

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.02.026>

УДК 534.2:532

О.П. Жук¹, <https://orcid.org/0009-0004-7253-6127>

Я.О. Жук^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-2726-8395>

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail: yaroslavzhuk@knu.ua, opzhuk1939@gmail.com

Про дію акустичного випромінювання на краплю в'язкої рідини в ідеальній рідині

Представлена академіком НАН України В.М. Назаренком

Розглянуто випадок поширення плоскої акустичної хвилі в ідеальній рідині, в якій знаходиться крапля в'язкої рідини. Досліджено дію на краплю середньої в часі величини гідродинамічної сили, обумовленої хвильовим полем – радіаційної сили – сили акустичного випромінювання. Постановка задачі передбачає обчислення гідродинамічної сили з точністю до величин другого порядку. Акустичну радіаційну силу визначено таким чином: спочатку розв'язано лінійну задачу дифракції падаючої первинної хвилі на краплю, потім обчислено гідродинамічну силу, що на неї діє, з подальшим її усередненням за періодом первинної хвилі. Для задоволення граничних умов на сферичній поверхні краплі використано розвинення потенціалів падаючої і відбитої хвилі у зовнішній ідеальній рідині та відповідних потенціалів у в'язкій рідині краплі за сферичними хвильовими функціями. За допомогою виведеної аналітичної формули для розрахунку акустичної радіаційної сили чисельно визначено характер дії акустичного випромінювання на краплю.

Ключові слова: ідеальна рідина, в'язка рідина, плоска акустична хвиля, рідка сферична крапля, гідродинамічна сила, акустична радіаційна сила.

Вступ. В акустичному полі поряд із періодичними коливаннями тиску виникає також стала в часі складова — так званий тиск акустичного випромінювання [1, 2], який є величиною другого порядку малості. Сили, що відповідають цьому тиску, відіграють важливу роль у різноманітних задачах природничих наук і техніки [2, 3 та ін.], зокрема в сучасних технологіях, де використовуються ефекти акустичної дії, наприклад для створення об'ємних сил у стані невагомості. Дослідження явища радіаційного тиску звукових хвиль започатковано у роботах [2, 4, 5]; огляд основних результатів наведено, зокрема, у монографії [6].

Виникнення акустичних радіаційних сил зумовлене тим, що середній за часом імпульс, який переносить акустична хвиля, може змінюватися в певному об'ємі середовища. Уна-

Ц и т у в а н н я: Жук О.П., Жук Я.О. Про дію акустичного випромінювання на краплю в'язкої рідини в ідеальній рідині. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2026. № 2. С. 26—33. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.02.026>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

слідок цього на даний об'єм діє стала в часі сила. Такі сили можуть впливати на сторонні об'єкти в рідині, наприклад на краплі іншої рідини, спричиняючи їх переміщення або коагуляцію, що використовується, зокрема, у процесах очищення рідин. Дію радіаційних сил на тверді сферичні частинки у в'язкій рідині описано в роботах [5, 6], а різні аспекти сил акустичного випромінювання розглянуто в численних працях [1, 7, 8 та ін.].

У статті наведено результати вивчення дії сил акустичного випромінювання на краплю в'язкої рідини, занурену в необмежене середовище ідеальної рідини. Раніше розглядалися випадки краплі ідеальної рідини в ідеальному та в'язкому середовищі, а також ситуація поблизу вільної поверхні рідини [1, 6—8]. Відповідно до прийнятого підходу сила акустичного випромінювання визначається як середнє за період первинної хвилі значення інтегрального тиску рідини на поверхню краплі. Тому тиск необхідно обчислювати з точністю до членів другого порядку за змінними акустичного поля, які після усереднення в часі не зникають. У результаті усереднення гідродинамічної сили отримується стала в часі радіаційна сила.

Мета дослідження — розробити підхід, який дає змогу досліджувати основні особливості поведінки акустичної радіаційної сили, яка діє на краплю в'язкої рідини, що міститься в ідеальній рідині в полі акустичної хвилі.

Постановка і метод розв'язання задачі. Нехай зовнішня ідеальна рідина, в якій знаходиться крапля, має густину ρ_0 , а швидкість звуку в ній a_0 . Крапля в'язкої рідини має форму сфери з радіусом R ; густина в'язкої рідини — $\bar{\rho}_0$; швидкість звуку в рідині — \bar{a}_0 ; μ' і λ' — зсувний і другий коефіцієнти в'язкості відповідно. Риска над символом означає, що він належить до в'язкої рідини краплі. Символи, які характерні тільки для в'язкої рідини, ризкою не позначаються. Випадки краплі ідеальної рідини в ідеальній рідині і у в'язкій рідині досліджено в роботах [1, 6—8].

Введемо прямокутну декартову систему координат з початком у центрі краплі $Ox_1x_2x_3$. З краплею зв'яжемо також сферичну систему координат $Or\theta\varphi$. Її кут θ будемо відраховувати від осі Ox_3 .

Первинна акустична хвиля в зовнішній ідеальній рідині, потенціал якої

$$\Phi_i = A \exp[i(kx_3 - \omega t)] \quad (1)$$

є розв'язком лінійного хвильового рівняння

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

поширюється в додатному напрямку осі Ox_3 . У формулі (1) позначено: A — амплітуда; $k = \omega / a_0$ — хвильове число; ω — колова частота; t — час.

Потенціал первинної хвилі (1) і потенціал розсіяної на краплі хвилі Φ_s , який також є розв'язком рівняння (2), розгорнемо в ряди за поліномами Лежандра [6] і подамо у такому вигляді:

$$\Phi_i = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A i^n j_n(kr) P_n(\cos\theta) e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

$$\Phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

де $j_n(kr)$ — сферичні функції Бесселя 1-го роду; $h_n^{(1)}(kr)$ — сферичні функції Ганкеля 1-го роду; $P_n(\cos\theta)$ — поліноми Лежандра.

Для зовнішньої ідеальної рідини використовуватимемо модель ідеальної стисливої баротропної рідини, і гідродинамічну силу її дії на краплю визначимо з умови потенціального обтікання краплі, а тиск p і радіальну компоненту швидкості v_r будемо обчислювати за формулами

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \Phi = \Phi_i + \Phi_s. \quad (5)$$

Стан в'язкої рідини краплі опишемо за допомогою лінеаризованої теорії течії стисливої в'язкої рідини [4]. За прийнятої умови потенціальна і вихрова складові вектора швидкості в'язкої рідини в краплі обчислюються на основі потенціалів $\bar{\Phi}_d$ і $\bar{\Psi}_d$, які є розв'язками рівнянь

$$\left[\left(1 + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{\bar{a}_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \bar{\Phi}_d = 0, \quad (6)$$

$$\left(v' \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{\Psi}_d = 0, \quad v' = \frac{\mu'}{\bar{\rho}_0}. \quad (7)$$

У сферичній системі координат потенціали $\bar{\Phi}_d$ і $\bar{\Psi}_d$ зобразимо розгорнутими в ряди за поліномами Лежандра:

$$\bar{\Phi}_d = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n j_n(\alpha r) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t), \quad (8)$$

$$\bar{\Psi}_d = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n j_n(\beta r) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t). \quad (9)$$

У формулах (8) і (9) позначено: $\alpha = \bar{k} + i\bar{k}_1$, $\bar{k} = \omega/\bar{a}_0$, $\bar{k}_1 = (\lambda' + \mu')\omega^2/(2\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^3)$ — коефіцієнт згасання, $\beta = (i\omega/v')^{0.5}$ — хвильове число швидкості вихрової хвилі у в'язкій рідині. Використавши формули (8) і (9), одержимо на основі лінеаризованої теорії стисливої в'язкої рідини [4] співвідношення для вектора швидкості \bar{V} , тиску \bar{p} і тензора напруження $\hat{\sigma}$ у в'язкій рідині краплі:

$$\bar{V} = \nabla \bar{\Phi}_d + \nabla \times (\nabla \times \bar{e}_r \bar{\Psi}_d), \quad (10)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho}_0 \left(\frac{\lambda' + 2\mu'}{\bar{\rho}_0} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{\Phi}_d, \quad (11)$$

$$\hat{\sigma} = (-\bar{p} + \lambda' \nabla \cdot \bar{V}) \bar{E} + 2\mu' \hat{e}, \quad 2\hat{e} = \nabla \bar{V} + (\nabla \bar{V})^T, \quad (12)$$

де \bar{E} — одиничний тензор; \hat{e} — тензор швидкості деформації.

Зауважимо, що розв'язки (4), (8) і (9) рівнянь (2), (6) і (7) вибрані так, що вони задовольняють умови випромінювання на нескінченності і умови обмеження в середині рідкої краплі відповідно.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A_n, \bar{A}_n і \bar{B}_n у формулах для потенціалів (4), (8) і (9) використовуємо граничні умови на поверхні краплі, радіус R якої вважаємо незмінним:

$$v_r|_{r=R} = \bar{v}_r|_{r=R}, \quad p|_{r=R} = \sigma_{rr}|_{r=R}, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0, \quad (13)$$

де $\sigma_{rr} = \bar{e}_r \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{e}_r$, $\sigma_{r\theta} = \bar{e}_r \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{e}_\theta$.

Беручи до уваги співвідношення (3)—(5) і (8)—(12), з граничних умов (13) при $r = R$ одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для обчислення коефіцієнтів A_n, \bar{A}_n і \bar{B}_n , для розв'язування якої застосуємо метод редукції:

$$\begin{cases} k \frac{dh_n^{(1)}(q)}{dq} A_n + i\beta_{1n} \frac{\omega}{R} \bar{A}_n + i\beta_{2n} \frac{\omega}{R} \bar{B}_n = -(2n+1)Aki^n \frac{dj_n(q)}{dq}, \\ i\omega\rho_0 h_n^{(1)}(q) A_n - 2\alpha_{1n} \frac{\mu'}{R^2} \bar{A}_n - 2\alpha_{2n} \frac{\mu'}{R^2} \bar{B}_n = -(2n+1)A\omega\rho_0 i^{n+1} j_n(q), \\ \varepsilon_{1n} \bar{A}_n + \varepsilon_{2n} \bar{B}_n = 0, \quad q = kr, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (14)$$

У системі рівнянь введено позначення:

$$\alpha_{1n} = \left(n^2 - n - \frac{(\beta R)^2}{2} \right) j_n(\alpha R) + 2(\alpha R) j_{n+1}(\alpha R),$$

$$\alpha_{2n} = n(n+1)[(n-1)j_n(\beta R) - (\beta R)j_{n+1}(\beta R)],$$

$$\beta_{1n} = nj_n(\alpha R) - (\alpha R)j_{n+1}(\alpha R), \quad \beta_{2n} = n(n+1)j_n(\beta R),$$

$$\varepsilon_{1n} = (n-1)j_n(\alpha R) - (\alpha R)j_{n+1}(\alpha R),$$

$$\varepsilon_{2n} = \left(n^2 - 1 - \frac{1}{2}(\beta R)^2 \right) j_n(\beta R) - (\beta R)j_{n+1}(\beta R).$$

Вважатимемо, що в'язкість рідини краплі мала. Введемо параметр

$$\varepsilon = [v' / (R^2 \omega)]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

і розглянемо випадок $\varepsilon = 1$. Тоді з точністю ε^2 можна записати

$$\alpha R \approx \bar{k}R, \quad \beta R \approx \frac{1+i}{\varepsilon\sqrt{2}}, \quad \bar{k} = \omega/\bar{a}_0. \quad (16)$$

У результаті для обчислення функцій Бесселя і Ганкеля для розв'язування системи рівнянь (14) скористаємося їх асимптотичними зображеннями для малих і великих значень аргументів [9].

Відповідно до прийнятого для дослідження методу [2, 5] одержані під час розв'язування лінійної задачі дифракції плоскої хвилі (1) на краплі в'язкої рідини співвідношення (4), (8) і (9) для потенціалів $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$, $\bar{\Phi}_d$ і $\bar{\Psi}_d$ використовуємо для обчислення з точністю до величин другого порядку гідродинамічної сили, яка діє в ідеальній рідині на краплю. Радіаційна сила (сила акустичного випромінювання) обчислюється усередненням в часі одержаної за такої умови гідродинамічної сили. Зазначимо, що внаслідок симетрії звукової хвилі відносно осі Ox_3 гідродинамічна сила спрямована вздовж осі Ox_3 і за величиною дорівнює інтегралу

$$F_{x_3} = -R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} p \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi. \quad (17)$$

При цьому, згідно з прийнятим методом, тиск p у зовнішній ідеальній рідині необхідно обчислювати в квадратичному наближенні [2, 5]:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (18)$$

Структура формули (18) передбачає для обчислення тиску p використання дійсної складової потенціалу $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$. Зауважимо також, що перший доданок у співвідношенні (18) необхідно обчислювати за формулою

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - V_{x_3} \left[\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right], \quad (19)$$

де повна похідна $d\Phi/dt$ у результаті усереднення в часі дорівнює нулю. Швидкість коливального руху краплі V_{x_3} з урахуванням великої частоти коливань [3] обчислюється за рівнянням

$$\bar{m} \dot{V}_{x_3} = -R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} p \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (20)$$

де $\bar{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho}_0$ — маса в'язкої рідини краплі з поверхнею $S = 4\pi R^2$, p — тиск у зовнішній ідеальній рідині, обчислений в лінійному наближенні (5).

Вважаючи радіус краплі малим відносно довжини хвилі і уникаючи громіздких викладок обчислення і усереднення в часі, співвідношення для гідродинамічної сили (17), яка діє на краплю, одержимо

$$\langle F_{x_3} \rangle = \langle F_{x_3}^{(1)} \rangle + \langle F_{x_3}^{(2)} \rangle + \langle F_{x_3}^{(3)} \rangle. \quad (21)$$

У формулі (21) позначено:

$$\begin{aligned} \langle F_{x_3}^{(1)} \rangle = & \pi \rho_0 \eta \left\{ \frac{2}{3} \left[q \left(L_1(q) \frac{dL_0(q)}{dq} + K_1(q) \frac{dK_2(q)}{dq} \right) - L_0(q) L_1(q) - K_1(q) K_2(q) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{15} \left[q \left(L_1(q) \frac{dL_2(q)}{dq} + K_1(q) \frac{dK_2(q)}{dq} \right) - L_1(q) L_2(q) - K_1(q) K_2(q) \right] \right\} - \end{aligned}$$

внесок першого доданка у співвідношенні для тиску (18) в радіаційну силу; $\langle F_{x_3}^{(2)} \rangle = \langle N_{x_3}^{(1)} \rangle + \langle N_{x_3}^{(2)} \rangle$ визначає внесок в радіаційну силу другого доданка у формулі (18) для тиску:

$$\langle N_{x_3}^{(1)} \rangle = \pi \rho_0 q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{dK_n(q)}{dq} \frac{dK_{n+1}(q)}{dq} + \frac{dL_n(q)}{dq} \frac{dL_{n+1}(q)}{dq} \right),$$

$$\langle N_{x_3}^{(2)} \rangle = 2\pi \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} (K_n(q)K_{n+1}(q) + L_n(q)L_{n+1}(q));$$

третьій доданок визначає внесок в радіаційну силу третього доданка у формулі (18) для тиску:

$$\langle F_{x_3}^{(3)} \rangle = -\pi \rho_0 q_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} (K_n(q)K_{n+1}(q) + L_n(q)L_{n+1}(q)).$$

У наведених співвідношеннях позначено:

$$K_n(q) = (2n+1)A_j(q) \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + A_{n1}j_n(q) - A_{n2}y_n(q),$$

$$L_n(q) = (2n+1)A_j(q) + A_{n1}y_n(q) + A_{n2}j_n(q), \quad \eta = \rho_0/\bar{\rho}_0,$$

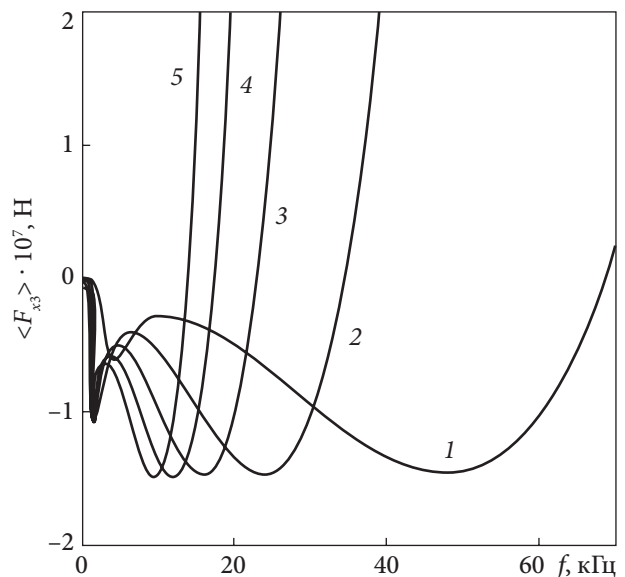
$$A_n = \text{Re } A_n + i \text{Im } A_n = A_{n1} + iA_{n2}.$$

Числові результати. Особливості дії радіаційної сили на краплі визначено чисельно за формулою (23). Розрахунки проведено за умови, що зовнішньою рідиною є вода, а краплі утворені з в'язкої рідини, якою є гліцерин, що не розчиняється у воді. Необхідні для проведення розрахунків фізико-механічні характеристики рідин наведено в таблиці. Амплітуду A первинної звукової хвилі (1) прийнято рівною $0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, що відповідає помірній густині потоку енергії у хвилі, $I = 175,5 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Фізико-механічні характеристики рідин

Рідина	Густина, кг/м ³	Швидкість звуку, м/с	Динамічна в'язкість, Па · с
Вода	1000	1500	—
Гліцерин	1264	1920	1412

Залежність акустичної радіаційної сили, що діє на краплю гліцерину, яка знаходиться у воді, від частоти первинної акустичної хвилі. Цифрами вказано радіуси крапель гліцерину, мм



Аналіз графіків залежності акустичної радіаційної сили (АРС), що діє на краплю гліцерину, яка знаходиться у воді, від частоти первинної акустичної хвилі (рисунок) свідчить, що в області частот до 70 кГц поведінка АРС не є монотонною. Спочатку значення АРС є від'ємними, що відповідає напрямку дії сили на всі краплі досліджених розмірів у бік, протилежний напрямку поширення первинної хвилі. При цьому значення АРС для всіх крапель мають два мінімуми і один максимум. Зі зростанням частоти значення АРС стають додатними, що свідчить про збіг її дії з напрямком поширення первинної акустичної хвилі. Для крапель з порівняно більшим радіусом зміна напрямку дії АРС відбувається за порівняно меншої частоти і спостерігається її швидше зростання.

Висновки. У рамках застосованих припущень і наближень показано, що акустична радіаційна сила є немонотонною функцією частоти первинної хвилі. Вплив акустичної радіаційної сили на в'язку краплю залежить від частоти падаючої первинної хвилі. Встановлено, що за певних частот первинної хвилі акустична радіаційна сила, яка діє на в'язку краплю, може дорівнювати нулю. Цим частотам відповідають положення рівноваги, які можуть бути стійкими або нестійкими залежно від зміни частоти.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Zhuk A.P. Effect of acoustic radiation on a spherical drop of liquid. *Int. Appl. Mech.* 2007. **43**, № 7. P. 726—733. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0071-1>
2. King L.V. On the acoustic radiation pressure on sphere. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1934. **147**, № 861. P. 212—240. <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215>
3. Лепендин Л.Ф. Акустика. Москва: Высшая школа, 1978. 448 с.
4. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
5. Жук А.П. Взаимодействие твердой частицы со звуковой волной в вязкой жидкости. *Прикл. механика.* 1983. **19**, № 11. С. 92—99.
6. Жук О.П., Гузь О.М., Жук Я.О. Радіаційні сили акустичного поля в рідині з включеннями. Київ: Альянт, 2023. 240 с.
7. Guz A.N., Zhuk A.P. Effect on acoustic radiation in a viscous liquid on a spherical drop of ideal liquid. *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 6. P. 605—614. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0659-1>
8. Жук О.П., Жук Я.О. Про характер дії радіаційної сили на сферичну краплю рідини в акустичному полі. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* 2015. Спецвипуск. С. 81—86.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). Москва: Наука, 1979. 837 с.

Надійшла до редакції 11.03.2026

REFERENCES

1. Zhuk, A. P. (2007). Effect of acoustic radiation on a spherical drop of liquid. *Int. Appl. Mech.*, 43, No. 7, pp. 726-733. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0071-1>
2. King, L. V. (1934). On the acoustic radiation pressure on sphere. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, 147, No. 861, pp. 212-240. <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215>
3. Lependin, L. F. (1978). *Acoustics*. Moscow: *Visshaya shkola* (in Russian).
4. Guz, A. N. (1998). *Dynamics of compressible viscous liquid*. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
5. Zhuk, A. P. (1983). Interaction of a solid particle with an acoustic wave in a viscous fluid. *Prikladnaya Mehanika*, 19, No. 11, pp. 92-99 (in Russian).
6. Zhuk, O. P., Guz, O. M. & Zhuk, Ya. O. (2023). *Radiation forces of an acoustic field in a liquid with inclusions*. Kyiv: Aliant (in Ukrainian).

7. Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (2014). Effect on acoustic radiation in a viscous liquid on a spherical drop of ideal liquid. *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 6, pp. 605-614. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0659-1>
8. Zhuk, O. P. & Zhuk, Ya. O. (2015). On the character of radiation force action on an spherical liquid drop placed in an acoustic field. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, No. 5, Spec. Iss., pp. 81-86 (in Ukrainian).
9. Abramowitz, M. & Stegun, I. (Eds.). (1979). *Reference book on special functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 11.03.2026

O.P. Zhuk¹, <https://orcid.org/0009-0004-7253-6127>

Ya.A. Zhuk^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-2726-8395>

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

E-mail: yaroslavzhuk@knu.ua, opzhuk1939@gmail.com

ON THE ACTION OF ACOUSTIC RADIATION ON A DROP OF VISCOUS LIQUID IN IDEAL FLUID

The paper examines the propagation of a plane acoustic wave in an ideal fluid containing a droplet of a viscous fluid. The influence of the time-averaged value of the hydrodynamic force caused by the wave field — the radiation force — and the acoustic radiation force is being investigated. The problem formulation involves calculating the hydrodynamic force to second-order accuracy. The acoustic radiation force is determined as follows: first, the linear problem of diffraction of the incident primary wave on the drop is solved, then the hydrodynamic force acting on it is calculated, followed by its averaging over the period of the primary wave. To satisfy the boundary conditions on the spherical surface of the droplet, the potentials of the incident and reflected waves in the surrounding ideal fluid, as well as the corresponding potentials in the viscous fluid of the droplet, were expanded into spherical wave functions. Using the obtained analytical formula for calculating the acoustic radiation force, the nature of the acoustic radiation's effect on the droplet was numerically determined.

Keywords: *ideal liquid, viscous liquid, plane acoustic wave, spherical drop, hydrodynamic force, acoustic radiation force.*