

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.03.055>

УДК 539.375

**А.О. Камінський**<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0000-9989-6887>

**М.В. Дудик**<sup>1,2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-1399-6367>

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

<sup>2</sup> Уманський національний університет, Умань, Україна

E-mail: dudik\_m@hotmail.com

## Про критерії зрушення міжфазної тріщини у квазікрихкому матеріалі

*Представлена академіком НАН України В.Л. Богдановим*

*Розглянуто проблему вибору критеріїв руйнування кусково-однорідних тіл з міжфазними тріщинами. Використовуючи аналітичну модель зони передруйнування в з'єднувальному матеріалі з квазікрихким механізмом руйнування біля вершини міжфазної тріщини в умовах плоскої деформації, здійснено верифікацію енергетичних критеріїв старту поширення (зрушення) тріщини вздовж межі розділу. Зону передруйнування було змодельовано лінією розриву переміщення, для якої виконується умова міцності типу Мізеса—Хілла. Спираючись на точний аналітичний розв'язок відповідної крайової задачі, отриманий за допомогою методу Вінера—Гонфа, описано алгоритм оцінки умов зрушення міжфазних тріщин. Запропонований алгоритм характеризується простотою практичної реалізації, не потребує використання складних програмних засобів скінченно-елементного аналізу чи проведення спеціальних експериментів для визначення матеріальних параметрів, а також зберігає придатність для широкого класу конфігурацій тіл і схем навантаження. Як досліджувані критеріальні параметри зрушення розглянуто суми степеневих функцій відношень швидкостей вивільнення енергії для різних мод навантаження до їхніх граничних значень. Верифікацію критеріїв зрушення міжфазних тріщин виконано в межах одного з базових експериментів для оцінки тріщиностійкості будівельних конструкцій, і встановлено, що найкращу узгодженість з експериментальними даними забезпечує квадратичний критерій руйнування.*

**Ключові слова:** критерії зрушення, міжфазна тріщина, зона передруйнування, квазікрихкий механізм руйнування, умова міцності Мізеса—Хілла.

**Вступ.** У механіці руйнування матеріалів актуальною проблемою є вибір критерію зрушення тріщини. В його основі зазвичай лежать силовий, енергетичний або деформаційний підходи, що слугують загальними принципами і призводять до появи численних варіантів критеріїв. Проблема посилюється у випадках складної конфігурації навантаження, гете-

---

Цит у в а н н я: Камінський А.О., Дудик М.В. Про критерії зрушення міжфазної тріщини у квазікрихкому матеріалі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2026. № 3. С. 55—65. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.03.055>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

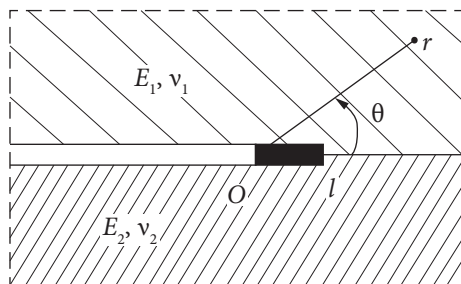


Рис. 1. Розрахункова схема моделі

розвиваються нові підходи до дослідження умов зрушення міжфазної тріщини. Так, через рівність нулю коефіцієнтів інтенсивності напружень біля її вершини під час стискання кусково-однорідного тіла вздовж плоскої межі розділу матеріалів розроблено метод, який ґрунтується на визначенні умов локальної втрати стійкості стану рівноваги в околі тріщини [2—4]. В роботах [5—7] поворот міжфазної тріщини і міжфазне руйнування розглянуто в межах аналітичних моделей зон передруйнування, які виникають у матеріалах з'єднання біля вершини тріщини.

У численних публікаціях для визначення умов міжфазного руйнування використано енергетичні критерії степеневого типу з різними значеннями показників степеня і швидкістю вивільнення енергії для різних мод навантаження як критеріальні величини [8—13]. Постає питання: як вибір критеріїв руйнування або його параметрів впливає на значення руйнівних навантажень?

**Мета** дослідження — визначення на основі моделей зон передруйнування, запропонованих у роботах [5, 6], впливу параметрів критерію руйнування такого типу на поширення міжфазної тріщини вздовж межі розділу у квазікрихкому з'єднувальному матеріалі.

**Опис моделі.** В умовах плоскої деформації розглянуто кусково-однорідне тіло з плоскою межею розділу двох пружних матеріалів з модулями Юнга  $E_1$ ,  $E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  відповідно та міжфазною тріщиною завдовжки  $L$ . Частини тіла з'єднані адгезивним матеріалом з квазікрихким механізмом руйнування. Завдання полягає у визначенні граничного навантаження, дія якого призводить до зрушення (старту) тріщини у з'єднувальному матеріалі.

Відповідно до моделі міжфазної тріщини [5, 6] передбачається, що біля вершини тріщини внаслідок концентрації напружень утворюється зона передруйнування. Зону передруйнування у квазікрихкому з'єднувальному матеріалі моделюємо лінією розриву переміщення, для якої виконується квадратичний критерій міцності типу Мізеса—Хілла:

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_0}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

де  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$  — опори відриву та зсуву з'єднувального матеріалу відповідно.

Зонам передруйнування у квазікрихкому матеріалі властива маломасштабність. Внаслідок цього вважатимемо довжину досліджуваної зони  $l$  значно меншою, ніж довжина тріщини, і розглядатимемо тіло як кусково-однорідну площину з напівнескінченим розрізом на межі розділу і лінією розриву переміщення скінченної довжини на його продов-

рогенної будови тіл, різних механізмів руйнування складових матеріалів тіла. Така ситуація трапляється, зокрема, у кусково-однорідних тілах – композитах, зварних і клеєних з'єднаннях, сендвіч-структурах тощо. Осциляційна поведінка переміщень берегів розкритої міжфазної тріщини, неможливість відокремлення симетричної і косиметричної складових локального поля напружень біля її вершин ускладнюють застосування критеріїв руйнування, прийнятих у лінійній механіці руйнування [1]. У зв'язку з цим

женні (рис. 1), яка визначається в ході реалізації моделі. Урахування зовнішнього навантаження здійснюється через локальне поле напружень в околі вершини тріщини, відоме з асимптотики розв'язку аналогічної задачі теорії пружності про міжфазну тріщину без лінії розриву [14], яка зрощується з шуканим розв'язком моделі на відстанях  $l \ll r \ll L$ , використовуючи її як умову на нескінченності.

Враховуючи умову (1) і вважаючи береги тріщини вільними від навантажень, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\begin{aligned} \theta = -\pi \cup \pi: \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\ \theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \\ \theta = 0, r < l: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi(r), \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin \psi(r), \\ \theta = 0, r > l: \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = 0, r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta \approx C_1 r^{-1/2+i\omega} + \bar{C}_1 r^{-1/2-i\omega}, \tau_{r\theta} \approx C_2 r^{-1/2+i\omega} + \bar{C}_2 r^{-1/2-i\omega}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\langle f \rangle$  — стрибок величини  $f$ ;  $\psi(r)$  — фазовий кут напруження в зоні передруйнування, який у подальшому через малість її розмірів вважаємо сталим і рівним його середньому значенню  $\psi$ ;

$$C_1 = e' K L^{-i\omega}, \quad C_2 = -i C_1, \quad K = K_1 + i K_2;$$

риска над  $C_1, C_2$  означає операцію комплексного спряження;  $K$  — нормований за Райсом (J.R. Rice) [15] комплексний коефіцієнт напружень біля вершини тріщини;

$$e' = \frac{1}{\sqrt{8\pi \cdot (1-\beta^2)}}, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \beta = \frac{(1 + e\kappa_2) - (e + \kappa_1)}{(1 + e\kappa_2) + (e + \kappa_1)};$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Передбачається виконання умови  $\cos \psi > 0$ , необхідної для відривного характеру нормального напруження в зоні передруйнування.

Використовуючи інтегральне перетворення Мелліна, сформульовану крайову задачу (2) зведено до векторної задачі Вінера—Гопфа з матричним коефіцієнтом типу Храпкова [16], для якої отримано точний аналітичний розв'язок [6] та з умови обмеженості напружень в кінці лінії розриву виведено систему трансцендентних рівнянь для розрахунку відносної довжини  $d = l/L$  і фазового кута когезійного напруження  $\psi$ :

$$d = C\sigma^2 \left\{ \left( \frac{E_1}{\sigma_0} \right)^2 \cos^2(\omega \ln d + \varphi + \xi + \zeta) + \left( \frac{E_1}{\tau_0} \right)^2 \sin^2(\omega \ln d + \varphi + \xi + \zeta) \right\}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \psi = n \cdot \operatorname{tg}(\omega \ln d + \varphi + \xi + \zeta), \quad (4)$$

де

$$C = \pi \left[ \frac{e'|N| \cdot |\tilde{q}| G_0^+(-1)}{q} \right]^2, \quad q = q_0^2 + q_1^2, \quad \tilde{q} = (q_0 \tilde{q}_0 + q_1 \tilde{q}_1) + i(q_1 \tilde{q}_0 - q_0 \tilde{q}_1),$$

$$q_0 = \tilde{Q}_{11}^+(-1) = \tilde{Q}_{22}^+(-1) = 1, \quad q_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-1) = -\tilde{Q}_{21}^+(-1),$$

$$\tilde{q}_0 = \tilde{Q}_{11}^+(-1/2 - i\omega) = \tilde{Q}_{22}^+(-1/2 - i\omega), \quad \tilde{q}_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-1/2 - i\omega) = -\tilde{Q}_{21}^+(-1/2 - i\omega);$$

$\sigma = \frac{|K_1 + iK_2|}{E_1 \sqrt{L}}$  — безрозмірний параметр зовнішнього навантаження,  $\varphi = \arctg \frac{K_2}{K_1}$  — його фазовий кут;  $n = \sigma_0 / \tau_0$ ;

$$\xi = \arg N, \quad N = \frac{K^+(-1/2 - i\omega)}{(1/2 + i\omega)G^+(-1/2 - i\omega)};$$

$$\zeta = \arg q;$$

$$K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}; \quad \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_0(z)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G_0^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ G_0^-(p), & \text{Re } p > 0; \end{cases}$$

$$G_0(p) = \frac{4(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos^2 p\pi}{(e + \kappa_1)^2 + (1 + e\kappa_2)^2 + 2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos 2p\pi},$$

$$A = \frac{(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2))}{2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2)};$$

$\tilde{Q}_{ij}^+(p)$  ( $i, j = 1, 2$ ) — компоненти матриці

$$\tilde{\mathbf{Q}}^+(p) = \frac{\text{ch } \theta^+(p) \mathbf{I} - \text{sh } \theta^+(p) \mathbf{J}}{r^+(p)},$$

де

$$r^\pm(p) = (1 - \beta^2)^{1/4} \exp \left[ \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_1(t)}{it - p} dt \right], \quad H_1(t) = \frac{1 - \beta^2 \text{th}^2 \pi t}{1 - \beta^2},$$

$$\theta^\pm(p) = \frac{\pm p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_2(t)}{t + ip} dt, \quad H_2(t) = \frac{\text{arcth}(\beta \cdot \text{th } \pi t)}{t},$$

$\mathbf{I}$  — одинична матриця,  $g(p) = i\beta \text{tg } p\pi$ , матриця  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\Gamma(z)$  — гамма-функція,  $i$  — уявна одиниця.

Для використання в енергетичних критеріях руйнування мають місце розрахункові формули для швидкості вивільнення енергії  $G^{pz} = \frac{dW^{pz}}{dl}$  у зоні передруйнування та для її складових  $G_1^{pz} = \frac{dW_1^{pz}}{dl}$ ,  $G_2^{pz} = \frac{dW_2^{pz}}{dl}$ , які відповідають модам I і II навантаження:

$$G^{pz} = 4(1 - \nu_1^2)E_1L \cdot \frac{2e'^2\sigma^2|N|^2 \cdot |M\tilde{q}q'|}{Aq^2(1 - \beta^2)^{1/4}h_1} \cos(\mu + \theta_1 + \zeta' - \zeta),$$

$$G_1^{pz} = 4(1 - \nu_1^2)E_1L \cdot \frac{2e'^2\sigma^2|N|^2 \cdot |\tilde{q}q'M|}{Aq^2(1 - \beta^2)^{1/4}h_1} \times$$

$$\times [\cos(\omega \ln d + \varphi + \xi + \zeta) \cos(\omega \ln d + \varphi + \xi + \mu + \zeta' + \theta_1) -$$

$$- \omega \sin(2\omega \ln d + 2\varphi + 2\xi + \zeta + \mu + \zeta' + \theta_1)],$$

$$G_2^{pz} = 4(1 - \nu_1^2)E_1L \cdot \frac{2e'^2\sigma^2|N|^2 \cdot |\tilde{q}q'M|}{Aq^2(1 - \beta^2)^{1/4}h_1} \times$$

$$\times [\sin(\omega \ln d + \varphi + \xi + \zeta) \sin(\omega \ln d + \varphi + \xi + \mu + \zeta' + \theta_1) +$$

$$+ \omega \sin(2\omega \ln d + 2\varphi + 2\xi + \zeta + \mu + \zeta' + \theta_1)], \quad (5)$$

де

$$q' = \tilde{q}_0 - i\tilde{q}_1; \quad \zeta' = \arg q'; \quad M = \frac{1 - 2i\omega}{3 + 2i\omega}; \quad \mu = \arg M;$$

$$h_1 = \exp \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_1(t)}{1 + t^2} dt \right]; \quad \theta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_2(t)}{1 + t^2} dt.$$

**Енергетичні критерії зрушення тріщини в квазікрихких матеріалах.** У квазікрихких матеріалах тріщина розширюється, коли енергія, що вивільняється в процесі її подовження, дорівнює або перевищує сумарну енергію утворення нових поверхонь та дисипацію енергії в зоні передруйнування. Через змішаний характер навантаження біля вершини міжфазної тріщини і відмінність граничних значень енергетичних характеристик матеріалу для різних мод навантаження в критеріях зрушення тріщини відокремлюються складові енергії, що відповідають різним модам. У термінах швидкостей вивільнення енергії в умовах плоскої деформації критерій зрушення тріщини має загальний вигляд  $F(G_1 / G_{1c}, G_2 / G_{2c}) = 1$ , де  $G_1$ ,  $G_2$  і  $G_{1c}$ ,  $G_{2c}$  — компоненти швидкості вивільнення енергії та в'язкості руйнування з'єднувального матеріалу для I і II мод навантаження. Компоненти швидкості вивільнення енергії складаються з величин  $G_1^{el}$ ,  $G_2^{el}$ , які відповідають потоку пружної енергії у вершину тріщини за відсутності зони передруйнування, та швидкостей вивільнення енергії в зоні передруйнування  $G_1^{pz}$ ,  $G_2^{pz}$ , тобто

$$G_{1(2)} = G_{1(2)}^{el} + G_{1(2)}^{pz}.$$

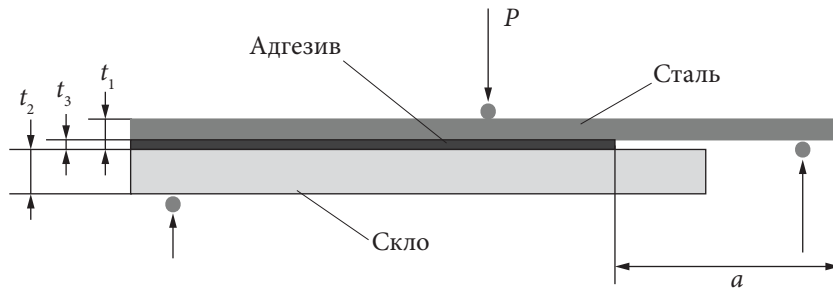


Рис. 2. Схема експерименту [13]

Приклади розрахунків величин  $G_1^{el}$ ,  $G_2^{el}$  біля вершини міжфазної тріщини у кусково-однорідних тілах наведено, зокрема, в роботах [17—25].

Для критеріальної функції  $F(G_1/G_{1c}, G_2/G_{2c})$  немає загальноприйнятого виразу. Значного поширення набуло використання степеневі функції виду [8]

$$\left(\frac{G_1}{G_{1c}}\right)^{n_1} + \left(\frac{G_2}{G_{2c}}\right)^{n_2} = 1, \quad (6)$$

в якій показники  $n_1$ ,  $n_2$  підбираються відповідно до експериментальних даних. У теоретичних дослідженнях найчастіше використовують рівність  $n_1 = n_2$  зі значеннями показників 1/2, 1 або 2 [9—13], відомі також варіанти з  $n_1 \neq n_2$  [8].

**Верифікація критеріїв зрушення.** На основі розвинутої в [6] моделі зони передруйнування виконаємо верифікацію критерію (6) зрушення міжфазної тріщини у квазікрихкому з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла шляхом вибору показників  $n_1$ ,  $n_2$ , які забезпечують узгодження передбачень моделі з результатами експериментального дослідження [13] міцності адгезійного з'єднання двох різномірних пластин з тріщиною на межі розділу в умовах змішаних мод зовнішнього навантаження. З'єднуваними матеріалами слугували низьковуглецева сталь і загартоване скло з пружними характеристиками  $E_1 = 210$  ГПа,  $\nu_1 = 0,3$  та  $E_2 = 70$  ГПа,  $\nu_2 = 0,23$  відповідно. З'єднання виконано за допомогою адгезиву Araldite 2020, який має такі характеристики міцності на розрив і зсув:  $\sigma_0 = 25$  МПа,  $\tau_0 = 15$  МПа [13]. Руйнівні експерименти здійснювали за схемою одноконсольного згинання (рис. 2) з геометричними параметрами зразків:  $t_1 = 4$  мм,  $t_2 = 12$  мм,  $t_3 = 0,2$  мм; ширина зразків  $b = 20$  мм.

Зовнішні зусилля величиною  $P$  діяли нормально посередині верхньої (сталеві) пластини. У ході експериментів з вказаними зразками для адгезиву Araldite 2020 визначено граничне навантаження  $P_c = 254 \pm 21$  Н і в'язкість руйнування  $G_{1c} = 50$  Дж/м<sup>2</sup>,  $G_{2c} = 100$  Дж/м<sup>2</sup> для мод I і II відповідно.

Коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини міжфазної тріщини в описаній схемі визначається за формулами [18]

$$\begin{aligned} K &= K_1 + iK_2, \\ K_1 &= \sqrt{2/H} \cosh(\pi\omega) [-N_c \sqrt{c_1} \sin \Omega + M_c \sqrt{c_2} \cos(\Omega + \Gamma)], \\ K_2 &= \sqrt{2/H} \cosh(\pi\omega) [N_c \sqrt{c_1} \cos \Omega + M_c \sqrt{c_2} \sin(\Omega + \Gamma)], \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$H = \frac{2}{E'_1} + \frac{2}{E'_2}, \quad E'_1 = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}, \quad E'_2 = \frac{E_2}{1-\nu_2^2},$$

$$N_c = a_{12}M, \quad M_c = \left(1 + \frac{a_{12}t_1}{2} - a_{22}\right)M, \quad M = \frac{Pa}{2b},$$

$$a_{12} = E'_1 t_1 \left( B' - \frac{D' t_2}{2} \right), \quad a_{22} = D_1 D',$$

$$B' = -\frac{B_{11}}{\Delta}, \quad D' = \frac{A_{11}}{\Delta}, \quad D_1 = \frac{E'_1 t_1^3}{12}, \quad \Delta = A_{11} D_{11} - B_{11}^2,$$

$$A_{11} = E'_1 t_1 + E'_2 t_2, \quad B_{11} = \frac{(E'_2 - E'_1) t_1 t_2}{2}, \quad D_{11} = \frac{E'_1 t_1 (t_1^2 + 3t_2^2) + E'_2 t_2 (t_2^2 + 3t_1^2)}{12},$$

$$c_1 = \frac{4}{E'_1 t_1} + \frac{4}{E'_2 t_2}, \quad c_2 = \frac{12}{E'_1 t_1^3} + \frac{12}{E'_2 t_2^3}, \quad c_{12} = \frac{6}{E'_2 t_2^2} - \frac{6}{E'_1 t_1^2}, \quad \Gamma = \arcsin \frac{c_{12}}{\sqrt{c_1 c_2}},$$

$a = 70$  мм — довжина тріщини,  $\Omega = -5,33^\circ$  — параметр змішування мод, розрахований за методикою [17]. У [18] також визначено компоненти швидкості вивільнення енергії  $G_1^{el}$ ,  $G_2^{el}$ :

$$G_1^{el} = \frac{1}{2} [-N_c \sqrt{c_1} \sin \Omega + M_c \sqrt{c_2} \cos(\Omega + \Gamma)]^2,$$

$$G_2^{el} = \frac{1}{2} [N_c \sqrt{c_1} \cos \Omega + M_c \sqrt{c_2} \sin(\Omega + \Gamma)]^2. \quad (8)$$

Адгезив Araldite 2020 належить до матеріалів, які руйнуються за квазікрихким механізмом, оскільки для нього опір відриву ( $\sigma_0 = 25$  МПа) і опір зсуву ( $\tau_0 = 15$  МПа) мають значення одного порядку величини. При цьому, як показують розрахунки за формулами (3), (4) описаної вище моделі зони передруйнування, виконується покладена в основу моделі вимога маломасштабності зони ( $l \ll a$ ), що обґрунтовує можливість її застосування до аналізу досліджуваного експерименту.

Покладаючи, що масштабний параметр  $L$  дорівнює товщині найтоншої (сталеві) пластини ( $L = t_1$ ), за формулами (5) розраховуємо компоненти швидкості вивільнення енергії  $G_1^{pz}$ ,  $G_2^{pz}$ , обумовлені утворенням зони передруйнування. Підсумовуючи їх з відповідними компонентами швидкості вивільнення енергії (8), знаходимо їхні повні значення для І і II мод  $G_{1(2)} = G_{1(2)}^{el} + G_{1(2)}^{pz}$ .

Для розрахунку граничного навантаження, що відповідає зрушенню тріщини, використаємо умову (6) з  $n_1 = n_2 \equiv n$ , подавши її у вигляді

$$F(n, P) = 1, \quad F(n, P) = \left( \frac{G_1(P)}{G_{1c}} \right)^n + \left( \frac{G_2(P)}{G_{2c}} \right)^n. \quad (9)$$

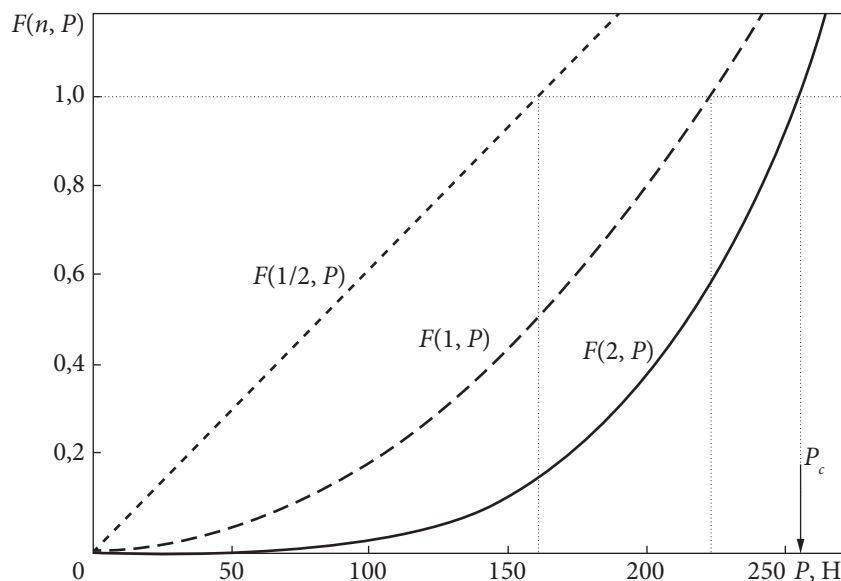


Рис. 3. Залежність критеріальної функції  $F(n, P)$  від навантаження  $P$

Результати розрахунків залежності функції  $F(n, P)$  від навантаження  $P$  для  $n = 1/2, 1, 2$  наведено на рис. 3.

Згідно з рис. 3, граничне значення  $F(n, P_c) = 1$  у разі використання адгезиву Araldite 2020 для  $n = 1/2, 1, 2$  досягається за навантажень  $P_c = 160,7$  Н,  $222,2$  Н і  $254,4$  Н відповідно. Найкраще узгодження з експериментальним значенням руйнівного навантаження  $P_c = 254 \pm 21$  Н дає квадратичний критерій

$\left(\frac{G_1}{G_{1c}}\right)^2 + \left(\frac{G_2}{G_{2c}}\right)^2 = 1$ . Дотримання ж

використаного в [13] лінійного критерію ( $n = 1$ ) у рамках описаної вище моделі призводить до похибки 12,6 %.

**Висновки.** На конкретному прикладі експериментального дослідження руйнування адгезивного з'єднання продемонстровано процедуру і перспективи застосування аналітичної моделі зони передруйнування в квазікрихкому з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною для передбачення граничних навантажень. Переваги пропонованого методу визначення параметрів граничного стану надають: 1) достатність використання простих і доступних комп'ютерних математичних програм без залучення важких програмних засобів скінченно-елементного аналізу; 2) наявність широкої бази матеріальних сталей для складових частин композиційного з'єднання, що усуває потребу в складних експериментах для їх визначення; 3) придатність застосування розрахункових трансцендентних рівнянь і формул моделі до різних конфігурацій тіла і навантаження, заданих лише коефіцієнтами інтенсивності напружень в околі вершини тріщини. Це вигідно вирізняє пропонований метод від аналізованого та інших досліджень, які ґрунтуються на моделі когезійної зони і потребують складних опосередкованих експериментальних вимірювань модельних параметрів.

Використовуючи енергетичний критерій степеневого типу з відношеннями швидкостей вивільнення енергії для різних мод навантаження до їхніх граничних значень як

критеріальних параметрів, у межах запропонованої аналітичної моделі виконано верифікацію критерію з різними значеннями степенів. Встановлено, що найкращу узгодженість з результатами аналізованого експериментального дослідження забезпечує квадратичний критерій руйнування.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Hills D.A., Barber J.R. Interface cracks. *Int. J. Mech. Sci.* 1993. **35**, № 1. P. 27—37. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(93\)90062-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7403(93)90062-Y)
2. Guz A.N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 1. P. 1—57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
3. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of materials under compression along cracks. *Advanced Structured Materials*. Vol. 138. Cham: Springer, 2020. 490 p.
4. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M., Kipnis A.L. Critical loads for a piecewise-homogeneous half-plane of different hyperelastic materials under compression along the interface sliding zone. *Arch. Appl. Mech.* 2025. **95**. 213. <https://doi.org/10.1007/s00419-025-02925-1>
5. Kaminsky A., Dudyk M., Reshitnyk Yu., Chornoivan Y. An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. *Int. J. Solids Struct.* 2023. **267**. 112117. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112117>
6. Kaminsky A.A., Dudyk M.V., Chornoivan Y.O. An analytical solution for the interface crack in a quasi-brittle bonding material. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2025. **48**. P. 2995—3006. <https://doi.org/10.1111/ffe.14655>
7. Kaminsky A.A., Dudyk M.V., Chornoivan Y.O. An analytical evaluation of *T*-stress influence in the process zone modelling for the interface crack kinking. *Int. J. Fract.* 2026. **250**. 22. <https://doi.org/10.1007/s10704-026-00916-z>
8. Reeder J.R. An evaluation of mixed-mode delamination failure criteria. NASA Technical Memorandum 104210. Hampton, Virginia: NASA Langley Research Center. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19920009705>. (Дата звернення 15.05.2026).
9. Lee M.J., Cho T.M., Kim W.S., Lee B.C., Lee J.J. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2010. **30**, № 5. P. 322—328. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005>
10. Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sanches-Arce I.J., Madani K., Prakash C. Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using *J*-integral concepts. *Processes*. 2022. **10**, № 12. 2730. <https://doi.org/10.3390/pr10122730>
11. Paggi M., Reinoso J. Revisiting the problem of a crack impinging on an interface: a modeling framework for the interaction between the phase field approach for brittle fracture and the interface cohesive zone model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2017. **321**. P. 145—172. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.04.004>
12. Suzuki T., Matsuzaki R., Todoroki A., Mizutani Y. Crack growth analysis of a composite/adhesive interface toughened by in-mold surface preparation. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2013. **42**. P. 36—43. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.01.008>
13. Katsivalis I., Thomsen O.T., Feih S., Achintha M. Development of cohesive zone models for the prediction of damage and failure of glass/steel adhesive joints. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2020. **97**. 102479. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2019.102479>
14. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *J. Appl. Mech.* 1965. **32**, № 2. P. 418—423. <https://doi.org/10.1115/1.3625816>
15. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.* 1988. **55**, № 3. P. 98—103. <https://doi.org/10.1115/1.3173668>
16. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. St. Petersburg: B.E. Vedeneev VNIIG Publ. House, 2001. 144 p.
17. Davidson B.D., Hu H., Schapery R.A. An analytical crack-tip element for layered elastic structures. *J. Appl. Mech.* 1995. **62**, № 2. P. 294—305. <https://doi.org/10.1115/1.2895931>
18. Davidson B.D., Sundararaman V. A single leg bending test for interfacial fracture toughness determination. *Int. J. Fract.* 1996. **78**. P. 193—210. <https://doi.org/10.1007/bf00034525>
19. Davidson B.D., Gharibian S.J., Yu L. Evaluation of energy release rate-based approaches for predicting delamination growth in laminated composites. *Int. J. Fract.* 2000. **105**. P. 343—365. <https://doi.org/10.1023/A:1007647226760>

20. He M.-Y., Hutchinson J.W. Kinking of a crack out of an interface. *J. Appl. Mech.* 1989. **56**, № 2. P. 270—278. <https://doi.org/10.1115/1.3176078>
21. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. *Int. J. Fract.* 1990. **43**, № 1. P. 1—18. <https://doi.org/10.1007/BF00018123>
22. Tsokanas P., Loutas T. Hygrothermal effect on the strain energy release rates and mode mixity of asymmetric delaminations between generally layered beams. *Eng. Fract. Mech.* 2019. **214**. P. 390—409. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.03.006>
23. Valvo P.S. On the calculation of energy release rate and mode mixity in delaminated laminated beams. *Eng. Fract. Mech.* 2016. **165**. P. 114—139. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.08.010>
24. Wang J., Qiao P. Interface crack between two shear deformable elastic layers. *J. Mech. Phys. Solids*. 2004. **52**, № 4. P. 891—905. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00121-2](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00121-2)
25. Wang J., Zhang C. Energy release rate and phase angle of delamination in sandwich beams and symmetric adhesively bonded joints. *Int. J. Solids Struct.* 2009. **46**. P. 4409—4418. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.003>

Надійшла до редакції 01.06.2026

## REFERENCES

1. Hills, D. A. & Barber, J. R. (1993). Interface cracks. *Int. J. Mech. Sci.*, 35, No. 1, pp. 27-37. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(93\)90062-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7403(93)90062-Y)
2. Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (Review). *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 1, pp. 1-57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
3. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). Fracture of materials under compression along cracks. *Advanced Structured Materials*, vol. 138. Cham: Springer.
4. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. & Kipnis, A. L. (2025). Critical loads for a piecewise-homogeneous half-plane of different hyperelastic materials under compression along the interface sliding zone. *Arch. Appl. Mech.*, 95, 213. <https://doi.org/10.1007/s00419-025-02925-1>
5. Kaminsky, A., Dudyk, M., Reshitnyk, Yu. & Chornoivan Y. (2023). An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. *Int. J. Solids Struct.*, 267, No. 112117. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112117>
6. Kaminsky, A. A., Dudyk, M. V. & Chornoivan, Y. O. (2025). An analytical solution for the interface crack in a quasi-brittle bonding material. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 48, pp. 2995-3006. <https://doi.org/10.1111/ffe.14655>
7. Kaminsky, A. A., Dudyk, M. V. & Chornoivan, Y. O. (2026). An analytical evaluation of  $T$ -stress influence in the process zone modelling for the interface crack kinking. *Int. J. Fract.* 250, 22. <https://doi.org/10.1007/s10704-026-00916-z>
8. Reeder, J. R. (1992). An evaluation of mixed-mode delamination failure criteria. NASA Technical Memorandum 104210. Hampton, Virginia: NASA Langley Research Center. Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/citations/19920009705>
9. Lee, M. J., Cho, T. M., Kim, W. S., Lee, B. C. & Lee, J. J. (2010). Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 30, No. 5, pp. 322-328. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005>
10. Neves, L. F. R., Campilho, R. D. S. G., Sanches-Arce, I. J., Madani, K. & Prakash, C. (2022). Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts. *Processes*, 10, No. 12, 2730. <https://doi.org/10.3390/pr10122730>
11. Paggi, M. & Reinoso, J. (2017). Revisiting the problem of a crack impinging on an interface: a modeling framework for the interaction between the phase field approach for brittle fracture and the interface cohesive zone model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 321, pp. 145-172. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.04.004>
12. Suzuki, T., Matsuzaki, R., Todoroki, A. & Mizutani, Y. (2013). Crack growth analysis of a composite/adhesive interface toughened by in-mold surface preparation. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 42, pp. 36-43. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.01.008>
13. Katsivalis, I., Thomsen, O. T., Feih, S. & Achintha, M. (2020). Development of cohesive zone models for the prediction of damage and failure of glass/steel adhesive joints. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 97, 102479. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2019.102479>

14. Rice, J. R. & Sih, G. C. (1965). Plane problems of cracks in dissimilar media. *J. Appl. Mech.*, 32, No. 2, pp. 418-423. <https://doi.org/10.1115/1.3625816>
15. Rice, J. R. (1988). Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.*, 55, No. 3. P. 98-103. <https://doi.org/10.1115/1.3173668>
16. Khrapkov, A. A. (2001). Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. St. Petersburg: B.E. Vedeneev VNIIG Publishing House.
17. Davidson, B. D., Hu, H. & Schapery, R. A. (1995). An analytical crack-tip element for layered elastic structures. *J. Appl. Mech.*, 62, No. 2, pp. 294-305. <https://doi.org/10.1115/1.2895931>
18. Davidson, B. D. & Sundararaman, V. (1996). A single leg bending test for interfacial fracture toughness determination. *Int. J. Fract.*, 78, pp. 193-210. <https://doi.org/10.1007/bf00034525>
19. Davidson, B. D., Gharibian, S. J. & Yu, L. (2000). Evaluation of energy release rate-based approaches for predicting delamination growth in laminated composites. *Int. J. Fract.*, 105, pp. 343-365. <https://doi.org/10.1023/A:1007647226760>
20. He, M.-Y. & Hutchinson, J. W. (1989). Kinking of a crack out of an interface. *J. Appl. Mech.*, 56, No. 2, pp. 270-278. <https://doi.org/10.1115/1.3176078>
21. Suo, Z. & Hutchinson, J. W. (1990). Interface crack between two elastic layers. *Int. J. Fract.*, 43, No. 1, pp. 1-18. <https://doi.org/10.1007/BF00018123>
22. Tsokanas, P. & Loutas, T. (2019). Hygrothermal effect on the strain energy release rates and mode mixity of asymmetric delaminations between generally layered beams. *Eng. Fract. Mech.*, 214, pp. 390-409. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.03.006>
23. Valvo, P. S. (2016). On the calculation of energy release rate and mode mixity in delaminated laminated beams. *Eng. Fract. Mech.*, 165, pp. 114-139. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.08.010>
24. Wang, J. & Qiao, P. (2004). Interface crack between two shear deformable elastic layers. *J. Mech. Phys. Solids*, 52, No. 4, pp. 891-905. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00121-2](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00121-2)
25. Wang, J. & Zhang, C. (2009). Energy release rate and phase angle of delamination in sandwich beams and symmetric adhesively bonded joints. *Int. J. Solids Struct.*, 46, pp. 4409-4418. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.003>

Received 01.06.2026

A.A. Kaminsky<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0000-9989-6887>

M. V. Dudyk<sup>1,2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-1399-6367>

<sup>1</sup> S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

<sup>2</sup> Uman State National University, Uman, Ukraine

E-mail: fract@inmech.kiev.ua, dudyk\_m@hotmail.com

#### ON CRACK INITIATION CRITERIA FOR AN INTERFACIAL CRACK IN A QUASI-BRITTLE MATERIAL

The problem of the choice of fracture criteria for piecewise homogeneous bodies with interfacial cracks is considered. Using an analytical model of a fracture process zone in a bonding material with a quasi-brittle failure mechanism near the tip of an interfacial crack under plane strain conditions, energy-based criteria for the onset of crack propagation along the interface were verified. The fracture process zone was modeled as a displacement discontinuity line on which a von Mises–Hill-type strength criterion is satisfied. Based on the exact analytical solution of the corresponding boundary value problem obtained by means of the Wiener–Hopf method, an algorithm for evaluating the conditions of interfacial crack initiation is described. The proposed algorithm is characterized by simplicity of practical implementation, does not require the use of complex finite element analysis software or special experiments for determining material parameters, and remains applicable to a wide range of body configurations and loading conditions. The investigated criterion parameters were represented by sums of power-law functions of the ratios of the energy release rates for different loading modes to their corresponding critical values. The verification of the interfacial crack initiation criteria was carried out using one of the basic experiments employed for evaluating the fracture toughness of building structures, for which it was established that the best agreement with the experimental data is provided by the quadratic fracture criterion.

**Keywords:** crack initiation criteria; interfacial crack; fracture process zone; quasi-brittle failure mechanism; von Mises–Hill strength criterion.