

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.04.054>

УДК 532.516

О.Б. Польовий, <https://orcid.org/0009-0001-6756-1078>

Д.О. Редчиць, <https://orcid.org/0000-0001-8538-6026>

Інститут транспортних систем і технологій НАН України, Дніпро, Україна

E-mail: obp.dnepr@gmail.com, redchys_da@ua.fm

Модифікація методу Годунова розрахунку течій стисливого газу на основі зворотних сплайнів

Представлено академіком НАН України А.Ф. Булатом

Запропоновано неявний чисельний алгоритм розв'язання рівнянь Нав'є—Стокса з урахуванням модифікації явного методу Годунова розрахунку нев'язких течій. Оригінальний метод Годунова спирається на повну постановку задачі розпаду розриву між сусідніми комірками, що зумовлює необхідність розв'язувати нелінійне рівняння для тиску ітераційним алгоритмом Ньютона з кожної грані скінченного об'єму. Для запобігання великим обчислювальним витратам запропоновано модифікацію методу Годунова розрахунку конвективних доданків. Основна ідея модифікації полягає в апроксимації зворотним кубічним або параболічним сплайном вихідної нелінійної залежності. З математичної точки зору замість знаходження кореня нелінійного рівняння досить знайти вільний коефіцієнт зворотного сплайна. Розглянутий підхід можна назвати “майже точним”, оскільки він зберігає точну постановку розпаду розриву та використовує наближений спосіб обчислення лише однієї величини — значення тиску на суміжній грані між сусідніми комірками в результаті розв'язання задачі Рімана. Запропонована модифікація розрахунку конвективних доданків для течій стисливого газу реалізована в рамках власного програмного пакету обчислювальної аеродинаміки, який протягом багатьох років розробляється та застосовується в Інституті транспортних систем і технологій Національної академії наук України. Проведено верифікацію запропонованого підходу в рамках розробленого раніше неявного чисельного алгоритму для двовимірних нестационарних осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є—Стокса в довільних координатах. Тестування виконано на задачі про взаємодію косоного стрибка ущільнення з турбулентним примежовим шаром на плоскій пластині при числі Маха 5 незбуреного потоку. Порівняння з експериментальними даними щодо розподілу тиску і коефіцієнта, а також експериментальної та чисельної шлірен-фотографії, показує, що запропонована методика добре відтворює як окремі елементи структури взаємодії, що розглядається, так і загальний його параметри.

Ключові слова: неявний чисельний алгоритм, розпад розриву, зворотні сплайни.

Ц и т у в а н н я: Польовий О.Б., Редчиць Д.О. Модифікація методу Годунова розрахунку течій стисливого газу на основі зворотних сплайнів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 4. С. 54—64. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.04.054>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Вступ. Надзвуковий та трансзвуковий діапазон швидкостей є основним при обтіканні літальних апаратів, пропелерів літаків та роторів вертольотів, течій поблизу повітрязбірників авіаційних двигунів, у дифузорах та ґратах компресорів, у проточній частині газових турбін. У течіях даного класу, як правило, виникають системи ударних хвиль, що взаємодіють між собою і з примежовими шарами, які розвиваються на зовнішніх поверхнях.

З математичної точки зору стрибки ущільнення є нескінченно тонкими поверхнями розриву. У 1970—80-х роках була показана можливість наскрізного розрахунку ударних хвиль (без виділення особливостей) у рамках методу скінченних різниць (МСР) та методу скінченних елементів (МСЕ). Водночас низка теоретичних питань залишається відкритою. Зокрема, для сталої роботи на розривах такі схеми вимагають запровадження додаткових складових зі штучною дисипацією.

Метод скінченних об'ємів (МСО) на сьогодні є найпоширенішим підходом до розрахунку течій стисливого газу. Відмінною особливістю МСО є те, що він забезпечує баланс фізичних величин у розрахунковій комірці, не здійснюючи побудову скінченно-різницевого аналогу будь-якої окремо взятої похідної. Цей метод дозволяє отримувати “слабкі рішення” у сенсі Лакса, тобто рішення, що задовольняють вихідним рівнянням, записаним в інтегральній формі, але не можуть бути отримані на поверхнях розриву для диференціальної форми рівнянь [1—7].

Головною задачею при чисельному використанні МСО є визначення конвективних та в'язких потоків на грані суміжних комірок (рис. 1). Для стисливих течій можна виділити дві базові моделі взаємодії частинок газу — хвильова взаємодія (підхід Рімана) [1—3, 6, 7] та обмін масою, імпульсом, енергією (підхід Больцмана) [4, 5].

Метод С.К. Годунова [1] історично є першим чисельним алгоритмом, який реалізував задачу Рімана (ріманівський солвер) у межах МСО. Він вплинув на подальший розвиток МСО так, що в літературі існує термін “схеми типу Годунова” (“Godunov-Type Schemes”) [3, 7].

Перевагою оригінального методу Годунова є повна постановка хвильової задачі про розпад розриву, але це призводить до складної процедури знаходження параметрів на грані контрольного об'єму. Ключовим моментом тут є рішення нелінійного рівняння тиску у внутрішній області розпаду розриву, яке використовує ітераційний алгоритм Ньютона, що зумовлює великі обчислювальні витрати. Саме значний рівень витрат комп'ютерних ресурсів методу Годунова сприяв появі наближених алгоритмів розрахунку розпаду розриву. Слід зазначити, що модифікації методу Годунова використовують спрощені лінеаризовані постановки задачі розпаду без урахування зростання ентропії на ударних хвилях [2, 3, 6, 7]. Також до недоліків оригінального методу Годунова [1] слід віднести його обмеженість як явної схеми першого порядку точності розрахунку нев'язких течій.

Мета — розробка ефективного неявного чисельного алгоритму другого порядку точності розв'язання рівнянь Нав'є—Стокса для стисливої течії без лінеаризації задачі розпаду розриву при розрахунку конвективних доданків. Основна математична ідея запропонованої в роботі модифікації полягає в апроксимації зворотним сплайном вихідної нелінійної залежності для тиску. Цей підхід можна умовно назвати “майже точним”, оскільки він зберігає точну постановку задачі розпаду розриву і використовує наближений спосіб обчислення лише одного значення тиску на грані сусідніх комірок у результаті розв'язання задачі Рімана.

Повна нелінійна постановка задачі розпаду розриву. В роботі [1] шукані значення параметрів потоку позначаються великими літерами: P — тиск; R — густина; U , V , W —

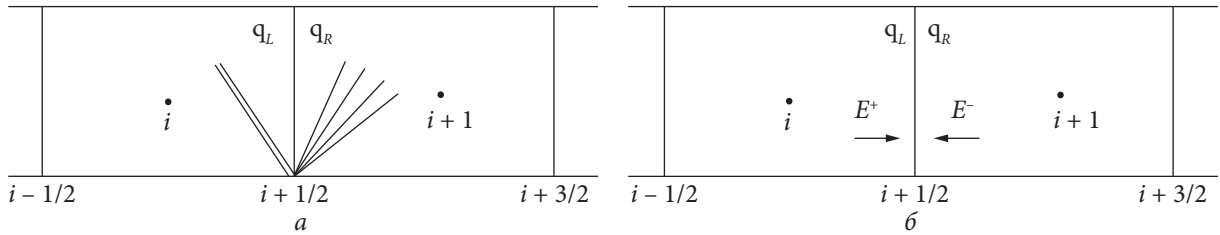


Рис. 1. Схеми визначення потоків на грані суміжних комірок: а — підхід Рімана; б — підхід Больцмана

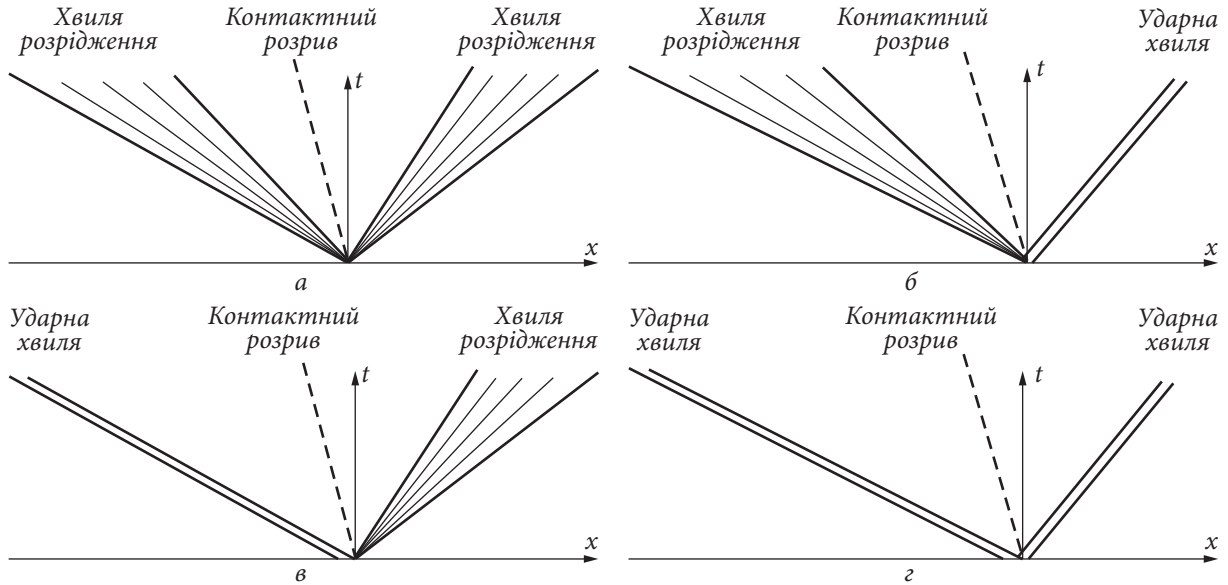


Рис. 2. Можливі конфігурації розпаду розриву

компоненти вектора швидкості. Ключовим фактором є визначення тиску P , після чого інші величини знаходяться за аналітичними співвідношеннями.

Розглядаються всі можливі конфігурації хвильового розпаду розриву: дві хвилі розрідження; ударна хвиля — хвиля розрідження, дві ударні хвилі (рис. 2). Теоретично можливий випадок утворення вакууму між двома хвилями розрідження (рис. 2, а). Проте, з погляду побудови обчислювального алгоритму це неприпустима ситуація, викликана помилками у програмі чи нефізичним початковим наближенням.

Для конфігурації “дві хвилі розрідження” існують точні аналітичні співвідношення [1], які не потребують подальшої модифікації.

У конфігурації “хвиля розрідження — стрибок ущільнення” (рис. 2, б) шукане значення тиску на грані P знаходиться в інтервалі $p_L < P < p_R$. Функціональна залежність $F=F(P)$ має вигляд

$$F(P) = \frac{2}{\gamma - 1} \left\{ a_L \left[\left(\frac{P}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] + \frac{P - p_R}{\rho_R a_R \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P}{p_R} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \right\} - (u_L - u_R). \quad (1)$$

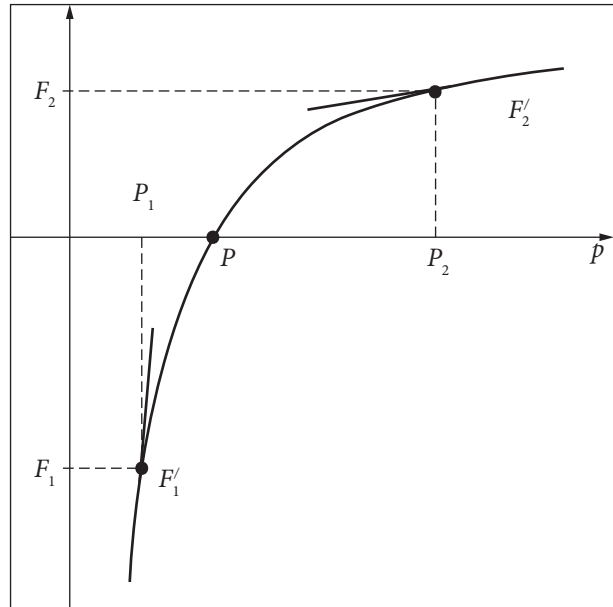


Рис. 3. Пряма залежність $F(P)$ відповідно до методу Годунова [1]

Тут p — тиск; ρ — густина; u — швидкість газу по нормалі до грані; a — швидкість звуку; γ — показник адиабати. Індекси “ L ” та “ R ” належать до параметрів потоків ліворуч і праворуч грані (див. рис. 1, а). Відповідно до рекомендацій [1] сусідні комірки позначаються так, щоб $p_R - p_L \geq 0$.

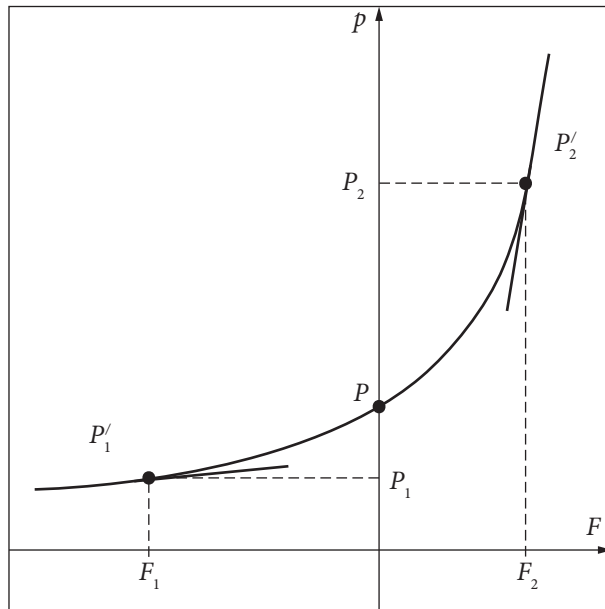
Значення тиску на грані P знаходиться як корінь нелінійного рівняння $F(P) = 0$ (рис. 3). Оскільки залежність $F = F(P)$ є опуклою функцією, то в оригінальній роботі [1] використовувався ітераційний алгоритм Ньютона.

У конфігурації “два стрибки ущільнення” (див. рис. 2, з) значення тиску на грані $P \geq p_R$, тобто поза діапазону $[p_L, p_R]$. Функція $F(P)$ записується так:

$$F(P) = \frac{2}{\gamma - 1} \left\{ \frac{P - p_L}{\rho_L a_L \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{P}{p_L} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}} + \frac{P - p_R}{\rho_R a_R \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{P}{p_R} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}} \right\} - (u_L - u_R). \quad (2)$$

Функція (2) також має опуклий характер, але на відміну від (1) $F(p_L) < F(p_R) < 0$, оскільки $P > p_L > p_R$. Для розв’язання рівняння (2) $F(P) = 0$ також необхідно використання ітераційного алгоритму Ньютона [1].

Розрахунок розпаду розриву за допомогою зворотних сплайнів. Основна ідея запропонованої в роботі модифікації полягає в апроксимації зворотним сплайном $P = P(F)$ нелінійних залежностей (1) та (2). Якщо розглянути зворотну функціональну залежність $P(F)$ (рис. 4) на інтервалі $[F_L, F_R]$ для функції (1), вибрати апроксимуючий параболічний або кубічний сплайн, то задача визначення значення P буде зведена до знаходження $P = P(0)$. З математичної точки зору значення $P(0)$ відповідає вільному коефіцієнту зворотного сплайну. Таким чином, замість дорогої з точки зору обчислювальних витрат ітераційної процедури ми матимемо ефективний, хоча і наближений, спосіб визначення тиску в розпаді розриву.

Рис. 4. Зворотна залежність $P(F)$ для рівняння (1)

Цей підхід можна умовно назвати “майже точним”, оскільки він зберігає точну постановку задачі розпаду розриву і використовує наближений спосіб обчислення лише однієї величини — тиску на грані комірки в результаті розв’язання задачі Рімана.

В роботі [1] наведено аналітичні вирази для похідних $F'(P)$ для рівнянь (1), (2), що дає змогу побудувати кубічні сплайни. Але, як показали тестові розрахунки, кубічний сплайн не є монотонною функцією і може призводити до нефізичних чисельних похибок. Тому в якості інтерполяційного поліному було обрано параболічні сплайни з обчисленням додаткових значень функцій $F=F(P)$.

Для рівняння (1) розраховувалось середнє значення $F_C=F(0,5(p_L+p_R))$. Побудова зворотного сплайну до функції (2) призводить до екстраполяції, оскільки $P \geq p_R > p_L$, що може зумовлювати зростання чисельної похибки. Однак цього можна уникнути, якщо на кривій $F(P)$ вибрати точку P_H так щоб $p_R < P < P_H$. Для цієї конфігурації значення P_H можна з наближеного розрахунку “сильного розриву” [1] за допомогою квадратного рівняння

$$\frac{P - p_L}{\sqrt{\theta \rho_L P}} + \frac{P - p_R}{\sqrt{\theta \rho_R P}} = u_L - u_R, \quad (3)$$

де $\theta = (\gamma + 1) / 2$. В якості P_H обирається більший корінь рівняння (3).

Після обчислення тиску на грані інші параметри (густина, компоненти швидкості) на суміжній грані визначаються відповідно за оригінальним методом Годунова [1].

Побудова неявного алгоритму рівнянь Нав’є—Стокса. В Інституті транспортних систем та технологій НАН України протягом багатьох років розробляється та застосовується власний програмний пакет обчислювальної аеродинаміки [8—11]. Для двовимірних нестационарних осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав’є—Стокса у довільних координатах

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_\nu}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_\nu}{\partial \eta} \right\} \quad (4)$$

побудовано неявний чисельний алгоритм другого порядку точності за простором та часом [9]. У системі рівнянь (4) $\hat{\mathbf{q}}$ — вектор консервативних газодинамічних параметрів; $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{E}}_v$, $\hat{\mathbf{F}}_v$ — вектори конвективних і в'язких потоків, записані в довільних координатах з урахуванням метричних коефіцієнтів і якобіана перетворення координат. Конвективні доданки обчислювалися за схемою Роу (Roe) [6]:

$$\hat{\mathbf{E}}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_L) + \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_R) - |\tilde{\mathbf{A}}| \cdot (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)], \quad (5)$$

де $\mathbf{q}_L$, $\mathbf{q}_R$ — параметри потоків ліворуч та праворуч суміжної грані $i + 1/2$, що знаходиться між сусідніми контрольними об'ємами з номерами i та $i + 1$ (див. рис. 1, а). Матриця Якобі $\tilde{\mathbf{A}} = \partial \hat{\mathbf{E}} / \partial \mathbf{q}$ розраховувалась за процедурою осереднення Роу [6, 9]. Співвідношення (5) є лінеаризацією задачі розпаду розриву.

При застосуванні розрахунку для повної постановки задачі розпаду розриву у співвідношеннях типу (5) немає необхідності. Конвективні і в'язкі потоки через суміжну грань сусідніх скінченних об'ємів обчислюються безпосередньо через функціональні вирази $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{E}}_v$, $\hat{\mathbf{F}}_v$.

Загальний принцип побудови неявного алгоритму ґрунтується на диференціюванні нев'язки $\hat{\mathbf{R}}$ дискретного аналога рівнянь (5) за допомогою рядів Тейлора [2, 9]. Це призводить до громіздкого вигляду неявного оператора та певних труднощів у його програмній реалізації. Процедuru побудови неявного оператора можна спростити, використовуючи модифіковану схему Стегера—Уормінга (Steger—Warming) для приросту конвективних доданків [5], тобто

$$\Delta \hat{\mathbf{E}}_{i+1/2} = \hat{\mathbf{A}}^+(Q_{i+1/2}) \cdot \Delta \mathbf{q}_i + \hat{\mathbf{A}}^-(Q_{i+1/2}) \cdot \Delta \mathbf{q}_{i+1}, \quad (6)$$

де $Q_{i+1/2} = (R, U, V, P)$ — вектор неконсервативних газодинамічних змінних на грані $i+1/2$, визначений модифікованим методом Годунова, $\hat{\mathbf{A}}^+(Q_{i+1/2}^n)$, $\hat{\mathbf{A}}^-(Q_{i+1/2}^n)$ — матриці Якобі, які відповідають додатнім та від'ємним власним числам (рис. 1, б).

Приріст векторів в'язких потоків та загальна процедура чисельної реалізації побудованого неявного алгоритму відповідає [9].

Тестування розробленої методики. У цій роботі для тестування розробленого неявного алгоритму розв'язання рівнянь Нав'є—Стокса було обрано задачі взаємодії косоного стрибка ущільнення з примезовим турбулентним шаром на плоскій пластині (рис. 5). Такий вибір тестової задачі зумовлений тим, що вона включає всі характерні риси, властиві в'язко-нев'язким взаємодіям: стрибки ущільнення, хвилі розрідження, наростання і відриг примезового шару. Крім того, для цих задач існує широкий вибір наукової літератури, фізичні особливості аналізованих процесів добре вивчені, що дозволяє однозначно трактувати отримані результати.

Розрахунки виконано за умов експерименту, проведеного в аеродинамічній трубі DLR Göttingen Ludwig Tube [12]. Модель являє собою клин завдовжки 300 мм навітряної частини, розташований під кутом $\theta = 10^\circ$ до незбуреного потоку. Передня гостра кромка клина розташовувалася на висоті 115 мм над плоскою пластиною і на 23 мм нижче по потоку. Турбулентний примезовий шар розвивався від гострої кромки плоскої пластини із завершенням переходу на відстані ~ 120 мм від кромки. Незбурений потік характеризувався

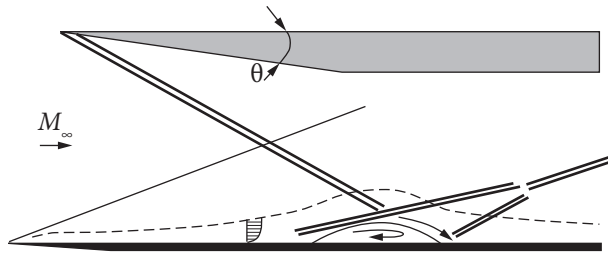


Рис. 5. Схема течії при взаємодії ударної хвилі з турбулентним примежовим шаром

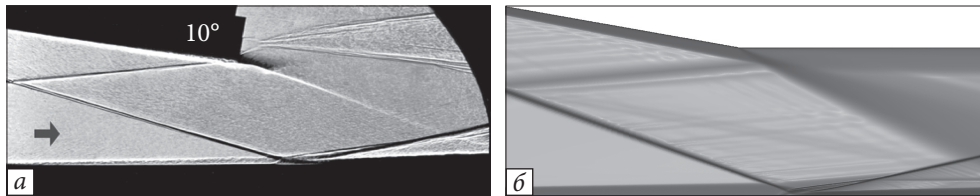


Рис. 6. Шлірен-фотографії області взаємодії ударної хвилі з турбулентним примежовим шаром: а — експеримент; б — розрахунок даної роботи на основі модифікованого неявного методу Годунова та Стегера—Уормінга

числами Маха $M_\infty = 5$ та Рейнольдса $Re = 3,7 \cdot 10^7$ 1/м, температурою $T_\infty = 68,79$ К. Відстань від передньої кромки пластины до точки падіння стрибка по нев'язкій течії дорівнювала ~ 350 мм. Температура пластины становила $T_w = 300$ К. Цей експеримент визнано NASA як верифікаційний для двовимірних задач про взаємодію ударної хвилі з турбулентним примежовим шаром [13]. Для розрахунку турбулентної в'язкості застосовували диференціальну модель Спаларта—Аллараса (Spalart—Allmaras) з додатковою складовою, яка враховує надзвукову швидкість у потоці [14].

Розрахунки проводили на сітці розмірністю 885×650 вузлів, приблизно 55 % їх перебували у примежових шарах на клині і пластині.

Загальна структура сильної взаємодії ударної хвилі з примежовим турбулентним шаром передається шлірен-фотографіями (рис. 6). Розрахований розподіл газодинамічних параметрів добре узгоджується з експериментальною картиною течії в області взаємодії. Виразно видно примежовий шар; стрибок, викликаний гострою передньою кромкою; падаюча ударна хвиля; зона відриву, стрибки відриву та приєднання; контактний розрив; відображений стрибок ущільнення, який утворюється над турбулентним примежовим шаром, що приєднався.

Інтенсивність падаючого стрибка ущільнення досить велика для появи відриву турбулентного примежового шару. Підвищення тиску, отримане в результаті падіння стрибка ущільнення, передається вгору за потоком крізь дозвукову частину примежового шару, викликаючи його потовщення і подальший відрив. Точка відриву знаходиться вище потоку від точки падіння косою стрибка в нев'язкому потоці. В результаті відриву потоку утворюється стрибок відриву, потім потік проходить хвилю розширення і знову стискається у стрибку приєднання. Далі стрибки зливаються у відображений стрибок ущільнення з утворенням потрібної точки та поверхні контактного розриву.

Розподіл тиску поверхні пластины (рис. 7) показує хороше узгодження експериментальних і розрахункових даних, як для схеми Роу, так і для запропонованого алгоритму.

Рис. 7. Розподіл тиску на поверхні пластини: 1 — розрахунок за схемою Роу; 2 — розрахунок за запропонованим алгоритмом; 3 — експериментальні дані [12]

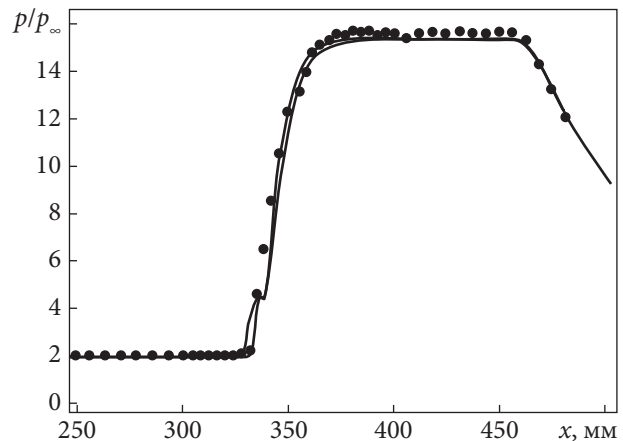
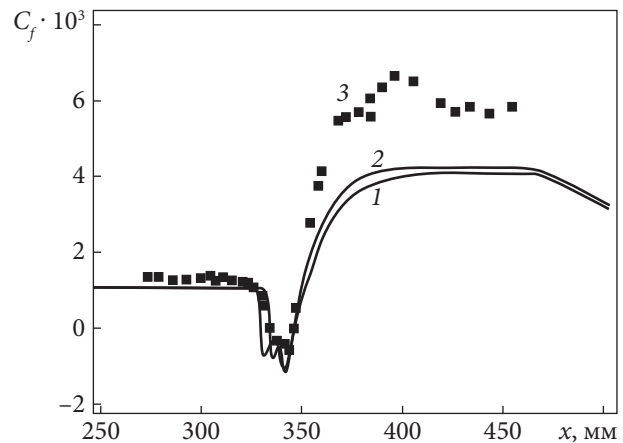


Рис. 8. Розподіл коефіцієнта тертя поверхні пластини: 1 — розрахунок за схемою Роу; 2 — розрахунок за запропонованим алгоритмом; 3 — експериментальні дані [12]



Зниження тиску за областю приєднання примежового шару зумовлене дією хвиль розрідження за генератором головного стрибка ущільнення.

Розподіл коефіцієнта тертя (рис. 8) показує узгодження між експериментальними та розрахунковими даними щодо положення точки відриву. Результати для розробленого неявного алгоритму на основі методів Годунова та Стегера—Уормінга показують дещо менший вплив вгору за потоком та краще узгодження з експериментальними даними у порівнянні зі схемою Роу. Нелінійний характер зміни тертя у зворотній течії передає вплив хвиль розрідження та стиснення, що утворюються над зоною відриву. Певна розбіжність результатів чисельних розрахунків та експериментальних даних спостерігається в області повторного приєднання потоку. Відновлення примежового шару відбувається з деякою “затримкою”, що є властивістю моделі турбулентності Спаларта—Аллмараса.

Висновки. Запропоновано неявний чисельний алгоритм розв’язання рівнянь Нав’є—Стокса стисливого газу з урахуванням модифікації явного методу Годунова для нев’язких течій. Модифікація розрахунку конвективних доданків полягає в апроксимації зворотним кубічним або параболічним сплайном вихідної залежності для тиску замість знаходження кореня нелінійного рівняння ітераційним алгоритмом Ньютона. Розглянутий підхід мож-

на назвати “майже точним”, оскільки він зберігає точну постановку розпаду розриву Годунова та використовує наближений спосіб обчислення лише однієї величини на суміжній грані між сусідніми комітками. Проведено верифікацію запропонованого підходу на задачі про взаємодію косоного стрибка ущільнення з турбулентним примежовим шаром на плоскій пластині при числі Маха 5 незбуреного потоку. Порівняння з експериментальними даними показує, що запропонована методика добре відтворює як окремі елементи структури взаємодії, так і загальні його параметри.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Матем. сб.* 1959. **47**, № 3. С. 271—306.
2. Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H. Computational fluid mechanics and heat transfer. 2nd ed. New York: Taylor & Francis, 1997. 785 p.
3. Harten A., Lax P.D., van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.* 1983. **25**, № 1. P. 35—61. <https://doi.org/10.1137/1025002>
4. Van Leer B. Progress in multi-dimensional upwind differencing. *Thirteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics* (Rome, 6—10 July 1992). Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. https://doi.org/10.1007/3-540-56394-6_189
5. MacCormack R.W., Pulliam T.H. Assessment of a new numerical procedure for fluid dynamics. *29th AIAA, Plasmadynamics and Lasers Conference* (Albuquerque, NM, USA, 15—18 June 1998). Albuquerque, 1998. <https://doi.org/10.2514/6.1998-2821>
6. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.* 1981. **43**, № 2. P. 357—372. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
7. Holt M. Review of Godunov methods. *ICASE Report*. 1996. № 25. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19970001744/downloads/19970001744.pdf>. (Дата звернення: 10.04.2025).
8. Redchys D.O. Numerical simulation of wind turbine rotors aerodynamics. *Proc. Appl. Math. Mech.* 2008. **7**, № 1. P. 2100049—2100050. <https://doi.org/10.1002/pamm.200700521>
9. Pylypenko A.O., Polevoy O.B., Prykhodko O.A. Numerical simulation of Mach number and angle of attack influence on regimes of transonic turbulent flows over airfoils. *TsAGI Sci. J.* 2012. **43**, № 1. P. 1—36. <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2012005226>
10. Redchys D., Fernandez-Gamiz U., Polevoy O., Moiseienko S., Portal-Porras K. Numerical simulation of subsonic flow around oscillating airfoil based on the Navier-Stokes equations. *Energ. Sources. Part A: Recovery, Util. Environ. Eff.* 2023. **45**, № 4. P. 9993—10009. <https://doi.org/10.1080/15567036.2023.2241411>
11. Redchys D., Ballesteros-Coll A., Fernandez-Gamiz U., Tuchyna U., Polevoy O., Moiseienko S., Zaika V. Flow structure control using plasma actuators. *AIAA Journal*. 2024. **62**, № 7. P. 2548—2561. <https://doi.org/10.2514/1.J063463>
12. Schülein E. Skin-friction and heat flux measurements in shock/boundary-layer interaction flows. *AIAA Journal*. 2006. **44**, № 8. P. 1732—1741. <https://doi.org/10.2514/1.15110>
13. NPARC Alliance Validation Archive. Mach 5 Shock Wave Boundary Layer Interaction. URL: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/m5swbli/m5swbli.html>. (Дата звернення: 10.04.2025)
14. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulation. *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2000. **21**, № 3. P. 252—263. [https://doi.org/10.1016/S0142-727X\(00\)00007-2](https://doi.org/10.1016/S0142-727X(00)00007-2)

Надійшла до редакції 15.04.2025

REFERENCES

1. Godunov, S. K. (1959). A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik*, 47, No. 3, pp. 271-306 (in Russian).
2. Tannehill, J. C., Anderson, D. A. & Pletcher, R. H. (1997). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. 2nd ed. New York: Taylor & Francis.
3. Harten, A., Lax, P. D. & van, Leer B. (1983). On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.* *SIAM Rev.*, 25, No. 1, pp. 35-61. <https://doi.org/10.1137/1025002>
4. Van Leer, B. (1992). Progress in multi-dimensional upwind differencing. In: *Thirteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. https://doi.org/10.1007/3-540-56394-6_189
5. MacCormack, R. W. & Pulliam, T. H. (1998, June). Assessment of a new numerical procedure for fluid dynamics. In: *29th AIAA, Plasmadynamics and Lasers Conference*. Albuquerque. <https://doi.org/10.2514/6.1998-2821>
6. Roe, P. L. (1981). Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43, No. 2, pp. 357-372. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
7. Holt, M. (1996). Review of Godunov methods. ICASE Report, No. 25. Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19970001744/downloads/19970001744.pdf>
8. Redchys, D. O. (2008). Numerical simulation of wind turbine rotors aerodynamics. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 7, No. 1, pp. 2100049-2100050. <https://doi.org/10.1002/pamm.200700521>
9. Pylypenko, A. O., Polevoy, O. B. & Prykhodko, O. A. (2012). Numerical simulation of Mach number and angle of attack influence on regimes of transonic turbulent flows over airfoils. *TsAGI Sci. J.*, 43, No. 1, pp. 1-36. <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2012005226>
10. Redchys, D., Fernandez-Gamiz, U., Polevoy, O., Moiseienko, S. & Portal-Porras, K. (2023). Numerical simulation of subsonic flow around oscillating airfoil based on the Navier-Stokes equations. *Energ. Sources. Part A: Recovery, Util. Environ. Eff.*, 45, No. 4, pp. 9993-10009. <https://doi.org/10.1080/15567036.2023.2241411>
11. Redchys, D., Ballesteros-Coll, A., Fernandez-Gamiz, U., Tuchyna, U., Polevoy, O., Moiseienko, S. & Zaika, V. (2024). Flow structure control using plasma actuators. *AIAA Journal*, 62, No. 7, pp. 2548-2561. <https://doi.org/10.2514/1.J063463>
12. Schüle, E. (2006). Skin-friction and heat flux measurements in shock/boundary-layer interaction flows. *AIAA Journal*, 44, No. 8, pp. 1732-1741. <https://doi.org/10.2514/1.15110>
13. NPARC Alliance Validation Archive. Mach 5 Shock Wave Boundary Layer Interaction. Retrieved from <https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/m5swbli/m5swbli.html>
14. Spalart, P. R. (2000). Strategies for turbulence modelling and simulation. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 21, No. 3, pp. 252-263. [https://doi.org/10.1016/S0142-727X\(00\)00007-2](https://doi.org/10.1016/S0142-727X(00)00007-2)

Received 15.04.2025

O.B. Polevoy, <https://orcid.org/0009-0001-6756-1078>

D.O. Redchyts, <https://orcid.org/0000-0001-8538-6026>

Institute of Transport Systems and Technologies of the NAS of Ukraine, Dnipro, Ukraine

E-mail: obp.dnepr@gmail.com, redchyts_da@ua.fm

MODIFICATION OF GODUNOV METHOD FOR CALCULATING FLOW OF COMPRESSIBLE GAS BASED ON REVERSE SPLINES

An implicit numerical algorithm for solving Navier-Stokes equations is proposed, based on a modification of Godunov's explicit method for calculating inviscid flows. The original Godunov method is based on a complete formulation of the problem of damping discontinuities between neighboring cells, which leads to the need to solve a nonlinear pressure equation using Newton's iterative algorithm on each face of a finite volume. To prevent large computational costs, a modification of the Godunov method for calculating convective terms is proposed. The main idea of the modification is to approximate the original nonlinear dependence with an inverse cubic or parabolic spline. From a mathematical point of view, instead of finding the root of a nonlinear equation, it is sufficient to find the free coefficient of the inverse spline. The considered approach can be called "almost exact", since it preserves the exact formulation of the discontinuity decay and uses an approximate method for calculating only one quantity — the pressure value on the adjacent face between adjacent cells as a result of solving the Riemann problem. The proposed modification of the calculation of convective terms for compressible gas flows is implemented within the framework of the proprietary software package for computational aerodynamics, which has been developed and applied for many years at the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine. The proposed approach was verified within the framework of the previously developed implicit numerical algorithm for two-dimensional unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes equations in arbitrary coordinates. The testing was conducted on the interaction of an oblique shock wave with a turbulent boundary layer on a flat plate at a Mach number of 5 for undisturbed flow. Comparison with experimental data on pressure distribution and coefficient, as well as experimental and numerical schlieren photographs, shows that the proposed method accurately reproduces both individual elements of the structure of the interaction under consideration and its general parameters.

Keywords: *implicit numerical algorithm, Riemann problem, inverse splines.*