

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.03.044>

УДК 539.3:534.1

**Н.С. Городецька**, <https://orcid.org/0000-0003-3305-522X>

**В.Н. Олійник**, <https://orcid.org/0000-0002-6366-650X>

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

E-mail: [nsgihm@gmail.com](mailto:nsgihm@gmail.com)

## Ефективність збудження звукового поля в пружному хвилеводі

*Представлена академіком НАН України В.Т. Грінченком*

*На основі порівняння генерації звуку в необмежене акустичне середовище джерелом скінченних розмірів і вимушених коливань напівобмеженого пружного хвилеводу встановлено принципи відмінності в ефективності збудження хвильового поля. Ефективність випромінювання джерела звуку оцінено на основі порівняння величин активної і реактивної складових миттєвого потоку потужності. Показано, що для пружного хвилеводу активна складова потоку потужності має резонансний характер і досягає свого максимального значення на частоті крайового резонансу. На цій частоті реактивна складова дорівнює нулю і ефективність випромінювання максимальна. Реактивна складова миттєвого потоку потужності має два локальних максимуми, коли її величина значно перевищує активну складову.*

**Ключові слова:** миттєвий потік потужності, активна і реактивна потужність, ефективність джерела звуку, вимушені коливання, хвилевід, крайовий резонанс, добротність резонансу.

**Вступ.** Оцінювання ефективності роботи джерела звуку є однією з ключових проблем у процесі розроблення технологій на основі аналізу акустичних полів у різних середовищах, зокрема: для активних методів неруйнівного контролю стану пружних конструкцій; виявлення підводних об'єктів у гідроакустиці; визначення сили землетрусу в сейсмології; зниження рівня акустичного забруднення довкілля; розроблення неінвазивних методів контролю стану пацієнтів у медицині, а також для низки інших галузей [1]. Генерація звуку в пружному середовищі (твердому, рідкому, газоподібному) обумовлена взаємодією джерела звуку з середовищем. При цьому не відбувається перенесення частинок середовища, а передається стан збурення, тобто енергія джерела поширюється по пружному середовищу. Ефективність джерела звуку визначається як відношення випромінюваної акустичної потужності до повної потужності, яку споживає джерело. Таке відношення можна визна-

---

Ц и т у в а н н я: Городецька Н.С., Олійник В.Н. Ефективність збудження звукового поля в пружному хвилеводі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2026. № 3. С. 44—54. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.03.044>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

чити через миттєвий потік потужності, вектор Умова—Пойнтінга, який проходить через одиницю площі поверхні за одиницю часу і вказує напрямком поширення хвиль. Миттєвий потік потужності в хвильових полях має дві складові — дійсну (активна потужність) і уявну (реактивна потужність). Активна потужність є “корисною” енергією, яка витрачається або на виконання роботи, або на поширення хвиль на значні відстані від джерела (дальнє поле), реактивна потужність не виконує роботу, а описує частину енергії, яка осцилює в околі джерела (ближнє поле) [2]. Фізичний зміст реактивної потужності полягає в обміні енергії між потенційною енергією деформації і кінетичною енергією частинок середовища. Середнє значення реактивної складової за повний цикл дорівнює нулю. Проте оцінка реактивної потужності в ближньому до джерела полі дуже важлива, особливо під час аналізу поширення звуку в моделях, що враховують неоднорідні хвилі [3]. Зауважимо, якщо відношення реактивної потужності до активної потужності буде достатньо великим, то енергія джерела в дальнє поле не передається, ефективність джерела звуку низька.

Ефективність джерела було досліджено в багатьох роботах, присвячених вивченню випромінювання звуку в акустиці. Вона залежить від низки факторів — середовища, в якому поширюється звук, амплітуди і частоти коливань джерела, форми джерела та наявності резонаторів. Наприклад, джерело у формі рупора значно підвищує ефективність випромінювання. Модельна задача для розрахунку ефективності джерела — це джерело обмежених розмірів, яке випромінює в необмежене середовище. Класичними прикладами таких задач в акустиці є пульсуюча, осцилююча сфера [4], випромінювання балки чи пластини з перегородками [2], прямокутного поршня в нескінченній перегородці [5]. Для пружного середовища ефективність випромінювання оцінювалась здебільшого для задач сейсмології. Наприклад, у роботі [6] для визначення енергії землетрусу розглядалась модельна задача щодо енергетичних характеристик звукового поля, яке генерується сферичною порожниною в однорідному ізоτροпному та необмеженому середовищі. Було показано, що хвилі ближнього поля відіграють істотну роль в енергетичному балансі, перетворюючи статичну енергію на хвильову.

Ефективність випромінювання у напівобмежені пружні середовища, зокрема хвилеводи, практично не досліджено. Зазвичай енергетичні характеристики визначали для дальнього поля, аналізуючи середній за цикл (за період для гармонічних коливань) потік потужності [6].

**Метою роботи** є аналіз енергетичних характеристик ближнього поля за умов динамічного навантаження на торці пружного хвилеводу. Показано, що як активна, так і реактивна складові миттєвого потоку потужності значною мірою залежать від частоти. При цьому на частоті крайового резонансу активна складова має максимум, а реактивна дорівнює нулю. Іншими словами, на частоті крайового резонансу вся енергія, яка “закачується” у хвилевід, перетворюється на хвильову енергію, яка поширюється в дальнє поле.

**Миттєвий потік потужності, що випромінюється скінченним джерелом звуку в акустичне середовище.** Для розуміння загальних властивостей процесу випромінювання звуку розглянемо найпростіший варіант — генерація звуку в акустичне середовище джерелом кінцевих розмірів, зокрема пульсуючою сферою, на поверхні якої задано рівномірно розподілену коливальну швидкість з частотою  $\omega$ . Потік енергії існує в будь-якій точці поза сферою і обчислюється за рівнянням

$$P_r = \operatorname{Re} p(r, t) \cdot \operatorname{Re} v_r(r, t), \quad (1)$$

де  $p(r, t)$  — звуковий тиск;  $v_r$  — коливальна швидкість частинок середовища. Для пульсуючої сфери

$$p(r, t) = \frac{A}{r} e^{-i(\omega t - kr)}, \quad v_r = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{iA}{\omega\rho} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{-i(\omega t - kr)}, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

де  $c$  — швидкість звуку в середовищі;  $A = -i\omega\rho \frac{V_0 a^2}{1 - ika} e^{-ika}$  — амплітуда коливальної швидкості сфери;  $a$  — радіус сфери.

Загальна величина випроміненої потужності визначається шляхом інтегрування потоку енергії по поверхні сфери із заданим радіусом.

Виділяючи дійсні частини у виразах для коливальної швидкості та тиску, для миттєвого потоку енергії з одиниці поверхні сфери можемо записати

$$P_r = \text{Re } p(r) \text{Re } v_r(r) = \rho c V_0 \left( \cos^2(\omega t) \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \frac{ka}{1 + (ka)^2} \right). \quad (2)$$

Наявність двох складових у виразі (2) є типовим для генерації звуку в нескінченному середовищі скінченним джерелом. Перша складова, що має відмінне від нуля середнє значення за період, визначає енергію, яка витрачається на генерацію хвильового поля. Друга складова з нульовим середнім значенням визначає рухи середовища, що не генерують звукове поле, і з погляду енергетичної ефективності акустичного процесу її можна не враховувати.

Для прямої оцінки ефективності звернемо увагу на роль хвильового розміру джерела. Середній за період потік потужності визначається за виразом

$$W_r = \frac{1}{T} \int_0^T P_r(t) dt = \frac{\rho c V_0}{2} \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}.$$

Відношення максимальної величини реактивної потужності пульсуючої сфери з радіусом  $a$  до інтенсивності звуку дорівнює

$$\frac{P(\text{react})_{\max}}{W(r=a)} = \frac{2}{ka}.$$

Для “малого” випромінювача ( $ka \leq 1$ ) це відношення вказує на низьку ефективність випромінювання звуку. Збільшення хвильових розмірів випромінювача ( $ka \geq 1$ ) спричиняє підвищення ефективності випромінювання звуку.

Повертаючись до вимушених коливань хвилеводу, знову спочатку зупинимось на поширенні звуку в акустичному середовищі. Розглядається акустичний хвилевід  $z \geq 0$ ,  $|y| \leq h$  з жорсткими межами. Хвильове поле збуджується гармонічним навантаженням на торці  $p_z = P(y) e^{-i\omega t}$ , яке розкладемо в ряд Фур’є за функціями, які визначають розподіл навантаження по осі  $y$ :

$$P(y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m \cos\left(\frac{m\pi y}{h}\right),$$

$$P_m = \frac{\delta_m}{2h} \int_{-h}^h P(y) \cos\left(\frac{m\pi y}{h}\right) dy, \quad \delta_0 = 1, \quad \delta_m = 2, \quad m > 0. \quad (3)$$

Загальний розв'язок хвильового рівняння, який описує будь-яке поле у хвилеводі з жорсткими стінками, можна записати у вигляді

$$p(y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos\left(\frac{m\pi y}{h}\right) e^{-i(\omega t - \gamma_m z)}. \quad (4)$$

Коливальна швидкість у напрямку поширення  $z$  вздовж осі хвилеводу має вигляд

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\omega\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m C_m \cos\left(\frac{m\pi y}{h}\right) e^{-i(\omega t - \gamma_m z)}, \quad \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}, \quad (5)$$

де  $\rho$  — густина;  $C_m$  — амплітуда хвилі, яка визначається властивостями джерела звуку;  $\gamma_m$  — хвильове число нормальної хвилі;  $c$  — швидкість звуку. Для акустичного хвилеводу дисперсійне рівняння для заданої частоти має обмежене число дійсних коренів, які відповідають нормальним хвилям, що поширюються, і нескінченне число чисто уявних коренів, які описують неоднорідні хвилі, що згасають у напрямку поширення. Саме неоднорідні хвилі визначають характер ближнього до торця поля. Зауважимо, що оскільки нормальні моди в акустичному хвилеводі ортогональні, то в хвилеводі можуть існувати тільки ті хвилі, які мають складову гармоніки зовнішнього навантаження (3).

Миттєвий потік потужності в напрямку поширення хвиль через поперечний розріз  $z = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ :

$$P_z = \int_{-h}^h \operatorname{Re} p(y) \operatorname{Re} v_z(y) dy = \frac{h}{\omega\rho} \left( \cos^2(\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2 \operatorname{Re} \gamma_n + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2 \operatorname{Im} \gamma_n \right). \quad (6)$$

Перший доданок у виразі (6) описує активну складову миттєвого потоку потужності, а другий — реактивну. Активна складова потоку потужності обумовлена тільки нормальними хвилями, які поширюються ( $\operatorname{Re} \gamma_n \neq 0$ ). Реактивна складова потоку потужності обумовлена тільки неоднорідними хвилями ( $\operatorname{Im} \gamma_n \neq 0$ ). Ефективність збудження хвильового поля за вимушених коливань визначається видом навантаження. Якщо розклад навантаження в ряд Фур'є (3) не містить гармонік, які відповідають неоднорідним нормальним хвилям, то реактивна складова миттєвого потоку потужності дорівнює нулю і вся енергія, яку мають рухомі частинки середовища, передається нерухомим, тобто ефективність такого виду навантаження максимальна.

**Миттєвий потік потужності за вимушених коливань пружного напівшару.** Такий аналіз акустичної ситуації дає можливість якісно визначити характерні особливості процесу генерації хвильового поля в пружному хвилеводі. Насамперед слід звернути увагу на різницю в особливостях частинних розв'язків, що утворюють нормальні хвилі пружного хвилеводу. На відміну від акустичного випадку система неоднорідних хвиль формується системою комплексних коренів дисперсійного рівняння. Цьому відповідає поява в пружному хвилеводі принципово іншого типу хвиль — неоднорідних біжучих хвиль.

Важливою особливістю нормальних хвиль у пружному хвилеводі є істотна залежність функцій розподілу амплітуд нормальних хвиль по товщині хвилеводу від частоти. Це практично унеможливує вибір збуджувального навантаження, яке б відповідало формі

хвилі. Можлива така ситуація, коли енергія хвильового поля в хвилеводі за фіксованого розподілу зовнішніх навантажень може переноситися різними біжучими модами. Унікальною властивістю пружного хвилеводу є наявність у необмеженій системі резонансу. Це дає можливість визначити частоти, за яких уся енергія зовнішнього джерела витрачається на формування дальнього поля (відсутність реактивної складової в потоці потужності).

**Постановка задачі.** Розглянемо вимушені гармонічні коливання пружного ізотропного напівшару ( $|Y| \leq h, Z \geq 0$ ) з вільними бічними поверхнями і заданими фізичними характеристиками: модулем зсуву  $\mu$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ . На торці напівшару прикладено динамічне навантаження.

Хвилі вважаються гармонічними з коловою частотою  $\omega$ . Розглянемо симетричне відносно площини  $Y = 0$  хвильове поле. Для побудови розв'язку введемо безрозмірні координати зі співвідношеннями  $y = Y/h, z = Z/h$ .

Необхідно знайти вектор переміщення  $\vec{u}(y, z)$  для рівняння Ламе

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (7)$$

який задовольняє такі крайові умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} + \sigma_{zz}^{(i)} = 0, \quad \tau_{zy} + \tau_{zy}^{(i)} = 0, \quad z = 0, \quad |y| \leq 1, \\ \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad y = \pm 1, \quad z \dots 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\sigma_{zz}^{(i)}, \tau_{yz}^{(i)}$  — зовнішнє навантаження на торці.

**Метод розв'язання.** Крайова задача розв'язується методом однорідних розв'язків, який є узагальненням класичного методу власних функцій на крайові задачі теорії пружності. Основу методу становить подання хвильового поля у вигляді ряду за системою нормальних хвиль, кожна з яких задовольняє умову відсутності в даному випадку напружень на одній частині межі ( $y = \pm 1$ ), а загалом подання має достатню довільність для виконання крайових умов на іншій частині межі ( $z = 0$ ).

Проблеми, які виникають під час застосування методу однорідних розв'язків для цієї крайової задачі, обумовлені тим, що нормальні хвилі утворюють неортогональні системи функцій, крім того, самі ці функції і відповідні їм власні значення є комплексними. Попри це та певну математичну незавершеність методу однорідних розв'язків широко застосовується для аналізу статичної та динамічної поведінки пружних тіл скінченних розмірів. Головною перевагою цього методу є його наочність внаслідок подання розв'язку набором нормальних хвиль у нескінченному хвилеводі з однорідними крайовими умовами. Кожна нормальна хвиля збуджується зі своєю амплітудою ( $C_j$ ), величина якої визначається за виконання крайових умов на торці напівшару.

Вектор переміщення, який відповідає нормальній хвилі з хвильовим числом  $\xi_n$ , має вигляд (множник  $e^{i\omega t}$  опущено)

$$\vec{u}_z^{(n)} = -\xi_n \left[ p_2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi_n^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{sh } p_1} \right] e^{i\xi_n z},$$

$$\tilde{u}_y^{(n)} = i \left[ \xi_n^2 \frac{\text{sh}(p_2 y)}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi_n^2 + p_2^2}{2} \frac{\text{sh}(p_1 y)}{\text{sh } p_1} \right] \ell^{i\xi_n z}, \quad (9)$$

$$p_j(\xi_n) = \begin{cases} \sqrt{\xi_n^2 - \Omega_j^2}, & |\xi_n| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi_n^2}, & |\xi_n| < \Omega_j, \end{cases} \quad \Omega_j = \frac{\omega h}{c_j}, \quad j = 1, 2,$$

де  $c_1$  — швидкість повздовжніх хвиль;  $c_2$  — швидкість поперечних хвиль;  $\xi_n$  — корені дисперсійного рівняння [8]:

$$\Delta(\xi) = \xi^2 p_2 \text{cth } p_2 - \frac{(2\xi^2 - \Omega_2^2)^2}{4} \frac{\text{cth } p_1}{4p_1} = 0. \quad (10)$$

Дисперсійне рівняння для кожної частоти має скінченне число дійсних і уявних значень  $\xi_n$ , комплексних значень нескінченно багато. Комплексні корені входять у загальний розв'язок парами  $(\pm \text{Re } \xi + i \text{Im } \xi)$ , вони не впливають на потік енергії в дальньому полі і відповідають розв'язку, що спадає в позитивному напрямку осі  $z$ . У роботі розглянуто діапазон частот, в якому існує тільки одна нормальна хвиля, що поширюється. В цьому діапазоні частот дисперсійне рівняння не має чисто уявних коренів.

Напруження, які відповідають вектору переміщення (9), визначаються за законом Гука.

Отже, для знаходження амплітуд нормальних хвиль необхідно розв'язати такі функціональні рівняння:

$$\sigma_{zz}^{(i)} = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sigma_{zz}^{(n)}(\xi_n) \ell^{-i(\omega t - \xi_n z)}, \quad \tau_{zy}^{(i)} = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n \tau_{zy}^{(n)}(\xi_n) \ell^{-i(\omega t - \xi_n z)}. \quad (11)$$

Труднощі алгебраїзації цієї системи функціональних рівнянь обумовлені неортогональністю нормальних хвиль. Хоча до сьогодні точні методи розв'язку таких систем не розроблено, проте використовується ряд підходів, які дають змогу отримати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів  $C_n$ . Ми застосували метод колокацій. Якість отриманого розв'язку оцінювали за точністю виконання крайових умов на торці напівшару. Похибка виконання умов на торці (11) з урахуванням 50 пар нормальних хвиль з комплексними хвильовими числами не перевищувала 1 % прикладеного навантаження. Додатковим критерієм була оцінка виконання закону збереження енергії, який задовольнявся з точністю до 99,98 % енергії, яка вноситься в систему.

**Аналіз результатів.** Перейдемо до кількісної оцінки характеристик хвильового поля за умови, що зовнішнє навантаження задається таким чином:

$$\sigma_{zz}^{(i)}(y, 0) = 2\mu f(y) \ell^{-i\omega t}, \quad f(y) = 0,5 = C, \quad \tau_{zy}^{(i)}(y, 0) = 0.$$

Для гармонічних хвильових процесів, як правило, розглядається середній за період потік потужності, що “закачується” у напівшар ( $z = 0$ ):

$$W^{(i)} = \frac{i\omega}{2} \mu \int_{-1}^1 (\sigma_{zz}^{(i)} \text{Im } \tilde{u}_z + \tau_{zy}^{(i)} \text{Im } \tilde{u}_y) dy, \quad u_{z,y} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \tilde{u}_{z,y}^{(n)}, \quad (12)$$

і який переноситься біжучими хвилями

$$W = \omega \mu \frac{\Omega_2^2}{2} \sum_{n=1}^N E_z^n, \quad E_z^n = |C_n|^2 \Delta'(\xi), \quad (13)$$

де  $N$  — кількість біжучих хвиль, які можуть існувати на частоті зовнішнього навантаження;  $\Delta'$  — похідна дисперсійного рівняння (10) за  $\xi_n$ .

Кількісні оцінки миттєвого потоку потужності є не менш важливими для розуміння особливостей хвильового процесу в пружному хвилеводі. Миттєвий потік потужності з одиниці торцевої поверхні напівшару ( $z = 0$ ) у напрямку поширення хвилі визначається як

$$P_z = \operatorname{Re} \sigma_{zz}^{(i)}(y, 0) \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial u_z^{(n)}(\xi_n, y)}{\partial t}. \quad (14)$$

Враховуючи множник  $e^{i\omega t}$ , запишемо

$$\operatorname{Re} \sigma_{zz}^{(i)} = 2\mu \cdot f(y) \cdot \cos \omega t, \\ V_z = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial u_z^{(n)}(\xi_n, y)}{\partial t} = -i\omega (\cos \omega t - i \sin \omega t) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \tilde{u}_z^{(n)}(\xi_n, y).$$

Розглядаючи миттєвий потік через поверхню  $z = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , проінтегруємо вираз (14) за  $y$ . Тоді миттєвий потік потужності через поперечний переріз  $z = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  за умови  $f(y) = \operatorname{const}$  запишемо як

$$\tilde{P}_z = 2\mu\omega\Omega_0^2 \left( \cos^2 \omega t \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n - \sin \omega t \cos \omega t \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n \right), \quad (15)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{\Omega_2^2}{2} - \Omega_1^2.$$

У рівнянні (15) перший доданок відповідає активній потужності і описує енергію, яка переноситься в дальнє поле, другий доданок — реактивній потужності.

Перейдемо до аналізу миттєвого потоку, фрагменти частотної залежності якого зображено на рис. 1. В області низьких частот активна складова миттєвого потоку потужності перевищує реактивну і поступово спадає. Реактивна складова поступово збільшується і на частоті  $\Omega_2 = 2,215$  вже дорівнює активній складовій миттєвого потоку потужності. З подальшим збільшенням частоти реактивна складова продовжує зростати і досягає свого максимального значення на частоті  $\Omega_2 = 2,314$ . За вищої від цього значення частоти реактивна складова спадає і дорівнює нулю на частоті крайового резонансу ( $\Omega_2 = 2,3151$ ). На цій частоті активна складова має максимум (див. рис. 1, б). На перший погляд, нульове значення реактивної складової потоку потужності на частоті, на якій амплітуди неоднорідних хвиль максимальні, може здаватися незрозумілим. Проте, як вже зазначалося, у процесі поширення хвиль відбувається енергообмін між двома точками, одна з яких коливається, а інша нерухома. Для опису цього типу руху доцільно використовувати аналогію з осцилятором (маса на пружині). Даний підхід узгоджується з інтерпретацією поширення хвилі як передання енергії з точки в точку, тобто передання стану середовища.

Рівняння осцилятора з демпфіруванням під дією періодичної зовнішньої сили має вигляд

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t}, \quad 2\delta = R/m, \quad \omega_0^2 = K/m, \quad (16)$$

де  $R$  — коефіцієнт демпфірування;  $K$  — жорсткість пружини;  $\omega_0$  — власна частота системи за відсутності демпфірування.

Розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$\xi(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)} e^{-i\omega t}.$$

Дійсна величина швидкості

$$\text{Re} \dot{\xi}(t) = \text{Re}(-i\omega\xi(t)e^{-i\omega t}) = \frac{2\delta\omega^2 \cos \omega t - \omega(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} \frac{F_0}{m}.$$

Миттєвий потік потужності

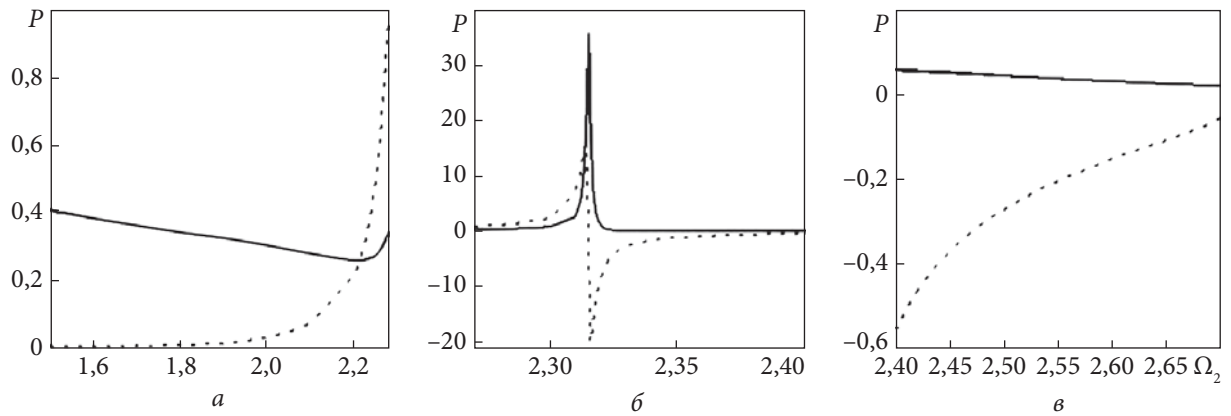
$$P = \frac{2\delta\omega^2 \cos^2(\omega t) - \omega(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} \left(\frac{F_0}{m}\right)^2. \quad (17)$$

Другий доданок у виразі (17) відповідає реактивній складовій потоку потужності і на резонансній частоті дорівнює нулю.

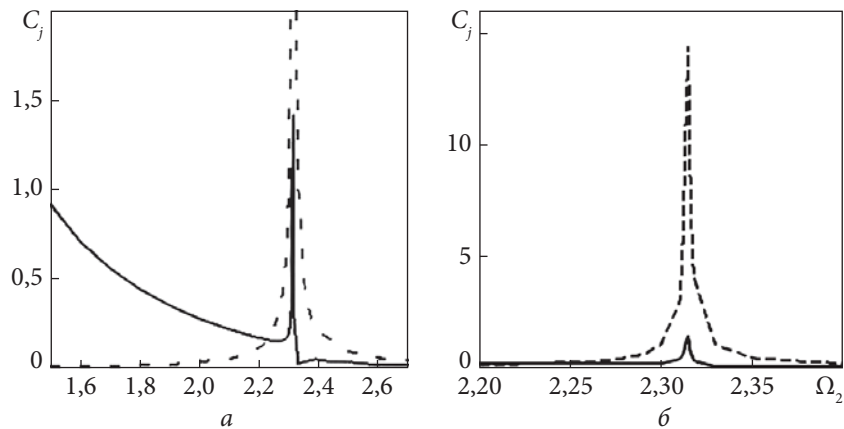
Повернемося до аналізу частотної залежності миттєвого потоку потужності для пружного напівшару. Вище частоти  $\Omega_e$  активна складова потоку потужності спадає, а реактивна складова, залишаючись меншою за нуль, різко зменшується і досягає свого мінімального значення на частоті  $\Omega_2 = 2,316$ , після якої знову зростає (див. рис. 1, б). Реактивна складова потоку потужності пов'язана з енергією, яка сконцентрована в ближньому полі джерела, і може розглядатись як енергія, яка осцилює без перенесення енергії в дальнє поле. На частоті  $\Omega_2 = 2,3151$  реактивна складова потоку потужності змінює знак, що означає зміну напрямку її потоку. При цьому зміна знаку реактивної складової через кожні пів періоду залишається. З подальшим зростанням частоти модуль реактивної складової зменшується. До частоти  $\Omega_2 = 2,74$ , на якій перша пара комплексних коренів дисперсійного рівняння (10) вироджується в дійсні корені, реактивна складова миттєвого потоку потужності перевищує його активну складову. Вище цієї частоти активна складова перевищує реактивну, але реактивна не дорівнює нулю, оскільки ближнє поле формується за рахунок усіх нормальних хвиль з комплексними хвильовими числами, які можуть існувати на цій частоті.

Як видно з рис. 2, модулі амплітуд нормальної хвилі з першим дійсним хвильовим числом і з першим комплексним хвильовим числом досягають свого максимального значення на частоті  $\Omega_e$ . При цьому амплітуда першої неоднорідної хвилі значно перевищує амплітуду хвилі, що поширюється. Крім того, на частоті  $\Omega_e$  фаза вказаних нормальних хвиль змінює знак. Середній за період потік потужності (енергія дальнього поля), обумовлений нормальною хвилею, що поширюється на частоті крайового резонансу, досягає свого максимального значення.

Як відомо, частота крайового резонансу та його добротність змінюються зі зміною коефіцієнта Пуассона. Так само змінюється активна і реактивна складові миттєвого потоку потужності.



**Рис. 1.** Частотна залежність миттєвого потоку потужності через поперечний переріз  $z = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , нормований на  $\mu\omega$ , у момент часу  $t = T/8$ ,  $\nu = 0,3$ . Суцільна крива відповідає активній потужності, штрихова — реактивній складовій

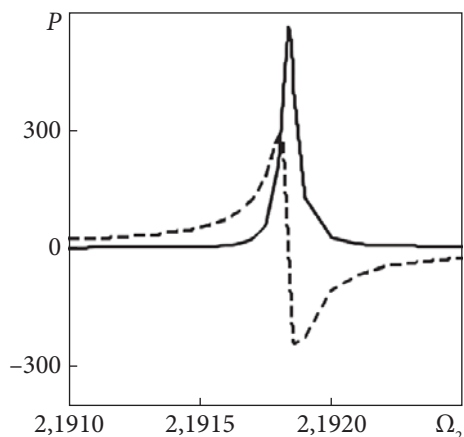


**Рис. 2.** Частотна залежність модуля амплітуди нормальної хвилі з першим дійсним хвильовим числом (суцільна крива) та хвилі з першим комплексним хвильовим числом (штрихова крива) (а) і її фрагмент в околі частоти крайового резонансу  $\Omega_2 = \Omega_e = 2,315$  (б)

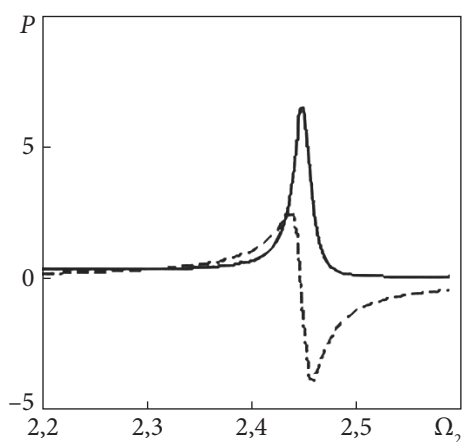
На рис. 3 наведено частотну залежність активної складової миттєвого потоку потужності і реактивної складової для  $\nu = 0,2$ . Порівнюючи рис. 1 і рис. 3, відзначимо, що характер частотної залежності для обох випадків зберігається. Активна складова потоку потужності досягає свого максимального значення на частоті крайового резонансу, а реактивна складова на цій частоті дорівнює нулю. Так само, як і амплітудні характеристики крайового резонансу, зі зменшенням коефіцієнта Пуассона максимальне значення активної складової миттєвого потоку потужності на частоті крайового резонансу зростає. Добротність резонансу також збільшується. Зокрема, для  $\nu = 0,2$  (див. рис. 3) на частоті крайового резонансу амплітуда активної складової миттєвого потоку потужності перевищує активну миттєву потужність в 15,7 рази.

На рис. 4 зображено залежність активної і реактивної складових потоку потужності від частоти для  $\nu = 0,4$ . Зі збільшенням коефіцієнта Пуассона амплітуда активної складової миттєвого потоку потужності і добротність зменшуються. Отже, для активної складової

**Рис. 3.** Частотна залежність активної складової миттєвого потоку потужності (суцільна крива) і реактивної складової (штрихова крива) для  $\nu = 0,2$



**Рис. 4.** Залежність активної і реактивної складових потоку потужності від частоти для  $\nu = 0,4$



миттєвого потоку потужності зберігаються характерні ознаки резонансу на неоднорідних хвилях (резонансна частота зростає, а добротність знижується).

Ефективність збудження хвильового поля в пружному хвилеводі за вимушених коливань з нормальним постійним навантаженням на торці досягає максимуму на частоті крайового резонансу. На цій частоті реактивна складова миттєвого потоку потужності дорівнює нулю. В області низьких частот  $\Omega_2 \leq 2,0$  ( $\nu = 0,3$ ) реактивна складова миттєвого потоку потужності значно менша за активну складову і ефективність збудження хвильового поля висока. Зі збільшенням частоти вплив реактивної складової зростає і ефективність зменшується аж до частоти, на якій з'являються біжучі хвилі вищих порядків, за винятком частоти крайового резонансу, на якій реактивна складова дорівнює нулю і ефективність джерела коливань максимальна.

**Висновки.** Виконано аналіз енергетичних особливостей поширення хвиль у пружних хвилеводах. Знайдено частотні залежності миттєвого потоку потужності за динамічного навантаження хвилеводу. Показано, що як активна, так і реактивна складові миттєвого потоку потужності мають резонансний характер, при цьому їх максимуми не збігаються. Встановлено, що на частоті крайового резонансу активна складова миттєвого потоку потужності досягає максимуму, а реактивна складова дорівнює нулю, що забезпечує ефективне перенесення енергії від джерела в дальнє поле.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Shen Y., Giurgiutiu V. Combined analytical FEM approach for efficient simulation of Lamb wave damage detection. *Ultrasonics*. 2016. **69**. P. 116–128. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2016.03.019>
2. Kaizuka T., Nakano K. Radiation modes and acoustic field confined near acoustic sources. *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. **146**. EL299–EL305. <https://doi.org/10.1121/1.5126922>
3. Liu Z.-B., Maury C. An improved method for the calculation of Near-Field Acoustic Radiation Modes. *J. Sound Vib.* 2016. **363**. P. 316–328 <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.10.005>
4. Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маціпура В.Т. Основи акустики. Київ: Наук. думка, 2007. 640 с.
5. Mellow T., Kärkkäinen L. Expansions for the radiation impedance of a rectangular piston in an infinite baffle. *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. **140**. P. 2867–2875. <https://doi.org/10.1121/1.4964632>
6. Vavryčuk V. Elastic near-field wave energy radiated by a spherical cavity. *Rev.ModPhys.* 1994. **66**, № 1. P. 241–247. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.66.241>
7. Грінченко В.Т., Городецька Н.С. Особливості переносу енергії в пружних хвилеводах. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 4. С. 45–53. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.04.045>

Надійшла до редакції 07.05.2026

REFERENCES

1. Shen, Y. & Giurgiutiu, V. (2016). Combined analytical FEM approach for efficient simulation of Lamb wave damage detection. *Ultrasonics*, 69, pp. 116-128. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2016.03.019>
2. Kaizuka, T. & Nakano, K. (2019). Radiation modes and acoustic field confined near acoustic sources. *J. Acoust. Soc. Am.*, 146, EL299-EL305. <https://doi.org/10.1121/1.5126922>
3. Liu, Z.-B. & Maury, C. (2016). An improved method for the calculation of Near-Field Acoustic Radiation Modes. *J. Sound Vib.*, 363, pp. 316-328. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.10.005>
4. Grinchenko, V. T., Vovk, I. V. & Matsypura, B. T. (2007). *Fundamentals of acoustics*. Kyiv: Naukova Dumka (in Ukrainian).
5. Mellow, T. & Kärkkäinen, L. (2016). Expansions for the radiation impedance of a rectangular piston in an infinite baffle. *J. Acoust. Soc. Am.*, 140, pp. 2867-2875. <https://doi.org/10.1121/1.4964632>
6. Vavryčuk, V. (1994). Elastic near-field wave energy radiated by a spherical cavity. *Rev. Mod. Phys.*, 66, No. 1, pp. 241-247. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.66.241>
7. Grinchenko, V. T. & Gorodetska, N. S. (2025). Features of energy transfer in elastic waveguides. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 4, pp. 45-53 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.04.045>

Received 07.05.2026

N. S. Gorodetska, <https://orcid.org/0000-0003-3305-522X>

V.N. Oliynik, <https://orcid.org/0000-0002-6366-650X>

Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: nsgihm@gmail.com

EFFICIENCY OF SOUND FIELD EXCITATION IN AN ELASTIC WAVEGUIDE

Based on a comparative analysis of sound generation by a finite-sized source in an unbounded acoustic medium and forced oscillations in a semi-infinite elastic waveguide, fundamental differences in the efficiency of wave field excitation have been established. The radiation efficiency of the acoustic source was evaluated by analyzing the active and reactive components of the instantaneous power flow. It is demonstrated that, for an elastic waveguide, the active power flow component exhibits a resonant behavior, reaching its peak at the edge resonance frequency. At this frequency, the reactive component vanishes, resulting in maximum radiation efficiency. Furthermore, the reactive component of the instantaneous power flow displays two local maxima, where its magnitude significantly exceeds that of the active component.

**Keywords:** forced oscillations, efficiency of generation of the wave field, edge resonance.