

УДК 532.5; 519

**Dmytro I. Cherniy**, PhD, Associate Professor, Principle Investigator ITGIS NASU  
*e-mail*: Dmytro.Cherniy@gmail.com

Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NASU, Kyiv, Ukraine

## METHOD OF BUILDING A MATHEMATICAL MODEL OF LAYERED FLOWS

**Abstract.** *The method of constructing mathematical models for plane-parallel layered flows is considered. Given that the flow structure implies simplification and splitting of the problem, it is shown that, for planar parallel fluxes, it is possible to construct a layered flow model in which the problem solution is constructed by the method of separating variables. It is shown that for each layer of flow it is possible to distinguish a function whose derivatives determine the velocity distribution in the layer and which can be interpreted as "flow potential in the layer". But the potential representation for the velocity field distribution in a layer has a parametric dependence on a variable that is orthogonal to the plane currents. Although there is a function that can be interpreted as the "potential" of a flow in a layer, the most common layered flow (as a whole) is not potential. Only a stream the averaged of a layer thickness can be considered as a potential flow. When constructing models, the viscosity, non-stationarity and inertia of the flow are taken into account (by taking into account nonlinear dynamic components). It is shown that the mathematical models constructed, of some cases of the stream, represent the classical solutions for layered flows.*

**Key words:** *mathematical models; layered flows*

**Д.І. Черній**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,  
м. Київ, Україна

## МЕТОД ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ШАРУВАТИХ ТЕЧІЙ

**Анотація.** *Розглянуто метод побудови математичних моделей для плоскопаралельних шаруватих течій. Враховуючи те, що структура течії припускає спрощення та розщеплення задачі, показано, що для плоскопаралельних в'язких течій можливо побудувати модель шаруватої течії, в якій розв'язок задачі будується методом відокремлення змінних. Показано, що для кожного шару течії можливо виділити функцію, похідні від якої визначають розподіл швидкостей в шарі та яка може трактуватися як «потенціал течії в шарі». Але потенціальне представлення для розподілу поля швидкостей в шарі має параметричну залежність від змінної, яка ортогональна до площини течії. Незважаючи на те, що існує функція, яка може трактуватися як «потенціал» течії в шарі, сама загальна шарувата течія (в цілому) не є потенціальною. В якості потенціальної течії можна розглядати лише течію, осереднену по товщині шару. При побудові моделей враховується в'язкість, нестационарність та інерційність течії (за рахунок врахування нелінійних динамічних складових). Показано, що побудовані математичні моделі в граничних випадках представляють класичні розв'язки для шаруватих течій.*

**Ключові слова:** *математичні моделі; шаруваті течії*

## Вступ

Найбільшу потребу в прогнозі еволюції таких процесів, як поширення забруднень на водній поверхні, масоперенос (з урахуванням забруднень) в обмежених акваторіях під впливом змін гідрологічних і атмосферних умов, відчувають служби, покликані оперативно попереджати розвиток природних і техногенних катастроф та зменшувати / запобігати їх впливу на навколишнє середовище. Таких прогнозів потребують гідрометслужби, служби із запобігання та подолання наслідків надзвичайних ситуацій, установи – проєктанти гідротехнічних споруд, мостобудівники, будівники технологічних споруд, лоцманська служба та інші. Але проблеми, які виникають в акваторіях, мають як різні причини виникнення, так і різні масштаби проявів.

Задля забезпечення роботи прогнозуючих інформаційних систем необхідно, в моделюючому модулі, застосування ефективних математичних моделей, які в реальному масштабі часу здатні враховувати домінуючі фактори процесів. При дослідженні течій в акваторіях, як правило, головний інтерес представляє швидкість, осереднена по товщині шару, а також поверхнева та придонна швидкість. При такому підході доцільно мати математичні моделі шаруватих течій, придатні для комп'ютерних моделюючих та інформаційних систем. В роботі розглянуто метод побудови математичних моделей для плоскопаралельних шаруватих течій. Мета роботи – показати, що структура моделей припускає застосування відокремлення змінних та розщеплення задачі. В побудованих нелінійних моделях враховано в'язкість, нестационарність та інерційність течії. Побудовані математичні моделі в крайніх випадках представляють класичні розв'язки для шаруватих течій.

## Постановки задач та методи досліджень

Розглядається плоскопаралельна течія, яка описується рівняннями Нав'є-Стокса (1), (2). При дослідженні течій в акваторіях, як правило, головний інтерес представляє швидкість, осереднена по товщині шару [1], а також поверхнева та придонна швидкість. При такому підході доцільно розглядати математичні моделі шаруватих течій [2, 3, 4, 5, 6].

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0. \quad (2)$$

Задача зводиться до визначення розв'язків – моделей плоскопаралельної течії в криволінійному каналі квазіпостійної глибини.

## Аналитичні розв'язки для в'язких шаруватих течій

При розгляді в'язких шаруватих нестационарних течій, паралельних площині  $OXY$ , компонента швидкості  $w$  уздовж осі  $OZ$  (перпендикулярна цій площині) вважається рівною нулю:  $w(x, y, z, t) \equiv 0$ .

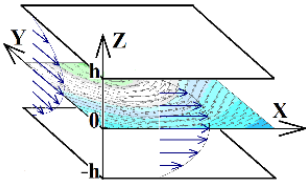


Рис. 1 – Схема шаруватої течії між двох площин

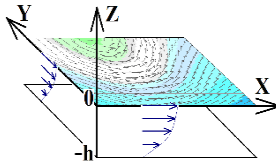


Рис. 2 – Схема шаруватої течії над площиною

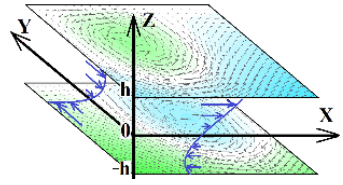


Рис. 3 – Схема плоскопаралельної шаруватої течії

У припущенні про консервативність поля зовнішніх сил вважається, що існує  $U = U(x, y, z)$ , така що  $\vec{F} = \nabla U$ . В цьому випадку рівняння (1), (2) в проекціях на осі координат записуються у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Припускається, що при будь-яких  $z$  і  $t$  існує безперервно диференційована функція  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  така, що для компоненти швидкості  $u(x, y, z, t)$  і  $v(x, y, z, t)$  справедливо:

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varphi(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \varphi(x, y, z, t). \quad (7)$$

При таких припущеннях, рівняння (3) і (4) можуть бути представлені у виді:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \right\} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \right\} = 0 \quad (9)$$

При підстановці (7) в (6) стає видно, що функція  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  є гармонійною, при будь-яких фіксованих  $z$  і  $t$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z, t)}{\partial y^2} = 0. \quad (10)$$

Тому, в силу (10), для (8) і (9) справедливо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \right\} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \right\} = 0. \quad (12)$$

В результаті, при зробленому припущенні (7), в силу (10) з рівнянь (11), (12) отримуємо інтеграл руху:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U(x, y, z) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = q(z, t). \quad (13)$$

Де деяка функція  $q(z, t)$  є залежною тільки від  $t$  при будь-якому фіксованому  $z$  і визначається з вхідних даних завдання.

Проінтегроване рівняння (5) має вигляд:

$$p = \rho U(x, y, z) + P(x, y, t). \quad (14)$$

При підстановці (15) в (14) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 \right) + \frac{P(x, y, t)}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(x, y, z, t) = q(z, t). \quad (15)$$

### Стационарні шаруваті течії

Стационарні повільні шаруваті течії (повзучі течії) [2], паралельні площині  $OXY$ , характеризуються умовою  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  та нехтуванням доданком

$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2$ , внаслідок чого (15) набуде вигляду звичайного

диференціального рівняння другого порядку (відносно похідної по  $z$ ):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(x, y, z) = \frac{P(x, y)}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} q(z). \quad (16)$$

Двічі проінтегрувавши (16) по  $z$ , отримуємо

$$\varphi(x, y, z) = \frac{z^2}{2\mu} P(x, y) + z\varphi_1(x, y) + \varphi_0(x, y) - \frac{\rho}{\mu} Q(z), \quad (17)$$

де  $\varphi_0 = \varphi_0(x, y)$  і  $\varphi_1 = \varphi_1(x, y)$  – функціональні коефіцієнти, а для останнього доданку у правій частині (7.17) справедливо:

$$q(z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} Q(z). \quad (18)$$

Для визначення в (17) значень функціональних коефіцієнтів  $\varphi_0 = \varphi_0(x, y)$  і  $\varphi_1 = \varphi_1(x, y)$  необхідно задати крайові умови: наприклад, значення функцій  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  на границях шару  $z = \pm h$   $\varphi_{\pm h} = \varphi(x, y, \pm h, t)$ , або їх похідні. Для в'язких рідин зазвичай задаються значення швидкостей на границях шару, відомі з умови прилипання на рухомих і нерухомих границях.

Будемо розглядати оператор  $\nabla_{xy}$  як діючий тільки у площині  $Oxy$ , тому компоненти вектора швидкості  $u(x, y, z)$  і  $v(x, y, z)$  представимо у вигляді похідних  $(u(x, y, z), v(x, y, z)) = \nabla_{xy}\varphi(x, y, z)$ , або інакше:

$$\vec{V}(x, y, z) = \nabla_{xy}\varphi(x, y, z). \quad (19)$$

Різні крайові умови будуть визначати функціональні коефіцієнти та різні розв'язки задач.

**Стационарна шарувата повзуча течія між двома нерухомими паралельними площинами (аналог течії Пуазейля)**

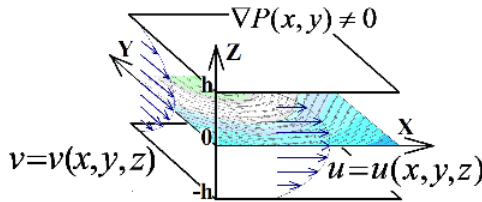


Рис. 4 – Схема шаруватої течії між двох площин

У задачі про стаціонарну шарувату повзучу течію між двома нерухомими паралельними площинами крайові умови прилипання для швидкостей визначаються, як у (19), після застосування оператора  $\nabla_{xy}$  до (17):

$$\nabla_{xy}\varphi(x, y, z) = \frac{z^2}{2\mu} \nabla_{xy}P(x, y) + z\vec{V}_1(x, y) + \vec{V}_0(x, y), \quad (20)$$

де  $\vec{V}_0$  і  $\vec{V}_1$  – векторні функції (двовимірні), не залежні від  $z$ .

$$\vec{V}_0(x, y) = \nabla_{xy}\varphi_0(x, y), \quad (21)$$

$$\vec{V}_1(x, y) = \nabla_{xy}\varphi_1(x, y). \quad (22)$$

Граничні умови прилипання на площинах, при  $z = \pm h$ :

$$(u, v)|_{z=\pm h} = \nabla_{xy}\varphi|_{z=\pm h} = (0,0). \quad (23)$$

Підстановка у (21) граничних умов (24) призводить до системи лінійних рівнянь для визначення векторних функцій  $\vec{V}_0$  і  $\vec{V}_1$  :

$$\nabla_{xy}\varphi(x, y, h) = \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy}P(x, y) + h\vec{V}_1(x, y) + \vec{V}_0(x, y) = (0,0), \quad (25)$$

$$\nabla_{xy}\varphi(x, y, -h) = \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy}P(x, y) - h\vec{V}_1(x, y) + \vec{V}_0(x, y) = (0,0). \quad (26)$$

Із системи рівнянь (7.25), (7.26) для  $\vec{V}_0$  і  $\vec{V}_1$  отримуємо вирази:

$$\vec{V}_0 = -\frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy}P(x, y) \quad (27)$$

$$\vec{V}_1 = (0,0). \quad (28)$$

Підстановка (27) і (28) у (20) надає часткове рішення, з симетричним по осі OZ профілем швидкості:

$$(u, v) = \nabla_{xy}\varphi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy}P(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right). \quad (29)$$

В силу (27) і (28), для значень функціональних коефіцієнтів  $\varphi_0 = \varphi_0(x, y)$  і  $\varphi_1 = \varphi_1(x, y)$  справедливо:

$$\varphi_0(x, y) = -\frac{h^2}{2\mu} P(x, y) + C_0 \quad (30)$$

$$\varphi_1 = C_1 = Const - \quad (31)$$

Підстановка (7.30) і (7.31) у (7.18) дає часткове рішення виду:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu} P(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + zC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(z). \quad (32)$$

Граничні умови прилипання на нерухомих площинах призводять до постійності значень потенціалу на кожній із цих площин:

$$\text{при } z = -h: \quad \varphi(x, y, -h) = -hC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(-h) = C_{-h} = Const; \quad (33)$$

$$\text{при } z = h: \quad \varphi(x, y, h) = hC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(h) = C_h = Const. \quad (34)$$

дозволяють визначити константи  $C_0$  і  $C_1$ .

$$C_0 = \frac{1}{2}(\varphi(x, y, h) + \varphi(x, y, -h)) + \frac{\rho}{2\mu}(Q(h) + Q(-h)); \quad (35)$$

$$C_1 = \frac{1}{2h}(\varphi(x, y, h) - \varphi(x, y, -h)) + \frac{\rho}{2\mu h}(Q(h) - Q(-h)). \quad (36)$$

Підстановка отриманих коефіцієнтів у (32) призводить до виразу для потенціалу

$$\phi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x, y)\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\phi(x, y, h) + \frac{\rho Q(h)}{\mu}\right)\left(1 + \frac{z}{h}\right) + \quad (37)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\phi(x, y, -h) + \frac{\rho Q(-h)}{\mu}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{\rho}{\mu}Q(z)$$

$$\text{або} \\ \phi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x, y)\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + \frac{1}{2}\left(C_h + \frac{\rho Q(h)}{\mu}\right)\left(1 + \frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(C_{-h} + \frac{\rho Q(-h)}{\mu}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{\rho}{\mu}Q(z). \quad (38)$$

З (36) видно, що коефіцієнт  $C_1$  породжує несиметрію відносно площини  $z = 0$  у виразі для потенціалу (37). При рівності постійних значень функцій  $\varphi(x, y, z)$  і  $Q(z)$  на обох границях (умова симетрії течії)

$$\varphi(x, y, h) = \varphi(x, y, -h) = C_h, \quad Q(z) = Q(-z) \quad (39)$$

для констант  $C_0$  і  $C_1$  справедливо:

$$C_0 = C_h + \frac{\rho}{\mu}Q(h), \quad C_1 = 0. \quad (40)$$

Вираз для потенціалу (39) істотно спрощується:

$$\phi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x, y)\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + C_h + \frac{\rho}{\mu}(Q(h) - Q(z)). \quad (41)$$

В силу умов симетрії (39), для екстремального (при  $z = 0$ ) значення потенціалу виходить:

$$\phi_{\max}(x, y) = \phi(x, y, 0) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x, y) + C_h + \frac{\rho}{\mu}(Q(h) - Q(0)), \quad (42)$$

або інакше

$$\phi_{\max}(x, y) = \phi(x, y, 0) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x, y) + \text{Const}_1. \quad (43)$$

Для усередненого по товщині шару значення потенціалу виходить:

$$\bar{\phi}(x, y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \phi(x, y, z) dz = -\frac{1}{2h} \int \frac{h^2}{2\mu} P(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) dz + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h Const_1 dz \quad (44)$$

$$\bar{\phi}(x, y) = -\frac{h^2}{3\mu} P(x, y) + Const_2. \quad (45)$$

Таким чином, з (43), (45) випливає, що поля швидкостей для максимального і усередненого по товщині шару відповідають течіям із заданими потенціалами (43), (45), що є класичним рішенням для течії Hele-Shaw [2].

З (29) випливає, що в шарі швидкості приймають найбільші значення при  $z = 0$

$$(u_{\max}, v_{\max}) = \nabla_{xy} \phi(x, y, 0) = -\frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y), \quad (46)$$

а осереднені по товщині шару значення швидкості

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \nabla_{xy} \phi(x, y, z) dz = -\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) dz = -\frac{h^2}{3\mu} \nabla_{xy} P(x, y). \quad (47)$$

Значення  $Const_1$  і  $Const_2$  у (43) і (45) визначаються з (7.41):

$$Const_1 = C_h + \frac{\rho}{\mu} (Q(h) - Q(0)) \quad (48)$$

$$Const_2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left( C_h + \frac{\rho}{\mu} (Q(h) - Q(z)) \right) dz. \quad (49)$$

**Стационарна шарувата повзуча течія між двома паралельними площинами. Течія викликається рухом дотичних швидкостей в площині однієї з меж (аналог течії Куета) і заданим градієнтом тиску в площині течії**

Задача про знаходження рішення для шаруватої повзучої течії над нерухомою площиною, із заданим розподілом дотичних швидкостей на верхній межі при заданому градієнті тиску  $\nabla P(x, y) \neq 0$  (рис. 2), зводиться до знаходження функціональних коефіцієнтів  $\varphi_0(x, y)$ ,  $\varphi_1(x, y)$ , для функції  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , представленої у вигляді (17), з граничними умовами прилипання до нерухомої і рухомої границь – паралельним площинам (при  $z = 0$  і при  $z = h$ , рис. 2).

Вираз для швидкостей в шарі визначається через похідні від представлення (17) і має вигляд:

$$\nabla_{xy} \varphi(x, y, z) = \frac{z^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y) + z \vec{V}_1(x, y) + \vec{V}_0(x, y), \quad (50)$$

з умовами прилипання:



$$(u, v)|_{z=0} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, 0) = (0, 0) \text{ при } z = 0, \quad (51)$$

$$(u, v)|_{z=h} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, h) = \vec{V}_h(x, y) \text{ при } z = h. \quad (52)$$

При підстановці в (50) в крайові умови (51) і (52) отримуємо систему лінійних рівнянь щодо визначення  $\vec{V}_1$  і  $\vec{V}_0$  векторних функцій:

$$\vec{V}_0 = (0, 0), \quad \text{при } z = 0; \quad (53)$$

$$\frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P + h\vec{V}_1 + \vec{V}_0 = \vec{V}_h(x, y), \text{ при } z = h. \quad (54)$$

Рішення для векторних функцій  $\vec{V}_0$  і  $\vec{V}_1$  має вигляд:

$$\vec{V}_0 = (0, 0), \quad (55)$$

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{h} (\vec{V}_h(x, y) - \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y)). \quad (56)$$

При підстановці отриманих векторних функцій  $\vec{V}_0$  і  $\vec{V}_1$  в (50) маємо розв'язок вигляду

$$(u, v) = \nabla_{xy} \varphi(x, y, z) = \frac{z}{h} \vec{V}_h(x, y) - \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y) \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (57)$$

У випадку, коли поле швидкостей  $\vec{V}_h(x, y)$  при  $z = h$  допускає потенціал  $\Phi = \Phi(x, y)$ , такий, що  $\vec{V}_h(x, y) = \nabla_{xy} \Phi(x, y)$ , розв'язок (57) може бути представлений у вигляді:

$$(u, v) = \nabla_{xy} \varphi(x, y, z) = \nabla_{xy} \left( \frac{z}{h} \Phi(x, y) - \frac{h^2}{2\mu} P(x, y) \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \right). \quad (58)$$

Причому, при  $z = h$ , видно, що  $\Phi(x, y) \equiv \varphi(x, y, h) + const$ .

З (46), за умови  $z = 0$ , випливає, що

$$\varphi_0(x, y) = C_0 = Const. \quad (59)$$

З (47), за умови  $z = h$ , випливає, що

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{h} (\varphi(x, y, h) - \frac{h^2}{2\mu} P(x, y)) + C_1, \quad (60)$$

в силу чого

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu} P(x, y) \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) + \frac{z}{h} (\varphi(x, y, h) + C_1) + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(z). \quad (61)$$

У припущенні, що поверхнева течія потенційна

$$\vec{V}_h(x, y) = \nabla_{xy} \varphi(x, y, h), \quad (62)$$

розв'язок (58) може бути представлений у вигляді:

$$(u, v) = \nabla_{xy} \varphi(x, y, z) = \nabla_{xy} \left( \frac{z}{h} \varphi(x, y, h) - \frac{h^2}{2\mu} P(x, y) \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \right). \quad (63)$$

У такому разі, для усередненого по шару руху,

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{h} \int_0^h \nabla_{xy} \varphi(x, y, z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \nabla_{xy} \left( \frac{z}{h} \varphi(x, y, h) - \frac{h^2}{2\mu} P(x, y) \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \right) dz. \quad (64)$$

видно, що значення усереднених по шару швидкостей визначається рухом на поверхні шару

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{h} \int_0^h \nabla_{xy} \varphi(x, y, z) dz = \frac{1}{2} \vec{V}_h(x, y) + \frac{h^2}{12\mu} \nabla_{xy} P(x, y), \quad (65)$$

або

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{h} \int_0^h \nabla_{xy} \varphi(x, y, z) dz = \nabla_{xy} \left( \frac{1}{2} \varphi(x, y, h) + \frac{h^2}{12\mu} P(x, y) \right). \quad (66)$$

А усереднений по шару «потенціал течії» [21–25, 27] визначається поверхневим потенційним перебігом та розподіленням тисків у вигляді

$$\bar{\varphi}(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(x, y, z) dz = \frac{h^2}{6\mu} P(x, y) + \frac{1}{2} \left( \varphi(x, y, h) - \frac{h^2}{2\mu} P(x, y) + C_1 \right) + C_3 \quad (67)$$

або

$$\bar{\varphi}(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(x, y, z) dz = \frac{1}{2} \varphi(x, y, h) - \frac{h^2}{12\mu} P(x, y) + \frac{1}{2} C_1 + C_3, \quad (68)$$

де

$$C_3 = \frac{1}{h} \int_0^h \left( C_0 + \frac{\rho}{\mu} Q(z) \right) dz. \quad (69)$$

## Нестационарні шаруваті течії

Розглядається нестационарна шарувата повзуча течія між двома нерухомими паралельними площинами. Вважається, що течія викликається градієнтом тиску. Для випадку повільної нестационарної шаруватої течії рівняння (15) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(x, y, z, t) + q(z, t) - \frac{P(x, y, t)}{\rho}. \quad (70)$$

Або, в термінах рівняння для швидкостей  $(u, v) = \nabla_{xy} \varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{xy} \varphi(x, y, z, t) &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_{xy} \varphi(x, y, z, t) - \frac{\nabla P(x, y, t)}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(x, y, z, t) &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{V}(x, y, z, t) - \frac{\nabla P(x, y, t)}{\rho} \end{aligned} \quad (71)$$

з граничними умовами прилипання на площинах

$$\text{при } z = \pm h: \quad \vec{V} \Big|_{z=\pm h} = (u, v) \Big|_{z=\pm h} = \nabla_{xy} \varphi = (0, 0). \quad (72)$$

Наслідком яких буде

$$\text{при } z = h: \quad \varphi(x, y, h, t) = C_{+h}(t) \quad (73)$$

$$\text{при } z = -h: \quad \varphi(x, y, -h, t) = C_{-h}(t) \quad (74)$$

при однакових значеннях при  $z = \pm h: \varphi(x, y, h, t) = \varphi(x, y, -h, t) = \text{Const}(t)$ . (75)

З початковими умовами :

$$\text{при } t = 0: \varphi(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu} P(x, y) \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) + zC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(z), \quad (76)$$

$$\text{чи } P(x, y, 0) = P(x, y), \varphi(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z) = -\frac{h^2}{2\mu} P(x, y, 0) \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) + zC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(z). \quad (77)$$

З початковими умовами в термінах для швидкостей  $(u, v) = \nabla_{xy} \varphi$ :

При  $t = 0$ :

$$\vec{V} \Big|_{t=0} = \vec{V}(x, y, z, 0) = (u(x, y, z, 0), v(x, y, z, 0)) \Big|_{t=0} = \nabla_{xy} \Phi(x, y, z) = \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y, 0) \left( \frac{z^2}{h^2} - 1 \right). \quad (78)$$

Розв'язок початково-крайової задачі для параболічного рівняння має

представлення у вигляді:

$$\vec{V}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{h} \int_{-h}^h \vec{V}(x, y, \xi, 0) \sin \frac{\pi n}{h} \xi d\xi \right) e^{-\left(\frac{\pi n \sqrt{\mu}}{h \sqrt{\rho}}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{h} z +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{h \rho} \int_0^t \int_{-h}^h \nabla_{xy} P(x, y, \tau) e^{-\left(\frac{\pi n \sqrt{\mu}}{h \sqrt{\rho}}\right)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{h} \xi d\xi d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{h} z$$

Або

$$\vec{V}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)) = \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y, 0) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{h} \int_{-h}^h \left( \frac{\xi^2}{h^2} - 1 \right) \sin \frac{\pi n}{h} \xi d\xi \right) e^{-\left(\frac{\pi n \sqrt{\mu}}{h \sqrt{\rho}}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{h} z$$

$$\vec{V}|_{t=0} = \vec{V}(x, y, z, 0) = (u(x, y, z, 0), v(x, y, z, 0))|_{t=0} = \nabla_{xy} \Phi(x, y, z) = \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x, y, 0) \left( \frac{z^2}{h^2} - 1 \right).$$

**Нестаціонарна шарувата повзуча течія між двома паралельними площинами. Течія викликається дотичним рухом в площині однієї з меж (рис. 5)**

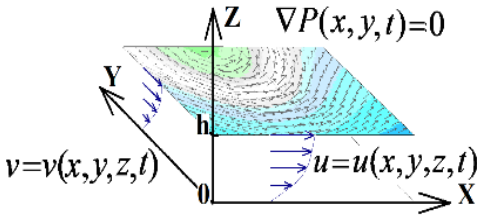


Рис. 5 – Схема шаруваті течії між двох площин

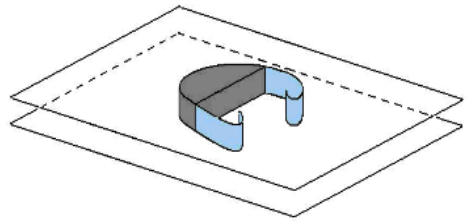


Рис. 6 – Схема шаруваті течії над площиною з перешкодою

Для нестаціонарних, швидкісних плоскопаралельних шаруватих течій рівняння (15) надає можливість поставити задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{P(x, y, t)}{\rho} + q(z, t),$$

з граничними умовами прилипання на границях

$$(u, v)|_{z=0} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, 0, t) = (0, 0),$$

$$(u, v)|_{z=h} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, h, t) = \vec{V}_h(x, y, t),$$

$$\text{і початковими умовами } t = 0: \quad \varphi(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z).$$

Доцільно зазначити, що в загальному випадку, функція  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  має залежність від  $z$  – глибини шару. Тому, будемо вважати, що вона може бути представлена у вигляді

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t) = \phi(x, y, t) Z(z).$$

Враховуючи (85), рівняння (81) набуває вигляду звичайного диференціального рівняння (з похідними відносно  $z$ ) для функції  $Z = Z(z)$ :

$$Z \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \phi \frac{\partial^2 Z}{\partial z} - \frac{Z^2}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{P(x, y, t)}{\rho} + q(z, t) \quad (86)$$

з крайовими умовами прилипання на межах:

$$\text{при } z = 0: Z(0) = 0 \quad (87)$$

$$\text{при } z = h: Z(h) = 1 \quad (88)$$

та додаткової задачі для функції  $\phi = \phi(x, y, t)$  з параметром  $t$ :

$$\Delta \phi = 0, \text{ в } D^+. \quad (89)$$

$$\text{З крайовими умовами на бокових межах } \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ на } L_d, \quad (90)$$

$$\int_A^B (\nabla \phi, n) ds = Q \quad \text{на } AB, \quad (91)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|^+ = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|^-, \quad \frac{\partial \phi^+}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi^+|^2}{2} = \frac{\partial \phi^-}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi^-|^2}{2} \text{ на } L_v, \quad (92)$$

та початковими умовами при  $t = t_0$ :

$$L_d(t_0) = L_{d0}, \quad L_v(0) = L_{v0}, \quad \phi^+ \Big|_{t=0} = \phi_0^+. \quad (93)$$

$$\text{З обмеженням на клас функцій } |\nabla \phi^+| < \infty. \quad (94)$$

У багатьох випадках [5, 6, 7, 9], для вирішення плоскої задачі про нестационарне обтікання непроникних, рухомих зі швидкостями  $\vec{W}_d$  і  $\vec{W}_v$  границь – контурів  $L_d(t)$  і  $L_v(t)$ , в деформованій області  $D(t)$ , використовується математична модель (з параметричною залежністю від часу  $t$ , яка в термінах ТФКЗ має інтегральні представлення):

$$\Phi(z, t) = \phi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (95)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega, \quad (96)$$

$$\Gamma_0 = \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) d\omega + \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) d\omega = const. \quad (97)$$

В силу мінливості області із заздалегідь невідомою формою частини границь, рішення конкретної задачі про нестационарне обтікання непроникних рухомих меж можливо тільки чисельними методами.

Для лінійної залежності від  $z$ , доданок з похідною по  $z$  у (15) пропадає і інтеграл набирає «вигляду інтеграла Коші-Лагранжа», але із  $const(z,t)$ , залежною від часу і шару. При усереднюванні інтеграла (86) по товщині шару виходить інтеграл Коші-Лагранжа, справедливий для «деякого усереднення по OZ» течії. Отриманий інтеграл може бути використаний при постановках початково-крайових задач (для розривних в площині OXZ, але шаруватих по OZ течій в'язкої рідини), для вирішення яких можливе використання МДО. Отриманий результат демонструє можливість реалізації нестационарних і циркуляційних режимів в шаруватих течіях.

## Висновки

Розглянуто метод побудови математичних моделей для плоскопаралельних шаруватих течій. Показано, що структура моделей припускає застосування відокремлення змінних та розщеплення задачі.

За припущенням шаруватості течії отримано інтеграл (15), який, у випадку невязкої течії, зводиться до інтегралу Коші-Лагранжа.

Постановки задач з використанням даного рівняння для шаруватої течії, з припущенням стаціонарності та малої швидкості руху, в залежності від крайових умов, призводять до класичних розв'язків: течії Пуазейля, течії Hele-Shaw, течії Куета.

При усереднюванні інтеграла (15) по товщині шару буде отримано інтеграл Коші-Лагранжа, справедливий для «деякого усереднення по OZ» течії. Отриманий інтеграл може бути використаний при постановках початково-крайових завдань (для розривних в площині OXZ, але шаруватих по OZ течій в'язкої рідини), для вирішення яких можливе застосування теорії граничних інтегральних рівнянь.

Метод побудови математичних моделей базується на відокремленні змінних та розщепленні задач по незалежних змінних. В побудованих нелінійних моделях враховано в'язкість, нестационарність та інерційність течії. Побудовані математичні моделі в граничних випадках представляють класичні розв'язки для шаруватих течій.

Отримані результати демонструють можливість побудови математичних моделей без нехтування конвективними доданками та здатні враховувати нестационарні та циркуляційні режими в течіях, подібних течіям Хіл-Шоу.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Иванов В.А. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море - суша. / В.А. Иванов, В.В. Фомин // Севастополь, НВЦ «ЕКОСИ-Гідрофізика»-2008., 363 с.
2. Шкадов В.Я. Течения вязкой жидкости. / В.Я. Шкадов, З.Д. Запранов // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984 г. – 200 с.
3. Черний Д.И. Математическая модель течения в мелководной акватории. / Д.И. Черний // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

- Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», Вип. 29, Харків, 2016, С. 78–86.
4. Черний Д.И. Экспериментальное и математическое моделирование слоистых течений в плоском канале. / Д.И. Черний, А.А. Воскобойник, В.А. Воскобойник // Тези науково-практичної конференції «Комп’ютерна гідромеханіка», м. Київ, 29-30 вересня 2016 р., Інститут гідромеханіки НАН України, С. 68–69.
  5. Kordas O. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / O. Kordas, A. Gourjii, E. Nikiforovich, D. Cherniy // *Journal of Environmental Accounting and Management*. – 2017. – Vol. 5, N 2. – p. 87–104 (DOI: 10.5890/JEAM.2017.06.002).
  6. Довгий С.А. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. / С.А. Довгий, И.К. Лифанов, Д.И. Черний // К.: Издательство «Юстон» 2016, 380 с.
  7. Довгий С.О. Алгоритмы метода дискретных особенностей для обчислювальних технологій. / С.О. Довгий, С.І. Ляшко, Д.І. Черний // *Кибернетика и системный анализ*. 2017, №6, С. 147–159.
  8. Cherniy D. The Vortex Model of a Viscid Wall’s Layer / D. Cherniy, S. Dovgiy, V. Meleshko // *IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function"*, Abstract Book, March 10(Sun)-14(Thu), 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan, pp. 126–127.
  9. Voskoboinick V.A. The modeling of different scale hydrologic processes in aquatories. / V.A. Voskoboinick, O.A. Voskoboinyk, D.I. Cherniy // *Environmental safety and natural resources*. – V. 29. – 2019. – pp. 87–97. DOI:10.32347/2411-4049.2019.1.87-98

Стаття надійшла до редакції 23.01.2020 і прийнята до друку після рецензування 03.03.2020

## REFERENCES

1. Ivanov, V.A., & Fomin, V.V. (2008). *Mathematical modeling of dynamic processes in the sea - land*. Sevastopol: National Exhibition Center "EKOSI-Gidrofizika". (in Russian)
2. Schkadov, V., Zaprianov, Z. (1984). *Techenie vjazkoy jidkosty*. Moscow.: Izd. MSU. (in Russian)
3. Cherni, D.I. (2016). Mathematical model of the flow in the shallow water area. *Bulletin of Kharkiv National University of V.N. Karazina, Seriya "Mat. fashion model. Informacion technology. Automation Systems Management"*, (29), 78-86. (in Ukrainian)
4. Cherniy, D.I., Voskoboynik, V.A., & Voskoboynik, O.A. (2016). Experimental and mathematical modeling of layered flows in a flat channel. *Abstracts of Papers. Naukovo-practical conference "Comp'yuterna gidromekhanika"*. Kyiv, September 29–30, 2016. (pp. 68-69). Kyiv: Institute of gidromekhaniki NAN Ukraine. (in Ukrainian)
5. Kordas, O., Gourjii, A., Nikiforovich, E., & Cherniy, D. (2017). A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach. *Journal of Environmental Accounting and Management*, 5(2), 87-104 (DOI: 10.5890/JEAM.2017.06.002).
6. Dovgy, S.A., Lifanov, I.K., & Cherniy, D.I. (2016). The method of singular integral equations and computational technologies. Kyiv: Euston Publishing House. (in Russian).
7. Dovgiy, S.O., Lyashko, S.I., & Cherniy, D.I. (2017). Algorithms of Discrete Singularities Method of Computational Technologies. *Cybernetics and System Analysis*, (6), 147-159. (in Ukrainian).
8. Cherniy, D., Dovgiy, S., & Meleshko, V. (2013). The Vortex Model of a Viscid Wall’s Layer. *Abstracts of Papers. IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function"*, Fukuoka, Japan, March 10–14, 2013. (pp. 126-127). Fukuoka: Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine.

9. Voskoboinick, V., Voskoboinyk, O., & Cherniy, D. (2019). The modeling of different scale hydrologic processes in aquatories. *Environmental Safety And Natural Resources*, 29(1), 87-98. doi:<http://dx.doi.org/10.32347/2411-4049.2019.1.87-98> (in Ukrainian)

*The article was received 23.01.2020 and was accepted after revision 03.03.2020*

**Черній Дмитро Іванович**

кандидат фізико-математичних наук, доцент, провідний науковий співробітник Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

**Адреса робоча:** 03186, Україна, м. Київ-186, Чоколівський бульвар, 13

**e-mail:** Dmytro.Cherniy@gmail.com