical fields, such as pyroelectrics, thermomagnetoelectroelastic media, and thermoelastic quasicrystals. Special attention is paid to the influence of imperfect contact at the internal material interface. The integral formulas and equations obtained to describe the state of two-component bodies made of multifield materials account for imperfect thermal and magneto-electro-mechanical contact at the interfacial surface, while avoiding singular integrals along the interface. This allows for analytical research of piecewise homogeneous bodies and a reduces the number of degrees of freedom in a discretized problem, while maintaining sufficient accuracy in numerical solutions.

Keywords: *integral equation, pyroelectric, pyromagnetic, thermoelastic quasicrystal, plane problem, imperfect contact, bimaterial.*