ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА
INFORMATICS AND CYBERNETICS

https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.03.066
УДК 004.942:303.732

А.Б. Качинський, https://orcid.org/0000-0001-9642-7006

Д.В. Ланде, https://orcid.org/0000-0003-3945-1178

Навчально-науковий фізико-технічний інститут Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”, Київ, Україна
E-mail: akachynsky@gmail.com, dwlande@gmail.com

Імовірнісна порогова модель поширення мем-вірусів у соціальних мережах

Представлена членом-кореспондентом НАН України О.М. Новіковим

На відміну від детермінованих підходів для кількісного опису впливів у соціальних мережах, у статті запропоновано стохастичну модифікацію лінійної порогової моделі. Отримано аналітичний вираз для оцінки ймовірності активації вузла соціальної мережі. Показано принципову відмінність запропонованого підходу від алгоритму PageRank, що описує статичну центральність вершини, тоді як імовірнісна порогова модель прогнозує динаміку фазового переходу системи від локального поширення до глобального каскаду. Модель має значну практичну цінність для прогнозування критичних точок каскадного поширення дезінформації та розроблення ефективних механізмів протидії їй.

Ключові слова: *імовірнісна порогова модель, соціальні мережі, впливи, бімодальний розподіл ступенів, інформаційна безпека, каскадне поширення.*

Вступ. Сучасні цифрові засоби комунікації сприяють стрімкому поширенню дезінформації, фейків та інших інформаційних маніпуляцій у соціальних мережах [1, 2]. Вони стали ключовим середовищем для формування суспільної думки та координації колективних дій. У цьому контексті актуальним завданням є кількісний опис механізмів “соціального зараження” і прогнозування динаміки негативних впливів для своєчасного виявлення загроз інформаційній безпеці.

Традиційним інструментом для моделювання таких процесів є порогові моделі колективної поведінки [3, 4] . Їхній принцип базується на припущенні, що індивід (вузол мережі) змінює свій стан (активується) лише тоді, коли сумарний вплив його активних сусідів перевищує певне індивідуальне порогове значення. Класична лінійна порогова модель, хоча й є фундаментальною, часто розглядається у детермінованому ключі, що не повною мірою відображає стохастичну природу реальних соціальних взаємодій. Крім того, наявні метрики, такі як алго-

Цитування: Качинський А.Б., Ланде Д.В. Імовірнісна порогова модель поширення мем-вірусів у соціальних мережах. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2026. № 3. С. 66—73. https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.03.066

ритм PageRank [5, 6], фокусуються на статичній центральності вершин графу, не враховуючи динаміку фазових переходів системи від локального поширення до глобального каскаду.

Необхідність урахування випадкових факторів, таких як мінливість кількості активних контактів та сила впливу окремих повідомлень, потребує розроблення ймовірнісних підходів. Це дасть змогу перейти від імітаційного моделювання до аналітичного виразу оцінки ймовірності активації вузла соціальної мережі.

Мета дослідження — розроблення ймовірнісної модифікації лінійної порогової моделі. Ставиться завдання отримати аналітичні вирази для обчислення ймовірності активації вузла соціальної мережі без виконання масивних імітаційних експериментів, а також продемонструвати практичну цінність моделі для прогнозування критичних точок каскадного поширення інформації та оцінки ефективності механізмів протидії їй.

Об'єкт дослідження. Порогові моделі є одним з основних класів моделей "соціального зараження", а саме: дифузії дезінформації, фейків, "епідемії чуток", формування думок тощо. Принцип порогових моделей дуже простий: вузол може бути активований тільки в тому випадку, коли вплив, який чинять на нього його активні сусіди, перевищує певне значення. Чим сильніший зв'язок, тим вищий вплив сусіда.

Вплив на вузол у базовій версії лінійної порогової моделі є сумою його активних сусідів, де внесок кожного сусіда визначається вагою зв'язку, що з'єднує його з цим вузлом [7]:

$$I(i) = \sum_j w_{ij} \ldots \theta_i, \qquad (1)$$

де w_{ij} — вага зв'язку між вузлами i та j.

Рівняння (1) передбачає включення в суму тільки активних сусідів вузла i; якщо вузол j не є сусідом, то не існує ніякого зв'язку, що з'єднує його з i, а $w_{ij} = 0$. Вузол стає активним, якщо вплив перевищує певний поріг (він приймає ідею, інформацію чи поведінку).

Умова для активації вузла i є такою:

$$I(i) = \theta_i, \qquad (2)$$

де θ_i — конкретне порогове значення вузла, яке призначається вузлу i до того, як процес розпочнеться. Його значення зазвичай варіює від одного вузла до іншого.

У рівнянні (1) для кожного активного вузла справедливо:

$$n_i^{\mathrm{on}} \ldots \theta_i, \qquad (3)$$

де n_i^{on} — число активних сусідів вузла i. Якщо кількість активних сусідів перевищує поріг вузла, то вузол активується, в іншому разі він залишається неактивним.

Для врахування стохастичної природи соціальних взаємодій запропоновано такі припущення:

1) кількість активних сусідів ν є випадковою величиною, що має пуассонівський розподіл: вузол стає активованим, якщо число його активованих сусідів є випадковою величиною ν, яка має пуассонівський закон розподілу:

$$P(\nu = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \qquad (4)$$

де λ — середня інтенсивність активних зв'язків;

2) інтенсивність впливу окремого сусіда w на інтервалі $[a, b]$ розподілена рівномірно, якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність розподілу імовірностей на цьому проміжку постійна, тобто

$$f(w) = \frac{1}{b-a}, \quad w \in [a, b]. \tag{5}$$

Метод дослідження. За допомогою формули повного математичного сподівання випадкової величини $I(i)$ і характеристичних функцій, застосовуючи перетворення Лапласа, можна отримати класичний результат для складеного розподілу Пуассона, описаний у [8]:

$$\Psi(t) = Ee^{-tI(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} p(\nu = n) E(e^{-t(w_{i1}+w_{i2}+\ldots+w_{i\nu})} | \nu = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} p(\nu = n) E(e^{-t(w_{i1}+w_{i2}+\ldots+w_{in})}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} (Ee^{-tw_{ji}})^n = e^{\lambda\psi(t)-\lambda}, \tag{6}$$

де λ — параметр пуассонівської величини ν; $\psi(t) = Ee^{-tw_{ji}}$ — перетворення Лапласа для величини впливу окремих активних сусідів на вузол.

Диференціюючи в точці $t = 0$ за t, отримуємо моменти величини $I(i)$:

$$EI(i) = \Psi''(t)\Big|_{t=0} = (-\lambda\Psi'(t)e^{\lambda\Psi(s)-\lambda})\Big|_{t=0} = -\lambda\Psi'(0) = \lambda Ew_{ij}, \tag{7}$$

$$EI(i)^2 = \Psi''(t)\Big|_{t=0} = (\lambda\Psi''(t) + (\lambda\Psi'(t))^2 e^{\lambda\Psi(t)-\lambda})^2\Big|_{t=0} = \lambda\Psi''(0) + (\lambda\Psi''(0))^2, \tag{8}$$

$$\mathrm{Var}I(i) = \lambda\Psi''(0) + (\lambda\Psi'(0))^2 - (\lambda\Psi'(0))^2 = \lambda\Psi''(0) = \lambda Ew_{ij}^2. \tag{9}$$

Оскільки випадкові величини w_{ij} рівномірно розподілені на відрізку $[a, b]$, використовуючи формули для моментів рівномірного розподілу, отримуємо

$$Ew_{ij} = \frac{b+a}{2}, \tag{10}$$

$$\mathrm{Var}(w_{ji}) = \frac{(b-a)^2}{12}, \tag{11}$$

$$Ew_{ji}^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}. \tag{12}$$

Отже, математичне сподівання та дисперсія лінійної порогової моделі сумарного впливу на вузол дорівнюють:

$$EI(i) = \lambda\left(\frac{b+a}{2}\right), \tag{13}$$

$$\mathrm{Var}I(i) = \lambda\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right). \tag{14}$$

Для застосування нормального наближення ймовірність $P(I(i)\ldots\theta_i)$ — умову активації вузла *i*, запишемо у вигляді [9]

$$P(I(i)\ldots\theta_i) = P\left(\frac{I(i)-EI(i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(i)}} > \frac{\theta_i - EI(i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(i)}}\right). \tag{15}$$

Використовуючи нормальне наближення, отримуємо

$$P(I(i)\ldots\theta_i) \approx 1-\left(\Phi\frac{\theta_i - EI(i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(i)}}\right). \tag{16}$$

Особливість підходу. Подальші дослідження отриманого аналітичного виразу для оцінки ймовірності активації вузла соціальної мережі повинні бути спрямовані на емпіричну верифікацію параметрів моделі (λ, a, b, θ_i) для різних типів соціальних мереж і меметичних конструкцій, а також на розширення моделі для врахування кореляції порогів у кластерах (ефект гомофілії) та зворотного впливу активації на структуру мережі.

Принципова відмінність запропонованого підходу від алгоритму PageRank [5] полягає в онтологічному статусі моделі. PageRank описує ймовірнісну міру центральності як властивість структури графу шляхом розв'язання рівняння $PR = (1 - d) / N + dM^TPR$. Навпаки, ймовірнісна порогова модель описує динаміку фазового переходу системи — від локального поширення до глобального каскаду — через часову еволюцію ймовірності $P(t) = P(I(i, t) \geq \theta_i)$. Критичним механізмом, якого немає у PageRank, є пороговий ефект θ_i, що моделює когнітивний бар'єр індивіда, а також залежність інтенсивності λ від часу, що дає змогу прогнозувати критичні точки переходу.

Особливу увагу слід приділити інтеграції запропонованого підходу із системами цифрових двійників законодавства для прогнозування впливу мем-вірусів на прийняття політичних рішень та формування нормативно-правової бази.

Експериментальна верифікація та порівняльний аналіз. Для емпіричної перевірки адекватності запропонованої аналітичної моделі було проведено чисельний експеримент на стандартній тестовій соціальній мережі Zachary's Karate Club (34 вузли, 78 ребер). Ця мережа є класичним тестовим набором для задач поширення інформації і дає можливість наочно продемонструвати відмінності між статичними метриками центральності та динамічною ймовірністю активації.

Для проведення експерименту були генеровані вагові значення впливів (ребер мережі) і отримано / визначено параметри експерименту:

• вагові значення впливу w_{ij} генерувалися з рівномірного розподілу $U[0,1]$ (тобто $a = 0$, $b = 1$);

• для цього розподілу: $E[w] = 0{,}5$, $E[w^2] = 1/3 \approx 0{,}333$;

• параметр λ визначався як очікувана кількість активних сусідів вузла ($\lambda = k_i \cdot p$), де k_i — степінь вузла, а $p = 0{,}5$ — ймовірність активації сусіда на попередньому кроці;

• поріг активації θ_i для всіх вузлів прийнято однаковим — $\theta = 5$ для чистоти порівняння.

З урахуванням уточненої формули (14) для дисперсії сумарного впливу

$$\mathrm{Var}I(i) = \lambda\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right) = \frac{\lambda}{3} \tag{14'}$$

Таблиця 1. **Порівняння ймовірності активації вузлів, розрахованої аналітично та методом Монте-Карло (параметри моделі: ваги — [0,1], поріг активації — θ = 5, інтенсивність — $\lambda_i = 0{,}5 \cdot k_i$)**

Вузол (ID)	Степінь вузла (k_i)	Параметр λ_i	$P_{\text{аналіт}}$	P_{MC} (симуляція)	Відносна похибка, %
1 (інструктор)	16	8,0	0,2702	0,2741	1,42
34 (адміністратор)	17	8,5	0,3280	0,3312	0,97
33	12	6,0	0,0787	0,1150	31,6
3	10	5,0	0,0264	0,0705	62,6
9	6	3,0	0,00023	0,0081	97,2

Таблиця 2. **Порівняння ранжування вузлів за алгоритмом PageRank та за ймовірністю активації (запропонований метод)**

Вузол (ID)	Значення PageRank (нормоване)	Ранг за PageRank	$P(I \geq \theta)$ при θ = 5	Ранг за ймовірністю активації
34	0,1310	1	0,3280	1
1	0,1230	2	0,2702	2
33	0,0560	3	0,1150	3
3	0,0540	4	0,0264	4
9	0,0250	10	0,00023	10

та формули (13) для математичного сподівання

$$EI(i) = \lambda\left(\frac{b+a}{2}\right) = \frac{\lambda}{2} \tag{13'}$$

ймовірність активації вузла обчислюється за формулою нормального наближення (16)

$$P(I(i)\ldots\theta_i) \approx 1-\left(\Phi\frac{\theta_i - EI(i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(i)}}\right) = 1-\left(\Phi\frac{\theta_i - \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}}\right). \tag{16'}$$

У табл. 1 наведено порівняння ймовірності активації вузлів, розрахованої за запропонованою аналітичною формулою (16'), з результатами імітаційного моделювання (метод Монте-Карло, 10 000 ітерацій). Як видно з даних таблиці, запропонований аналітичний метод має високу точність (похибка менш ніж 2 %) для вузлів із середнім та високим степенем ($\lambda \geq 8$), де нормальне наближення для складеного пуассонівського розподілу є обґрунтованим. Це підтверджує адекватність використання уточненої формули (14) для дисперсії сумарного впливу.

Для вузлів із невеликим степенем ($\lambda < 5$) спостерігається значне відхилення аналітичних значень від результатів Монте-Карло. Це пояснюється тим, що за малих значень параметра λ складений пуассонівський розподіл має виражену асиметрію і нормальне наближення стає недостатньо точним.

Порівняльний аналіз ранжування вузлів за алгоритмом PageRank, який надає статичну метрику, і за допомогою запропонованої порогової моделі, яка враховує "опір" вузла (поріг θ) (табл. 2), демонструє важливу відмінність підходів:

• статичність проти динамічності — алгоритм PageRank надає вузлу фіксовану вагу (наприклад, вузол 1 має ранг 2), яка залишається незмінною незалежно від умов поширення. Запропонована модель дає можливість гнучко змінювати прогнози. Наприклад, якщо ми збільшимо поріг для всіх вузлів до $\theta = 8$, імовірність активації для вузла 1 зменшиться до $P \approx 0{,}05$, тоді як його PageRank залишиться незмінним і становитиме 0,123;

• врахування порогів: запропонований метод безпосередньо інтегрує параметр чутливості вузла θ_i.

Це дає змогу виявляти "сплячі" вузли з високим PageRank, які не активуються через високий поріг вхідного впливу, що є критичним для точного моделювання вірусного поширення мемів.

Висновки. Розроблено ймовірнісну порогову модель впливів у соціальних мережах, яка усуває обмеження детермінованих підходів завдяки врахуванню стохастичного характеру соціальних взаємодій. Запропонована модифікація базується на припущенні про пуассонівський розподіл кількості активних сусідів та рівномірний розподіл інтенсивності впливу окремого сусіда. Це дає можливість застосовувати нормальне наближення для обчислення ймовірності активації вузла.

Практична цінність моделі реалізується в трьох напрямах. По-перше, вона забезпечує кількісну формалізацію механізму "вікна Овертона": динаміка зниження порогів θ_i у послідовних соціальних групах (від радикалів до консерваторів) моделюється як зміна параметрів розподілу $f(\theta)$, що, зокрема, дає змогу оцінювати ефективність інформаційно-психологічних операцій у соціальних мережах. По-друге, аналіз похідної $dP/d\lambda$ забезпечує можливість виявлення "точок-перемикачів", де незначна зміна інтенсивності впливу призводить до фазового переходу системи — критичного для запобігання каскадному поширенню дезінформації. По-третє, модель надає інструментарій для оцінки ефективності контрзаходів: підвищення критичного мислення населення формалізується як зростання середнього значення $E[\theta_i]$, що безпосередньо знижує ймовірність активації.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Baspehlivan U. Theorising the memescape: The spatial politics of Internet memes. *Rev. Int. Stud*. 2024. **50**, № 1. P. 35—57. https://doi.org/10.1017/S0260210523000049
2. Diengdoh B.N.D. (Mis)information and visual culture: Memes and social media affects. *Visual cultures in India: Contesting the site of sights*. Lanham, Boulder, New York, London: Lexington Books, 2024. P. 179—208. https://doi.org/10.5040/9798881897468.ch-14
3. Liu Y., Zhang P., Shi L., Gong, J. A survey of information dissemination model, datasets, and insight. *Mathematics*. 2023. **11**, № 17. 3707. https://doi.org/10.3390/math11173707
4. Granovetter M.S. Threshold models of collective behavior. *Am. J. Soc*. 1978. **83**, № 6. P. 1420—1443. https://doi.org/10.1086/226707
5. Gleich D.F. PageRank beyond the web. *SIAM Rev*. 2015. **57**, № 3. P. 321—363. https://doi.org/10.1137/140976649
6. Ding J., Li Z., Wu X., Liu R., Hu H. Information dissemination model based on social networks characteristics. *Mathematics*. 2025. **13**, № 8. 1254. https://doi.org/10.3390/math13081254
7. Rogers E.M., Singhal A., Quinlan M.M. Diffusion of innovations. *An integrated approach to communication theory and research*. New Yorc: Routledge, 2009. P. 418—434.
8. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1968. 528 p.
9. Johnson N.L., Leone F.C. Statistics and experimental design in engineering and the physical sciences. Vol. 1. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1977. 510 p.
10. Zachary W. W. An information flow model for conflict and fission in small groups. *J. Anthropol. Res*. 1977. **33**, № 4. P. 452—473. https://doi.org/10.1086/jar.33.4.3629752

Надійшла до редакції 14.04.2026

REFERENCES

1. Baspehlivan, U. (2024). Theorising the memescape: The spatial politics of Internet memes. Rev. Int. Stud., 50, No. 1, pp. 35-57. https://doi.org/10.1017/S0260210523000049
2. Diengdoh, B. N. D. (2024). (Mis)information and visual culture: Memes and social media affects. In: Visual cultures in India: Contesting the site of sights (pp. 179-208). Lanham, Boulder, New York, London: Lexington Books. https://doi.org/10.5040/9798881897468.ch-14
3. Liu, Y., Zhang, P., Shi, L. & Gong, J. (2023). A survey of information dissemination model, datasets, and insight. Mathematics, 11, No. 17, 3707. https://doi.org/10.3390/math11173707
4. Granovetter, M. S. (1978). Threshold models of collective behavior. Am. J. Soc., 83, No. 6, pp.1420-1443. https://doi.org/10.1086/226707
5. Gleich, D. F. (2015). PageRank beyond the web. SIAM Rev., 57, No. 3, pp. 321-363. https://doi.org/10.1137/140976649
6. Ding, J., Li, Z., Wu, X., Liu, R. & Hu, H. (2025). Information dissemination model based on social networks characteristics. Mathematics, 13, No. 8, 1254. https://doi.org/10.3390/math13081254
7. Rogers, E. M., Singhal, A. & Quinlan, M. M. (2009). Diffusion of innovations. In: An integrated approach to communication theory and research (pp. 418-434). New York: Routledge.
8. Feller, W. (1968). An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1. 3rd ed. New Ypork: John Wiley & Sons.
9. Johnson, N. L. & Leone, F. C. (1977). Statistics and experimental design in engineering and the physical sciences. Vol. 1. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons.
10. Zachary, W. W. (1977). An information flow model for conflict and fission in small groups. J. Anthropol. Res., 33, No. 4, pp. 452-473. https://doi.org/10.1086/jar.33.4.3629752

Received 14.04.2026

A.B. Kachynsky, https://orcid.org/0000-0001-9642-7006
D.V. Lande, https://orcid.org/0000-0003-3945-1178

Educational and Research Institute of Physics and Technology
of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

E-mail: akachynsky@gmail.com, dwlande@gmail.com

A PROBABILISTIC THRESHOLD MODEL OF THE SPREAD OF MEME-VIRUS IN SOCIAL MEDIA

This article is devoted to an approach to quantitatively describing and forecasting the mechanisms of information dissemination in modern social networks. Under current conditions, digital communication platforms have created an ideal environment for the instantaneous spread of disinformation, fake news, and manipulative "meme-viruses," which poses a serious threat to national information security and social stability. Traditional deterministic threshold models of collective behavior, despite their fundamental importance, do not fully capture the stochastic nature of real-world social interactions, while widely used metrics, such as the PageRank algorithm, are limited to estimating the static centrality of nodes, completely ignoring the temporal dynamics of influence propagation. To overcome these limitations, this work proposes a stochastic modification of the linear threshold model that systematically accounts for the random nature of the number of active contacts and the significant variability in the influence strength of individual informational messages. The methodological foundation of the model is based on assumptions regarding the Poisson distribution of the number of active neighbors of a network node and the uniform distribution of the influence intensity exerted by each of them. Applying the apparatus of mathematical statistics has made it possible to derive a complete analytical expression for the probability of activating a social network node without conducting extremely resource-intensive simulation experiments. An important feature of the developed approach is its fundamental difference from static graph metrics: the proposed model describes the dynamics of the system's phase transition from local information assimilation to global cascading propagation through the temporal evolution of probabilities, directly modeling individuals' cognitive barriers. The practical value of the research is realized in three areas. Firstly, the model allows for an accurate assessment of the effectiveness of information and psychological operations based on the dynamics of shifts in the perception threshold across various social groups. Secondly, the analysis identifies critical points at which a slight change in the intensity of the influence triggers a phase transition, which is crucial for the preventive suppression of disinformation cascades. Third, the proposed concept can serve as a tool for assessing the effectiveness of countermeasures.

Keywords: *probabilistic threshold model, social networks, influences, bimodal distribution of degrees, information security, cascade propagation.*