

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.04.065>

УДК 539.3

Б.І. Терьохін, <https://orcid.org/0000-0003-2381-8190>

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України, Дніпро, Україна

E-mail: bogdan.teryokhin@gmail.com

Вплив кільцевого включення змінної товщини на концентрацію напружень навколо кругового отвору у тонких пластинах і циліндричних оболонках

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.П. Пошиваловим

На основі скінченноелементного аналізу досліджено напружено-деформований стан тонких пластин і тонкостінних циліндричних оболонок з круговим отвором та кільцевим включенням змінної товщини. Проаналізовано вплив геометричних параметрів включень на концентрацію напружень і деформацій в пластині та оболонці в околі отвору. Показано, що використання кільцевого включення з певними геометричними параметрами сприяє зменшенню концентрації напружень і відповідної інтенсивності деформацій в околі отвору більш ніж на 45 %. Закон зміни товщини включення та його ширина істотно впливають на величину концентрації параметрів напружено-деформованого стану пластини та оболонки. Одержані результати обчислювальних експериментів відкривають перспективи знаходження раціональних, з точки зору зменшення концентрації напружень, параметрів включень з метою підвищення міцності та надійності тонкостінних конструкцій.

Ключові слова: циліндрична оболонка, тонка пластина, круговий отвір, кільцеве включення, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, метод скінченних елементів.

Вступ. Тонкі пластини та тонкостінні циліндричні оболонки з отворами широко використовуються в ракетно-космічній, енергетичній, машинобудівній та будівельній галузях. Зниження концентрації напружень навколо отворів в тонкостінних конструкціях є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла, оскільки локальна концентрація напружень в околі отвору може призводити до передчасного руйнування [1, 2]. На сьогоднішній день є багато способів зниження коефіцієнта концентрації напружень (ККН), наприклад, використання підкріплень, зміни у геометрії конструкції, застосування неоднорідних матеріалів або оптимізація конструкції. Комбінації вищенаведених способів, наприклад використання включень певної геометричної форми, дозволяє істотно знизити

Ц и т у в а н н я: Терьохін Б.І. Вплив кільцевого включення змінної товщини на концентрацію напружень навколо кругового отвору у тонких пластинах і циліндричних оболонках. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 4. С. 65—74. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.04.065>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

ти концентрацію напружень навколо отворів. Дослідження впливу геометричних характеристик кільцевого включення на величину концентрації напружень навколо кругового отвору має як теоретичне, так і практичне значення.

Визначення напружено-деформованого стану (НДС) та ККН у тонкій пластині з круговим отвором — це одна з класичних задач механіки [3]. Наявність кругового отвору в тонкостінній оболонці за рахунок її кривини призводить до збільшення концентрації напружень порівняно з пластиною [4]. На сьогоднішній день проведено багато досліджень, які показали доцільність використання включень навколо отворів з певними геометричними характеристиками та механічними властивостями з метою зниження ККН [5—10].

Застосування неоднорідних матеріалів з певними механічними властивостями, а саме зі змінною жорсткістю, також дає змогу впливати на НДС тонкостінних конструкцій для зменшення ККН. У дослідженнях застосовують як аналітичні [11—12], так і числові методи [5—10, 13].

Врахування неоднорідностей (отворів, включень, виточок тощо), а також нерівномірності товщини пластини та оболонки ускладнює математичну модель, тому більш доцільно використовувати числові методи механіки, які, на відміну від аналітичних, є досить універсальними й ефективними при розв'язанні широкого спектра складних інженерних задач. Зокрема, метод скінченних елементів (МСЕ) дозволяє моделювати складні геометричні конфігурації, враховувати неоднорідність матеріалів, зміну товщин, а також різні типи навантажень та граничних умов.

Мета. Дана робота присвячена дослідженню НДС пружних тонких пластин і тонкостінних циліндричних оболонок з круговим отвором за наявності навколо нього кільцевого включення змінної товщини. На основі застосування МСЕ здійснюється аналіз впливу закону зміни товщини включення на ККН та деформації в пластині та оболонці в зонах їх локальної концентрації, задля знаходження раціональних, з точки зору зменшення ККН, параметрів включень.

Постановка задачі. Розглядається тонка пружна ізотропна пластина і циліндрична оболонка з центрально розташованим круговим отвором і кільцевим включенням. Розміри пластин $a \times b$, товщина h_0 , радіус отвору R , радіус включення R_1 (рис. 1, а); довжина оболонок L , діаметр d , товщина, радіус отвору та кільцевого включення такі ж як у пластини (рис. 1, б). Включення має товщину $h(r)$, яка змінюється в радіальному напрямку таким чином, щоб на стику включення і пластини/оболонки була однакова товщина. На межі включення з пластиною/оболонкою задано умови жорсткого зчеплення. Величина R_1 варіюється. На бокові грані пластин та торці оболонок діє рівномірне одновісне розтягувальне навантаження $p = \text{const}$, що не зумовлює появу пластичних деформацій.

Розглянуто випадки, коли товщина включення зменшується в радіальному напрямку (задача 1), та збільшується (задача 2) від краю отвору до стику з пластиною/оболонкою за законом:

$$h_1(r) = h_0 \left(2 - \frac{r - R}{R_1 - R} \right), \quad r \in [R; R_1], \quad (1)$$

$$h_2(r) = h_0 \left(0,5 + \frac{r - R}{2(R_1 - R)} \right), \quad r \in [R; R_1], \quad (2)$$

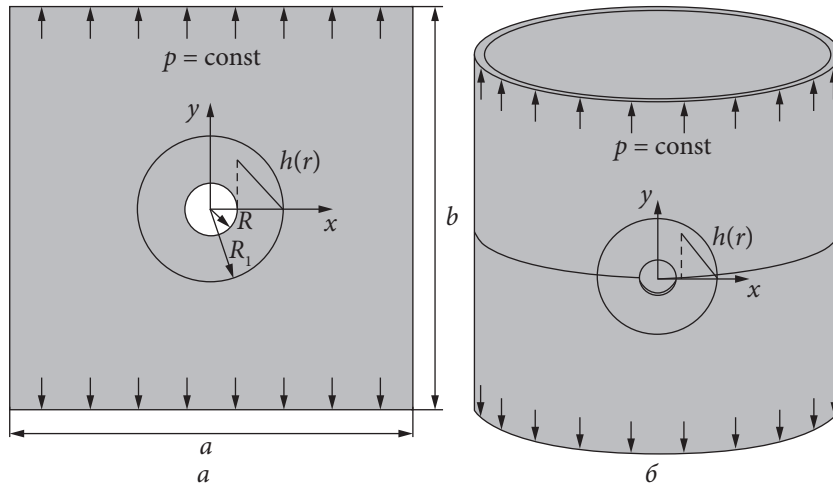


Рис. 1. Геометрія та схема навантаження пластини (а) та оболонки (б)

де h_0 — товщина пластини/оболонки; r — відстань від центру отвору до довільної точки включення.

Як видно з законів (1) та (2), товщина включення змінюється вдвічі: для задачі 1 вона зменшується в радіальному напрямку від краю отвору, а для задачі 2 — в радіальному напрямку збільшується. Причому для обох задач товщина включення на стику дорівнює товщині пластини/оболонки ($h_1(R_1) = h_0$, $h_2(R_1) = h_0$). З'ясуємо, як змінюється ККН для різних варіантів величини R_1 для задач 1 та 2.

Для визначеності вважалося, що пластина квадратна, а діаметр оболонки дорівнює стороні пластини.

Математичні моделі задач та метод їх розв'язування. При розв'язанні задачі визначення НДС пластини та циліндричної оболонки застосовано геометрично лінійну теорію тонких пластин та оболонок на основі моделі Кірхгофа—Лява [4]. Оболонка віднесена до ортогональної системи координат Ox , Oy , Oz , координатні осі Ox і Oy якої збігаються з лініями головних кривизн серединної поверхні, а вісь Oz напрямлена вздовж нормалі до неї.

У варіаційній постановці вихідна задача для циліндричної оболонки призводить до мінімізації функціонала повної потенціальної енергії системи [1]:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{s=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s h(x, y)}{(1 - \nu_s^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\tilde{R}} \right)^2 + 2\nu_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\tilde{R}} \right) + \frac{1 - \nu_s}{2} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s h^3(x, y)}{12(1 - \nu_s^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{\tilde{R}} \right)^2 + 2\nu_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{\tilde{R}} \right) + 2(1 - \nu_s) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \left. \right\} - \int_S (p_x u + p_y v + p_z w) dS, \end{aligned}$$

де $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ — проєкції вектора переміщень на осі Ox , Oy і Oz відповідно; $h(x, y)$ — товщина оболонки; $\bar{R}$ — радіус оболонки; E_s, ν_s — модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки Ω_1 (матриці) ($s=1$) і включення Ω_s ($s=2, n+1$, n — кількість включень); $\Omega = \bigcup_{s=1}^{n+1} \Omega_s$ — область визначення змінних x та y ; S — площа торця оболонки, по якій діє зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x, y) = (p_x(x, y), p_y(x, y), p_z(x, y))^T$. У разі одновісного навантаження розтягування $p_x(x, y) = p_z(x, y) = 0$, $p_y(x, y) = p = \text{const}$. Тобто зовнішнє навантаження прикладене до обох торцевих площин оболонки й діє у поздовжньому напрямку (вздовж осі Oy).

У випадку пластини приходимо до задачі мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії системи такого вигляду:

$$\Pi = \sum_{s=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s h(x, y)}{(1 - \nu_s^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 - \nu_s}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dxdy \right\} - \int_S (p_x u + p_y v) dS,$$

де $u(x, y)$, $v(x, y)$ — проєкції вектора переміщень на осі Ox і Oy відповідно; $h(x, y)$ — товщина пластини; E_s, ν_s — модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини Ω_1 (матриці) ($s=1$) і включення Ω_s ($s=2, n+1$, n — кількість включень); $\Omega = \bigcup_{s=1}^{n+1} \Omega_s$ — область визначення змінних x та y ; S — площа бічної грані пластини, до якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x, y) = (p_x(x, y), p_y(x, y))^T$. У разі одновісного навантаження розтягування $p_x(x, y) = 0$, $p_y(x, y) = p = \text{const}$ (в нашому випадку навантаження прикладене до грані пластини в перерізі площиною xz : тобто ширина a , товщина h_0).

Поставлені варіаційні задачі розв'язано за допомогою МСЕ з використанням трикутних шестивузлових скінченних елементів з двома ступенями свободи в кожному з вузлів для пластини (переміщення u , v) та шістьма ступенями свободи в кожному з вузлів для

Таблиця 2. Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з включенням для задачі 1

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$
Включення 1	2,42	-20,7	0,98	-22,2
Включення 2	2,20	-27,9	0,89	-29,4
Включення 3	2,07	-32,1	0,84	-33,3
Включення 4	1,96	-35,7	0,80	-36,5
Включення 5	1,90	-37,7	0,77	-38,9
Включення 6	1,86	-39,0	0,75	-40,5
Включення 7	1,79	-41,3	0,73	-42,1
Включення 8	1,75	-42,6	0,71	-43,7

Таблиця 1. Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині для задачі 1 та задачі 2

Задача	ККН	$\delta, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\Delta, \%$
Задача 1	2,42	-20,7	0,98	-22,2
Задача 2	3,77	+23,6	1,53	+21,4

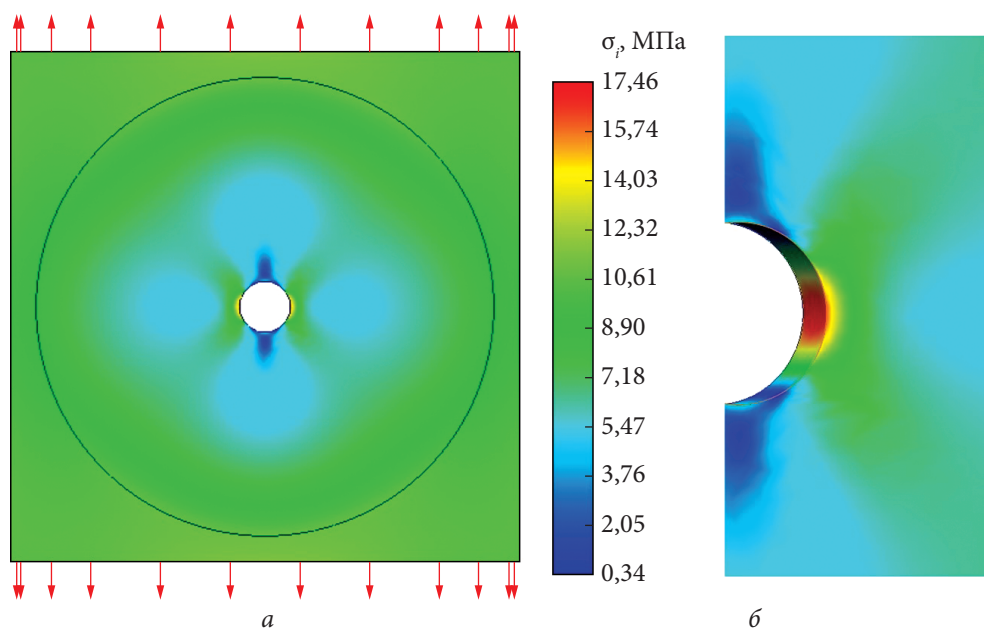


Рис. 2. Розподіл напружень σ_i в пластині з включенням 8 (а) для задачі 1; фрагмент розподілу σ_i навколо отвору (б)

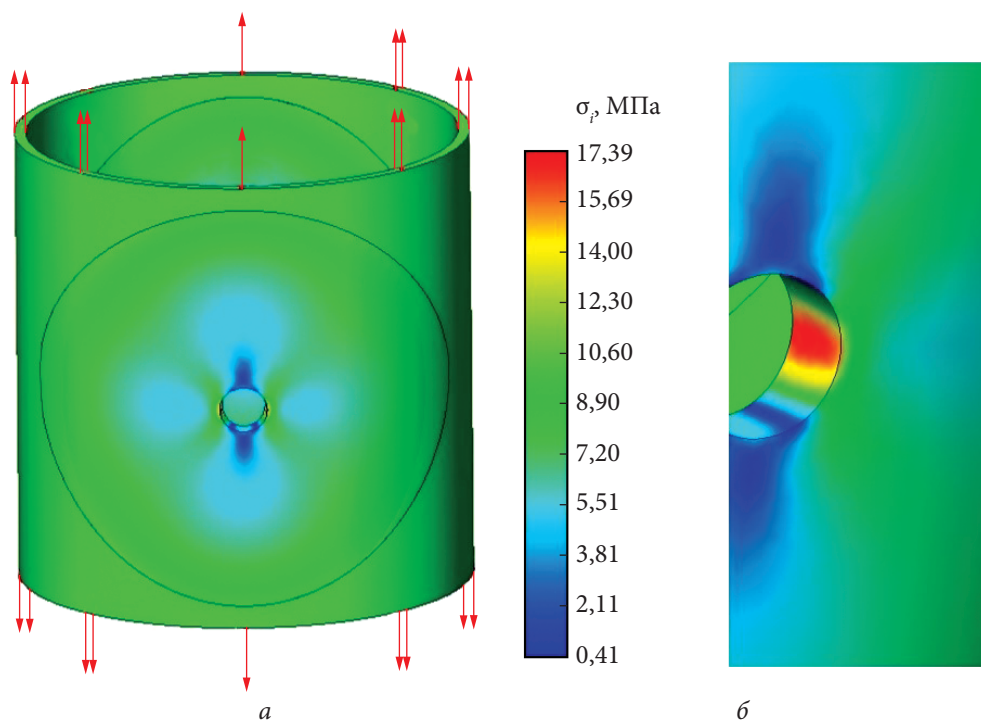


Рис. 3. Розподіл інтенсивності напружень σ_i в оболонці з включенням 8 (а) для задачі 1; фрагмент розподілу σ_i навколо отвору (б)

Таблиця 3. Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в циліндричній оболонці з включенням для задачі 1

Задача	ККН	$\Delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\Delta_2, \%$
Включення 1	2,45	-23,9	1,00	-23,7
Включення 2	2,18	-32,3	0,88	-32,8
Включення 3	2,06	-36,0	0,84	-35,9
Включення 4	1,97	-38,8	0,80	-38,9
Включення 5	1,94	-39,8	0,79	-39,7
Включення 6	1,88	-41,6	0,76	-42,0
Включення 7	1,79	-44,4	0,73	-44,3
Включення 8	1,74	-46,0	0,71	-45,8

оболонки (три переміщення u , v , w та три кути повороту навколо осей x , y , z). В областях концентрації напружень використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подібнення, рівним 8. Використання більш дрібної сітки зумовлює збільшення точності апроксимації поверхні оболонки геометрією вписаного багатогранника.

Числовий аналіз. Обчислювальні експерименти проведені на ПК з процесором Intel Core i7-10700F, тактовою частотою 2,9—4,8 ГГц, оперативною пам'яттю 32 ГБ, розрядністю системи x64. Середня кількість скінченних елементів у разі розрахунку пластин становить 12156, кількість вузлів — 21318; у разі розрахунку оболонок — 16513 та 32836 відповідно.

Числові результати отримані для: 1) квадратних пластин з такими геометричними параметрами: $h_0 = 0,005$ м, $a = b = 0,2$ м, $R = a/20$; 2) циліндричних оболонок з параметрами: $L = d = a$, $h_0 = 0,005$ м, $R = d/10$. Навантаження розтягування в обох випадках $p = 10$ МПа.

Матеріал пластини, оболонки та включень — сталь ($E_0 = 210$ ГПа, $\nu_0 = 0,33$, $\sigma_{02} = 620$ МПа, $\sigma_b = 724$ МПа). Обраний матеріал має умовний характер.

Розрахуємо ККН для пластини з включенням шириною R , коли товщина включення змінюється за законами (1) та (2).

Як видно з табл. 1 (δ і Δ — відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій $\varepsilon_i^{\max}$ від відповідного значення для пластини з круговим отвором без включення [3]), у випадку, коли товщина включення збільшується від стику з пластиною до краю включення, значення ККН і максимальні деформації зменшуються на понад 20 %. А коли товщина включення зменшується від стику з пластиною до краю включення — навпаки. Для оболонки отримано аналогічні закономірності. Таким чином, можна зробити висновок, що для зменшення концентрації напружень, товщина включення навколо отвору повинна бути більшою за товщину пластини або оболонки.

Виникає інтерес дослідити, як впливає розмір включення змінної товщини на параметри НДС пластини та оболонки. Для цього зробимо розрахунки для задачі 1 з варіюванням радіуса кільцевого включення R_1 з кроком R , при цьому ширина включення $h_{\text{вкл}} = R, 2R, \dots, 8R$, що відповідає номеру включення.

Результати проведеної серії обчислювальних експериментів за допомогою МСЕ для пластини з включеннями змінної товщини (1) зведено у табл. 2, де δ_1 і δ_2 — відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій $\epsilon_i^{\max}$ від відповідного значення для пластини з круговим отвором без включення [3].

Аналіз табл. 2 показує, що наявність кільцевого включення із заданим законом зміни товщини (1) дає змогу зменшити ККН у пластині на ~ 21 — 43 %, а максимальну інтенсивність деформацій на ~ 22 — 44 % (див. табл. 2). Аналізуючи результати розрахунків за наявності включень різної ширини (виду 1—8), бачимо, що чим більша ширина включення, тим менші значення ККН і деформацій у пластині. Найменше значення ККН із розглянутих варіантів було отримано у випадку включення 8.

Як приклад, на рис. 2 наведено розподіл напружень σ_z в пластині з круговим отвором і включенням 8 ($h_{\text{вкл}} = 8R$).

Далі розглянемо вплив на величину ККН наявності включень навколо кругового отвору в тонкостінній циліндричній оболонці.

Результати здійснених розрахунків для оболонки з включеннями різної ширини із заданим законом зміни товщини (1) наведено у табл. 3, де Δ_1 і Δ_2 — відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій $\epsilon_i^{\max}$ від відповідного значення для тонкостінної циліндричної оболонки з круговим отвором без включення [4].

Із табл. 3 видно, що за наявності кільцевого включення із заданим законом зміни товщини величини ККН в оболонці зменшуються на ~ 24 — 46 %, а максимальних деформацій на ~ 24 — 46 %. Як і у випадку з пластинами, найкращим із розглянутих варіантів для оболонки з точки зору зменшення ККН виявилось включення 8.

На рис. 3 проілюстровано розподіл напружень σ_i в циліндричній оболонці з круговим отвором і включенням 8 ($h_{\text{вкл}} = 8R$) навколо нього.

Висновки. В результаті комп'ютерного моделювання та числового аналізу досліджено вплив кільцевого включення змінної товщини на концентрацію напружень навколо кругового отвору в тонких пластинах і циліндричних оболонках. Проаналізовано вплив геометричних характеристик включення, а саме ширини та закону зміни товщини включення за радіальним напрямком на концентрацію параметрів НДС навколо отвору пластинчато-оболонкових елементів конструкцій. Показано, що за наявності включення з певними геометричними характеристиками можна зменшити ККН і відповідну інтенсивність деформацій в околі отвору більш ніж на 45 %.

Отже, використання кільцевих підкріплень кругових отворів у вигляді включень змінної товщини у пластинах та циліндричних оболонках з отворами є доцільним. Воно дає змогу впливати як на величину інтенсивностей напружень, так і на деформації в зонах локальної концентрації.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford, New York: Pergamon Press, 1975. 420 p.
2. Peterson. R.E. Stress concentration factors. New York: Wiley, 1974. 336 p.
3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
4. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек: В 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Киев: Наук. думка, 1980. 636 с.
5. Гарт Е.Л., Терьохін Б.І. Вибір раціональних параметрів підкріплюючих елементів при комп'ютерному моделюванні поведінки циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Вип. 30. С. 19—32. <https://doi.org/10.15421/4219024>
6. Hart E.L., Terokhin B.I. Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. *J. Optim. Differ. Equ. their Appl.* 2021. **29**, Iss. 1. P. 42—53. <https://doi.org/10.15421/142103>
7. Hart E.L., Terokhin B.I. Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. Iss. 110. P. 63—80. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80>
8. Hudramovich V., Hart E., Terokhin B. Stress concentration around a circular hole in thin plates and cylindrical shells with a radially inhomogeneous inclusion. *Selected problems of solid mechanics and solving methods*. Cham: Springer, 2024. P. 249—264. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_18
9. Гарт Е.Л., Шебанов О.Д. Вплив параметрів симетрично розташованих еліптичних включень на концентрацію напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2024. Вип. 38. С. 36—50. <https://doi.org/10.15421/4224103>
10. Гарт Е.Л., Рибалко Я.В. Комп'ютерне моделювання впливу розташування і механічних властивостей еліптичних включень на процес деформування пружної пластини з круговим отвором. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2021. Вип. 33. С. 32—42. <https://doi.org/10.15421/4221003>
11. Yang Q.Q., Gao C.F., Chen W.T. Stress concentration in a finite functionally graded material plate. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 2012. **55**. P. 1263—1271. <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x>
12. Linkov A., Rybarska-Rusinek L. Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges. *Int. J. Eng. Sci.* 2012. **61**. P. 87—93. <https://doi.org/10.1016/j.jengsci.2012.06.012>
13. Mohammadi M., Dryden J.R., Jiang L. Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. *Int. J. Solids Struct.* 2011. **48**, Iss. 3—4. P. 483—491. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013>

Надійшла до редакції 09.04.2025

REFERENCES

1. Washizu, K. (1975). Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford, New York: Pergamon Press.
2. Peterson, R. (1974). Stress concentration factors. New York: Wiley.
3. Savin, G. N. (1968). Stress distribution near holes. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
4. Guz, A. N., Chernyshenko, I. S., Chekhov, Val. N., Chekhov, Vik. N. & Shnerenko, K. I. (1980). Methods for calculating shells. (Vol. 1). Theory of thin shells, weakened by holes. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
5. Hart, E. L. & Terokhin, B. I. (2019). Choice of rational parameters of reinforcement elements in computer simulation of behavior of a cylindrical shell with two rectangular holes. Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures, Iss. 30, pp. 19-32 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15421/4219024>
6. Hart, E. L. & Terokhin, B. I. (2021). Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. J. Optim. Differ. Equ. their Appl., 29, Iss. 1, pp. 42-53. <https://doi.org/10.15421/142103>
7. Hart, E. L. & Terokhin, B. I. (2023). Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. Strength of Materials and Theory of Structures, Iss. 110, pp. 63-80. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80>
8. Hudramovich, V., Hart, E. & Terokhin, B. (2024). Stress concentration around a circular hole in thin plates and cylindrical shells with a radially inhomogeneous inclusion. In Selected problems of solid mechanics and solving methods (pp. 249-264). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_18
9. Hart, E. L. & Shebanov, O. D. (2024). Influence of parameters of symmetrically placed elliptic inclusions on stress concentration around a circular hole in a cylindrical shell. Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures, Iss. 38, pp. 36-50 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15421/4224103>
10. Hart, E. L. & Rybalko, Ya. V. (2021). Computer simulation of the influence of position and mechanical properties of elliptic inclusions for the process of deformation an elastic plate with a circular hole. Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures, Iss. 33, pp. 32-42 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15421/4221003>
11. Yang, Q. Q., Gao, C. F. & Chen, W. T. (2012). Stress concentration in a finite functionally graded material plate. Sci. China Phys. Mech. Astron., 55, pp. 1263-1271. <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x>
12. Linkov, A. & Rybarska-Rusinek, L. (2012). Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges. Int. J. Eng. Sci., 61, pp. 87-93. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.06.012>
13. Mohammadi, M., Dryden, J. R. & Jiang, L. (2011). Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. Int. J. Solids Struct., 48, Iss. 3-4, pp. 483-491. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013>

Received 09.04.2025

B.I. Terokhin, <https://orcid.org/0000-0003-2381-8190>

Institute of Technical Mechanics of the NAS of Ukraine and the SSA of Ukraine, Dnipro, Ukraine

E-mail: bogdan.teryokhin@gmail.com

INFLUENCE OF RING-SHAPED INCLUSIONS
OF VARYING THICKNESS ON STRESS CONCENTRATION AROUND A
CIRCULAR HOLE IN THIN PLATES AND CYLINDRICAL SHELLS

The stress-strain state of thin plates and thin-walled cylindrical shells with a circular hole and a ring-shaped inclusion of variable thickness is studied using finite element analysis. The influence of the geometric parameters of the inclusions on the concentration of stresses and strains in the plate and shell near the hole is analyzed. It has been shown that the use of a ring inclusion with certain geometric parameters allows reducing the stress concentration and the corresponding deformation intensity near the hole by more than 45 %. The law of change in the thickness of the inclusion and its width significantly affects the magnitude of the concentration of the stress-strain state parameters of the plate and shell. The results obtained from computational experiments open up prospects for finding rational parameters for inclusions in terms of reducing stress concentration in order to increase the strength and reliability of thin-walled structures.

Keywords: *cylindrical shell, thin plate, circular hole, annular inclusion, stress-strain state, stress concentration factor, finite element method.*