

Н.Б. Захарова, В.И. Агошков, Е.И. Пармузин

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт вычислительной математики Российской академии наук,  
г. Москва*

**МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ  
В ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ  
«ИВМ РАН – МИРОВОЙ ОКЕАН» И «ИВМ РАН – ЧЕРНОЕ МОРЕ»**

При исследовании и решении многих задач геофизической гидродинамики используются экспериментальные данные и данные наблюдений, получаемые с различных источников. В работе приводятся некоторые известные методы интерполяции данных наблюдений, а также предлагается метод интерполяции данных наблюдений на регулярные сетки с учетом переноса их течениями, который позволяет, путем введения «псевдо-наблюдений», повышать точность интерполируемых полей данных наблюдений. Все рассматриваемые в настоящей работе методы и алгоритмы лежат в основе обработки данных наблюдений в Информационно-вычислительных системах «ИВМ РАН – Мировой океан» и «ИВМ РАН – Черное море».

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *интерполяция данных наблюдений, ассимиляция данных, геофизическая гидродинамика, псевдо-наблюдения.*

**Введение.** Исследование и решение многих задач геофизической гидродинамики использует экспериментальные данные или данные наблюдений, получаемые со спутников, станций наблюдений, буев, кораблей и т.д. Несмотря на большой объем уже накопленных данных наблюдений, обеспеченность ими зачастую остается недостаточной. Кроме того, данные, как правило, предоставляются на множествах нерегулярных точек наблюдений и в асинхронные моменты времени. Эти обстоятельства оставляют актуальную проблему интерполяции (или экстраполяции) данных и по настоящее время, поскольку качество интерполяции зачастую фактически во многом определяет точность решения задач метеорологии, океанологии, геологии и др.

В настоящей работе изложение ведется в основном применительно к данным наблюдений международной системы буев *Argo* в акватории Мирового океана. Эти данные неравномерны как по пространству, так и по времени, что создает дополнительные сложности, однако дают уникальную оперативную информацию о состоянии океана на глубине, позволяющую строить поля температуры и солёности, используя различные алгоритмы интерполяции данных на равномерные сетки.

Проблема учета асинхронности получаемой геофизической информации остается также актуальной. Одним из известных подходов, решения этой проблемы состоит в следующем: весь временной интервал наблюдения данных разбивается на подынтервалы, и все данные, полученные на каждом подынтервале, относятся, например, к середине этого интервала. Подход не обладает высокой точностью учета времени поступающих данных наблюдений, однако используется в практических расчетах и по настоящее время.

В настоящей работе приводятся некоторые известные методы интерполяции данных наблюдений, а также предлагается метод построения полей температуры на регулярной сетке по данным наблюдений с учетом переноса их течениями. С помощью этого метода можно получать псевдо-наблюдения на искомый момент времени и, тем самым, решить проблему асинхронности геофизической информации. Приводятся результаты численных экспериментов в акватории Мирового океана. Предлагаемые в настоящей работе методы обработки данных наблюдений могут быть использованы применительно к акватории Черного моря. Все рассматриваемые в настоящей работе методы и алгоритмы лежат в основе обработки данных наблюдений в Информационно-вычислительных системах «ИВМ РАН – Мировой океан» и «ИВМ РАН – Черное море».

**1. Методы интерполяции данных наблюдений температуры.** Пусть имеется множество измерений  $\{T_{obs}(\tilde{X}_n(\tilde{t}_i)\tilde{t}_i)\}$  поля температуры  $T(X, t)$  (например, с системы буев *Argo*), в точках  $\{\tilde{X}_n(\tilde{t}_i)\}$  (вообще говоря, хаотически расположенных для каждого момента времени  $\tilde{t}_i$ ), где  $\{\tilde{t}_i\}$  – множество асинхронных моментов времени. Предполагается, что поле температуры в океане (море) адекватно описывается решением уравнения конвекции-диффузии вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (U, \nabla)T - \text{div}(\widehat{a}_T \nabla T) + \lambda T = Q \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

где  $U \equiv (u, v, w)$  – поле скоростей жидкости, которые считаем заданными,  $\nabla \equiv \text{grad}$ ,  $\widehat{a}_T$  – симметричная, положительно-определенная матрица коэффициентов,  $\lambda = \lambda(X, t) \geq 0$  – коэффициент поглощения;  $Q = Q(X, t)$  – заданная функция внутренних источников,  $\text{div}U = 0$  в  $\Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega \subset R^3$ ,  $X \equiv (x, y, z)$ , а  $\text{div}$ ,  $\nabla$  – известные операторы векторного анализа. Для определенности и упрощения обозначений мы здесь и в дальнейшем используем декартову систему координат.

Частными случаями (но одновременно и важными для целей интерполяции данных) уравнения распространения тепла являются следующие:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (U, \nabla)T - \frac{\partial}{\partial z}(v \frac{\partial T}{\partial z}) = Q \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (2)$$

где  $v$  – коэффициенты вертикальной теплопроводности, и предполагаются малыми «горизонтальные» коэффициенты теплопроводности и эффект поглощения (трения). Если пренебречь эффектами диффузии и считать  $\lambda \equiv 0$ ,  $Q \equiv 0$ , то получаем уравнение переноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (U, \nabla)T = 0 \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (3)$$

Если проинтегрировать (2) по  $z \in (z_i, z_{i+1})$  и ввести средние по слою  $(z_i, z_{i+1})$  скорости  $u, v$ , при условии

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

то при известных граничных условиях на границе океана и атмосферы можно из уравнения (2) получить следующее уравнение [5]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = -a(T - T_a)|V|a + R(x, y, t) \quad (4)$$

где  $a$  – коэффициент теплообмена,  $T_a$  – температура приповерхностного слоя атмосферы,  $|V|$  – модуль скорости ветра в этом слое,

$$a = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i > 0, \end{cases}$$

$$R(x, y, t) = \frac{(wT)(x, y, z_{i+1}, t) - (wT)(x, y, z_i, t)}{z_{i+1} - z_i} + Q(x, y, \frac{z_i + z_{i+1}}{2}, t)$$

В выражении для  $R(x, y, t)$  можно также считать, что функция  $T$  осреднена по  $z \in (z_i, z_{i+1})$  и зависит только от  $x, y, t$ .

При рассмотрении (4)  $\Omega$  есть подобласть из  $R^2$ . Модель (4) может быть использована для интерполяции поля температуры по плоскости  $z_i = \text{const}$ .

Компоненты скорости  $u, v, w$  считаем заданными (например, они вычислены по подходящей модели динамики вод в океане или море).

Переписав уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda T = Q$$

где  $\lambda \equiv a|V|a$ ,  $Q(x, y, t) \equiv R(x, y, t) + aT_a|V|a$ , мы приходим к «двумерному аналогу» уравнения (1) при пренебрежении эффектами горизонтальной диффузии.

В дальнейшем мы будем в основном использовать уравнение (1) или (3). Рассмотрение излагаемого ниже метода на другие случаи уравнений для  $T$  не представляет сложности.

Введем в  $\Omega \times (0, T)$  регулярную сетку  $\{X_m\}$  по пространственным переменным и  $\{t_k\}$  по временной переменной. Ставится задача построения проинтерполированных значений температуры на множество точек  $\{X_m, t_k\}$  с множества точек  $\{X_n(\tilde{t}_i), \tilde{t}_i\}$ . Для решения этой проблемы могут использоваться следующие методы и алгоритмы.

**Кусочно-полиномиальная интерполяция.** Кусочно-полиномиальная интерполяция широко используется в настоящее время в задачах обработки данных [11].

Алгоритм кусочно-линейной интерполяции является одним из самых простых методов интерполяции данных. Этот алгоритм реализован в ИВМ РАН для интерполяции данных наблюдений, полученных с буев *Argo*, по вертикальной переменной («по глубине») при создании Информационно-вычислительных систем ассимиляции данных наблюдений.

Однако, этот вид интерполяции нередко использует регулярные сетки и синхронизированные по времени данные наблюдений. Данные обстоятельства в определенной степени являются ограничением при рассмотрении проблемы интерполяции трехмерных нестационарных геофизических полей.

**Метод обратных взвешенных расстояний.** Метод обратных взвешенных расстояний [2] основан на вычислении весовых коэффициентов, с помощью которых взвешиваются значения данных измерений ( $\hat{Z}_k$ ) в точках наблюдений при построении интерполяционной функции. Вес, присвоенный отдельной точке данных при вычислении значения в узле сетки, пропорционален заданной степени обратного расстояния от точки наблюдения до узла сетки. При вычислении интерполяционной функции в каком-то узле сетки сумма всех назначенных весов равна единице, а весовой коэффициент каждой точки, где проводились измерения, является долей этого общего единичного веса. Если точка наблюдения совпадает с узлом сетки, то весовой коэффициент этой точки полагается равным единице, а всем другим наблюдаемым точкам присваиваются нулевые веса. Другими словами, в этом случае узлу сетки присваивается значение соответствующего наблюдения, и, следовательно, данный метод работает как точный интерполятор.

Формула интерполяции, используемая в данном алгоритме, имеет вид:

$$Z_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{\hat{Z}_k}{r_{ijk}^\beta}}{\sum_{k=1}^m \frac{1}{r_{ijk}^\beta}},$$

где  $Z_{ij}$  – интерполяционное значение для  $(i,j)$ -го узла сетки;  $\hat{Z}_k$  – значение данных измерений в  $k$ -ой точке наблюдений;  $r_{ijk}$  – расстояние между  $(i,j)$ -ым узлом и  $k$ -ой точкой наблюдений;  $m \equiv m(i, j)$  – число точек, учитывающихся при вычислении значения в  $(i,j)$ -ом узле;  $\beta$  – степень обратного расстояния.

Представленный в этом разделе метод реализован для обработки данных наблюдений в Информационно-вычислительных системах, разрабатываемых в ИВМ РАН, для интерполяции данных наблюдений по «горизонтальным переменным», в том числе при хаотических и асинхронных наблюдениях. При этом проблема асинхронности решалась следующим способом: весь временной интервал наблюдения данных разбивается на подынтервалы, и все данные, полученные на каждом подынтервале, относились, например, к середине этого интервала. Как уже отмечалось выше, подход не обладает высокой точностью учета времени поступающих данных наблю-

дений, и в настоящей работе рассматривается метод интерполяции асинхронных и хаотических данных наблюдений, использующий эффекты переноса данных наблюдений течениями при использовании одной из моделей (1) – (4). Отметим, что близкий алгоритм предлагался в работе [5], однако, как признают авторы этой работы, он не был ими численно реализован.

**Метод интерполяции геофизических полей с учетом их переноса течениями.** Рассмотрим алгоритм решения поставленной задачи интерполяции. Он включает три этапа: введение дополнительного множества точек, где определяются значения «псевдо-наблюдений»; построение самих значений «псевдо-наблюдений»; рассматривая все точки реальных наблюдений и псевдо-наблюдений, методом обратных взвешенных расстояний строится интерполянт в точках регулярной сетки  $\{X_m, t_k\}$ .

На первом этапе каждой точке  $\tilde{X}_n(\tilde{t}_l)$  ставится в соответствие набор точек  $\tilde{X}_n(\tilde{t}_k)$  при любом  $t = t_k$ , расположенных на траектории  $\tilde{X}_n(t)$ , определяемой как решение задачи вида:

$$\frac{d\tilde{X}_n}{dt} = U(\tilde{X}_n(t), t) \quad \forall t, \tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_n(\tilde{t}_l) \quad \text{при } t = \tilde{t}_l.$$

Путем численного решения этой задачи, определяем точки  $\{\tilde{X}_n(t_k)\}$ . Поскольку шаги сетки по  $t$ :  $(t_k - t_{k-1})$   $k = 1, 2, 3, \dots$  считаются малыми, то не внося больших ошибок, можно считать значение  $\tilde{t}_l$  совпадающим с одним из значений  $t_k$ .

На втором этапе алгоритма интерполяции вводим значения «псевдо-наблюдений».

Рассмотрим значение функции  $T$  в  $(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l)$ :

$$\begin{aligned} T(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l) &= T(\tilde{X}_n(t_k) + (\tilde{X}_n(\tilde{t}_l) - \tilde{X}_n(t_k)), t_k + (\tilde{t}_l - t_k)) = \\ &= T(\tilde{X}_n(t_k), t_k) + \\ &+ \left( \frac{\partial T}{\partial t}(\tilde{X}_n(t_k), t_k) + \left( \frac{\tilde{X}_n(\tilde{t}_l) - \tilde{X}_n(t_k)}{\tilde{t}_l - t_k}, \nabla \right) T(\tilde{X}_n(t_k), t_k) \right) (\tilde{t}_l - t_k) + \varepsilon_{n,l}^{(1)} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{n,l}^{(1)} \equiv \varepsilon_{n,l}^{(1)}(m, k) = O(|\tilde{X}_n(\tilde{t}_l) - \tilde{X}_n(t_k)|^2) + O(|\tilde{t}_l - t_k|^2)$ .

Из приведенной выше задачи для траектории  $\tilde{X}_n(t)$  заключаем, что «в окрестности» точки  $(\tilde{X}_n(t_k), t_k)$  приближенно можно принять

$$\frac{\tilde{X}_n(\tilde{t}_l) - \tilde{X}_n(t_k)}{(\tilde{t}_l - t_k)} \cong U(\tilde{X}_n(t_k), t_k) \quad (7)$$

(возникающие при этом ошибки снова включаются в  $\varepsilon_{n,l}^{(1)}$ ). Если теперь учесть предположение об адекватности математической модели, задаваемой (1) и соответствующими краевыми условиями, то из (1), (6) имеем:

$$T(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l) = T(\tilde{X}_n(t_k), t_k) + (\tilde{t}_l - t_k)(Q(\tilde{X}_n(t_k), t_k) - \lambda(\tilde{X}_n(t_k), t_k)T(\tilde{X}_n(t_k), t_k) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(\tilde{X}_n(t_k), t_k)) + \varepsilon_{n,l}^{(1)}. \quad (8)$$

Чтобы устранить зависимость правой части последнего выражения от значения  $T$  при  $t = t_k$ , заменим это выражение следующим соотношением (сохраняя при этом порядок допускаемых ошибок):

$$T_{obs}(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l) = T(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l) = T(\tilde{X}_n(t_k), t_k) + (\tilde{t}_l - t_k)(Q(\tilde{X}_n(t_k), t_k) - \lambda(\tilde{X}_n(t_k), t_k)T(\tilde{X}_n(t_k), t_{k-1}) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(\tilde{X}_n(t_k), t_{k-1})) + \varepsilon_{n,l}^{(1)} + (\tilde{t}_l - t_k)\varepsilon_{n,k}^{(2)}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_{m,k}^{(2)} = \lambda(\tilde{X}_n(t_k), t_k)(T(\tilde{X}_n(t_k), t_{k-1}) - T(\tilde{X}_n(t_k), t_k)) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(\tilde{X}_n(t_k), t_k) - \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(\tilde{X}_n(t_k), t_{k-1})$  ;

$$|\varepsilon_{m,k}^{(2)}| = O(|t_k - t_{k-1}|),$$

(– при наличии гладкости у функций  $T(X, t)$  и коэффициентов матрицы  $\hat{a}$ ).

Пренебрегая малыми величинами, получаем:

$$T_p(\tilde{X}_n(t_k), t_k) = T_{obs}(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l) - (\tilde{t}_l - t_k)(Q(\tilde{X}_n(t_k), t_k) - \lambda(\tilde{X}_n(t_k), t_k)T(\tilde{X}_n(t_k), t_{k-1}) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(\tilde{X}_n(t_k), t_{k-1})) \cong T(\tilde{X}_n(t_k), t_k)$$

выражения для значений «псевдо-наблюдений».

Пусть на третьем этапе построения интерполянта  $t_l, t_k (t \neq t_k)$  – произвольные значения из множества  $\{t_k\}$ . Рассмотрим значение функции  $T$  в  $(\tilde{X}_n(t_l), t_l)$ . Учитывая последнее соотношение и включая ошибки из него в  $\varepsilon_{n,l}^{(3)}$ , получаем следующее равенство с использованием  $T_p(\tilde{X}_n(t_l), t_l)$ :

$$T_p(\tilde{X}_n(t_l), t_l) = T(X_m + (\tilde{X}_n(t_l) - X_m), t_k + (t_l - t_k)) = T(X_m, t_k) + \left( \frac{\partial T}{\partial t}(X_m, t_k) + \left( \frac{\tilde{X}_n(t_l) - X_m}{t_l - t_k}, \nabla \right) T(X_m, t_k) \right) (t_l - t_k) + \varepsilon_{n,l}^{(3)}, \quad (10)$$

где  $\varepsilon_{n,l}^{(3)} \equiv \varepsilon_{n,l}^{(3)}(m, k) = O(|X_n(t_l) - X_m|^2) + O(|t_l - t_k|^2)$  ,

$$\frac{\tilde{X}_n(t_l) - X_m}{t_l - t_k} \cong U(X_m, t_k). \quad (11)$$

Если теперь снова учесть предположение об адекватности математической модели, задаваемой (1) и соответствующими краевыми условиями, то из (1),(10) имеем:

$$T_p(\tilde{X}_n(t_l), t_l) = T(X_m, t_k) + (t_l - t_k)(Q_{m,k} - \lambda_{m,k}T(X_m, t_k) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(X_m, t_k)) + \varepsilon_{n,l}^{(3)} \quad (12)$$

или

$$T_p(\tilde{X}_n(t_l), t_l) = T(X_m, t_k) + (t_l - t_k)(Q_{m,k} - \lambda_{m,k}T(X_m, t_{k-1}) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(X_m, t_{k-1})) + \varepsilon_{n,l}^{(3)} + (t_l - t_k)\varepsilon_{m,k}^{(4)}, \quad (13)$$

где  $Q_{m,k} \equiv Q(X_m, t_k)$ ,  $\lambda_{m,k} \equiv \lambda(X_m, t_k)$ ;

$$\varepsilon_{m,k}^{(4)} = T(X_m, t_{k-1}) - T(X_m, t_k) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(X_m, t_k) - \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(X_m, t_{k-1});$$

$$|\varepsilon_{m,k}^{(4)}| = O(|t_k - t_{k-1}|),$$

(при соответствующей гладкости функций  $T(X, t)$  и знании коэффициентов матрицы  $\widehat{a}_T$ ).

Отмечаем, что переход к представлению (13) дает нам возможность строить  $T_l$  при  $t = t_k$ , используя уже построенные значения  $T_l$  при  $t = t_{k-1}$ .

Введем некоторые заданные числа  $0 \leq r_{n,l} < \infty$ ,  $\beta_{n,l} \geq 0$ , вообще говоря зависящие от  $m$  и  $k$ , т.е.  $r_{n,l} \equiv r_{n,l}(m, k)$ ,  $\beta_{n,l} \equiv \beta_{n,l}(m, k)$ . Умножая (13) на  $r_{n,l}$  и осуществляя суммирование по  $n = 1, \dots, N$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ , при некоторых конечных  $N$  и  $L$  (которые могут зависеть от  $m$  и  $k$  (!)), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}} T_p(\tilde{X}(t_l), t_l) &= \left( \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}} \right) T(X_m, t_k) + \\ &+ \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N (t_l - t_k) r_{n,l}^{\beta_{n,l}} (Q_{m,k} - \lambda_{m,k}T(X_m, t_{k-1}) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(X_m, t_{k-1})) + \\ &+ \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n,l}^{(3)} r_{n,l}^{\beta_{n,l}} + \left( \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N (t_l - t_k) r_{n,l}^{\beta_{n,l}} \right) \varepsilon_{n,l}^{(4)} \end{aligned} \quad (14)$$

и получаем следующее выражение для  $T(X_m, t_k)$ :

$$T(X_m, t_k) = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}} T_p(\tilde{X}(t_l), t_l)}{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}}} - \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N (t_l - t_k) r_{n,l}^{\beta_{n,l}}}{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}}} \times$$

$$\times (Q_{m,k} - \lambda_{m,k} T(X_m, t_{k-1}) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(X_m, t_{k-1})) + \varepsilon, \quad (15)$$

где

$$\varepsilon = \frac{(\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N (t_k - t_l) r_{n,l}^{\beta_{n,l}}) \varepsilon_{m,k}^{(4)} - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n,l}^{(3)} r_{n,l}^{\beta_{n,l}}}{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}}}, \quad (16)$$

$$|\varepsilon| \leq O(h^2 + \Delta t^2),$$

где  $h = \max |\tilde{X}_n(t_l) - X_m|$ ,  $\Delta t = \max |t_l - t_k|$ . Пренебрегая слагаемым  $\varepsilon$  и переходя от  $T(X_m, t_k)$  к значениям интерполянта  $T_l(X_m, t_k)$ , а также подразумевая уже под  $\operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla)$  подходящий разностный аналог этого оператора, получаем следующие формулы для проинтерполированных значений поля температуры:

$$T_l(X_m, t_k) = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}} T_p(\tilde{X}(t_l), t_l)}{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}}} - \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N (t_l - t_k) r_{n,l}^{\beta_{n,l}}}{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}}} \times$$

$$\times (Q_{m,k} - \lambda_{m,k} T_l(X_m, t_{k-1}) + \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T_l)(X_m, t_{k-1})). \quad (17)$$

Пусть  $D_{m,k}$  есть окрестность узла  $(X_m, t_k)$ , содержащая точки «псевдо-наблюдений», учитывающиеся при вычислении значения интерполянта  $T_l$  в точке  $(X_m, t_k)$ . Пусть также  $\Delta t = \max |t_k - t_l|$ ,  $\tilde{U} = \max |U_{m,k}|$ ,  $h_{m,k} = \max_{(X_n, t_l) \in D_{m,k}} |\tilde{X}_n(t_l) - X_m|$  – максимальное расстояние между узлом сетки, в котором вычисляется значение интерполянта и точками «псевдо-наблюдений», входящих в окрестность  $D_{m,k}$  этого узла,  $h = \max_{m,k} h_{m,k}$ .

Справедливо следующее утверждение об оценке погрешности построенного интерполянта.



*Утверждение.* Пусть исходные данные задачи для уравнения теплопроводности (1) и само решение  $T$  суть гладкие функции, а также решение этого уравнения адекватно описывает наблюдения поля температур, тогда имеет место оценка погрешности интерполяции:

$$|T(X_m, t_k) - T_l(X_m, t_k)| \leq C(h^2 + \tilde{U}^2 \cdot \Delta t^2),$$

где  $C = const.$

*Доказательство.* Если из значения  $T(X_m, t_k)$ , представленного в (15), вычтем  $T_l(X_m, t_k)$  (см. (17)), то получим погрешность интерполяции в данной точке:

$$T(X_m, t_k) - T_l(X_m, t_k) = \varepsilon(m, k),$$

которую, согласно (16), можно оценить следующим образом

$$|\varepsilon(m, k)| \leq C (h_{m,k}^2 + \tilde{U}_{m,k}^2 \Delta t_k^2).$$

Тогда для  $\forall m, k$  будет справедлива следующая оценка

$$|T(X_m, t_k) - T_l(X_m, t_k)| \leq C(h^2 + \tilde{U}^2 \cdot \Delta t^2),$$

где  $C$  – некоторая постоянная величина (имеющая соответствующую размерность).

Если пренебречь каким-либо слагаемым в (17), то получим соответствующую упрощенную формулу. Так, например, если считать  $Q \equiv 0$ ,  $\lambda \equiv 0$ , а «диффузионные слагаемые» малыми, то

$$T_p(\tilde{X}(t_l), t_l) = T_{obs}(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l) \quad \forall l \quad (18)$$

и получаем следующую формулу:

$$T_l(X_m, t_k) = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}} T_{obs}(\tilde{X}_n(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l)}{\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N r_{n,l}^{\beta_{n,l}}}. \quad (19)$$

Эта формула отличается простотой, она удобна при численных расчетах и есть достаточное число практических задач, в которых ее применение приводит к результатам с приемлемой точностью (например, задачи с преобладающими операторами конвекции в уравнениях математической модели).

Теперь, чтобы воспользоваться формулой (17), достаточно задать веса  $r_{n,l}$ ,  $\beta_{n,l}$  и ввести подходящую аппроксимацию оператора второго порядка в момент времени  $t_{k-1}$  (поле  $T_l$  при  $t = t_{k-1}$  считаем уже построенным).

Коэффициент  $\beta_{n,l}$  задается постоянным, например  $\beta_{n,l} = \frac{1}{2} \forall n,l$  или  $\beta_{n,l} = 1$  и т.п. Остановимся на задании  $r_{n,l}$ . Пусть рассматривается момент времени  $t_k$ . Введем следующее представление вектора  $X_m$ :

$$X_m = \tilde{X}_n(t_l) + \frac{X_m - \tilde{X}_n(t_l)}{(t_k - t_l)}(t_k - t_l). \quad (20)$$

В силу того, что

$$\frac{X_m - \tilde{X}_n(t_l)}{(t_k - t_l)} \cong U_{m,k}, \quad (21)$$

получаем:

$$X_m = \tilde{X}_n(t_l) + U_{m,k}(t_k - t_l) \quad (22)$$

в «окрестности» точки  $(X_m, t_k)$ .

Из (22) можно сделать следующие предположения. Первое состоит в определении множества точек  $\{\tilde{X}_n(t_l), t_l\}$ , которые можно включить в окрестность точки  $X_m$  при  $t=t_k$  и которые будут участвовать в построении  $T_l$  (определяя тем самым значения  $N, L$  в выражениях (14) – (19)). К этим точкам можно отнести все точки  $\{\tilde{X}_n(t_l)\}$ , такие, что

$$\left| X_m - \tilde{X}_n(t_l) \right| \leq C_m |U_{m,k}| \cdot |t_k - t_l| \leq C_m |U_{m,k}| \Delta_k, \quad (23)$$

где  $\Delta_k$  – некоторый интервал по времени такой, что  $|t_k - t_l| \leq \Delta_k$ , а  $C_m = \text{const}$ . Очевидно, что увеличивая  $\Delta_k$  и  $C_m$ , мы можем расширить множество точек  $\{\tilde{X}_n(t_l)\}$  наблюдений и «псевдо-наблюдений», включаемых в «окрестность» точки  $X_m$  при  $t=t_k$ .

Второе предположение, которое можно сделать из (22), состоит в том, что в качестве веса  $r_{n,l}$  можно выбрать веса вида

$$r_{n,l} \equiv r_{n,l}(m,k) = \frac{1}{\left( \left| X_m - (\tilde{X}_n(t_l) + U_{m,k}(t_k - t_l)) \right| + \varepsilon_{m,k} \right)}, \quad (24)$$

где  $\varepsilon_{m,k}$  – малые положительные числа, которые вводятся чтобы в практических вычислениях исключить деление на ноль. Их можно брать, например, одним и тем же для  $\forall m,k : \varepsilon_{m,k} = \varepsilon \sim (10^{-15} \dots 10^{-20})$  и т.п.

Отметим некоторые аргументы в пользу целесообразности такого задания  $r_{n,l}$ . На данном этапе мы применяем метод обратных взвешенных расстояний. В этом методе влияние значений в точках наблюдений (в нашем

случае и «псевдо-наблюдений») на формирование значения интерполянта определяется весовыми коэффициентами  $r_{n,l}$ . Во многих задачах геофизической гидродинамики (например, с преобладающими конвективными течениями) влияние значений геофизического поля «передается» по траекториям элементарного объема жидкости. Поэтому, значение поля в точках наблюдений (измерений), которые с учетом возможного их переноса течениями окажутся ближе к точке, где строится интерполируемое значение, должны браться в методе обратных взвешенных расстояний с большими весами. Это обстоятельство приводит к предположению о целесообразности задания  $r_{n,l}$  в виде (24).

Рассмотрим следующий пример. Так, если здесь для некоторых  $n_0, l_0$  точки  $X_m$  будем иметь

$$X_m = \tilde{X}_{n_0}(t_{l_0}) + U_{m,k}(t_k - t_{l_0}), \quad (25)$$

а для других  $n, l$  имеем

$$\left| X_m - (\tilde{X}_n(t_l) + U_{m,k}(t_k - t_l)) \right| \gg \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (26)$$

то из (19) получаем:

$$T_l(X_m, t_k) \cong T_{obs}(\tilde{X}_{n_0}(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l), \quad (27)$$

т.е. в случае физического процесса с преобладающим «конвективным переносом» значение наблюдаемой величины просто распространяется по траектории), а из (17) имеем:

$$T_l(X_m, t_k) \cong T_p(\tilde{X}_{n_0}(\tilde{t}_{l_0}), \tilde{t}_{l_0}) - (\tilde{t}_{l_0} - t_k)(Q_{m,k} - \lambda_{m,k}T_l(X_m, t_{k-1}) + \text{div}(a_T \nabla T_l)(X_m, t_{k-1})). \quad (28)$$

Итак, алгоритм построения интерполянта (точнее его значений) на регулярной сетке  $\{X_m\} \times \{t_k\}$  по значениям данных асинхронных наблюдений в нерегулярном множестве точек  $\{\tilde{X}_n(t_l)\}$  полностью определен. При этом в построении интерполяционных значений  $\{T_l(X_m, t_k)\}$  участвует уравнение (1) (или его частные случаи), которое «корректирует» процесс построения  $T_l$ .

Очевидно, что рассмотренный алгоритм построения интерполянта может быть применен и к другим геофизическим полям при наличии соответствующих данных наблюдений.

Изложенный выше алгоритм построения интерполяций можно применить в процедурах ассимиляции данных. Более того, его реализация возможна с применением процедуры ассимиляции. Вспоминаем, что поле ско-

ростей  $U_{m,k}$  считалось заданным. На самом деле, это поле само зависит от  $T(x,t)$ . Поэтому, для реализации алгоритма еще надо задать  $U_{m,k}$ . Вычислить их можно, например, с помощью полной модели динамики океана, используя процедуру вариационной ассимиляции данных. Так, пусть предполагается, что на основе данных  $T_{obs}(\tilde{X}_{n_0}(\tilde{t}_l), \tilde{t}_l)$  построен некоторый интерполянт  $T_l^{(0)}(X_m, t_l)$  обычным методом обратных взвешенных расстояний (см. [2]). Как показано в [8 – 10] применение  $T_l^{(0)}$  в задачах вариационной ассимиляции позволяет строить поля скоростей  $U_{m,l}$ , которые в целом адекватны полям в реальных физических системах. Теперь поле скоростей, полученное таким образом, можно использовать для построения нового интерполянта  $T_l^{(1)}(X_m, t_k)$  по изложенному выше алгоритму. После построения  $T_l^{(1)}(X_m, t_k)$  можно, конечно, снова решать задачу вариационной ассимиляции данных с целью уточнения  $U_{m,l}$ . Однако, как показывают расчеты, это уточнение незначительно, или даже «незаметно».

Отметим, что вместо расчета  $\{U_{m,k}\}$  по полной системе уравнений динамики океана или моря (в том числе с вариационной ассимиляцией), можно применить различные приближения к  $U$  (например, «геострофические поля скоростей» и т.п.). Однако, эти приближения по точности, как правило, проигрывают изложенному выше алгоритму построения  $T_l$ .

Заметим также, что уже после ассимиляции  $T_l^{(0)}$  в результате получаем поля температуры, которые часто обладают приемлемой точностью и уже их можно рассматривать в качестве построенного интерполянта. Построение  $T_l^{(1)}$  является алгоритмом построения нового класса интерполяций, которые могут быть и не связаны с предварительным решением задачи ассимиляции (вспомним сделанное замечание о возможной замене  $\{U_{m,k}\}$  их «геострофическим» приближением).

#### Замечания.

1) При  $t = t_k$  в рассматриваемом методе интерполяции поле скоростей  $U$  можно брать со слоя  $t_{k-1}: U_{m,k} \cong U_{m,k-1}$ . Это приближение, вероятно, приведет к более точным результатам, чем использование «геострофических скоростей» (здесь только надо построить начальные значения  $\{U_{m,0}\}$ ).

2) Вводя аппроксимации операторов второго порядка следующим образом:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla) T)(X_m, t_k) &= \alpha (\operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla) T)(X_m, t_{k-1}) + \\ &+ \beta \operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla T)(X_m, t_{k-2}) + \gamma (\operatorname{div}(\widehat{a}_T \nabla) T)(X_m, t_{k-3}) \end{aligned}$$

и подобрав  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно увеличить точность построения  $T_l$ . Далее, если брать  $(t_l - t_m)$  малыми, то (17) есть фактически явная схема решения уравнения (1) с лагранжевой аппроксимацией конвективной части уравнения.

**2. Результаты численных экспериментов.** Приведем некоторые результаты построения интерполянтов геофизических полей описанным выше алгоритмом на примере данных профилирующих буев *Argo*.

Система *Argo* – это международная система, состоящая из более чем 3 000 профилирующих буев, дрейфующих в бассейне Мирового океана и измеряющих температуру и соленость верхнего слоя воды (до 2 000м). Цикл работы каждого буя составляет около 10 суток. Тем самым, массив из 3 000 буев обеспечивает порядка 100 000 профилей температуры (солености) в год, распределенных по акватории Мирового океана в среднем с интервалом в 3 географических градуса. Данные неравномерны как по пространству, так и по времени, однако буи *Argo* дают уникальную оперативную информацию о состоянии океана на глубине, позволяющую строить поля температуры и солености используя различные алгоритмы интерполяции данных на равномерные сетки. Эксперименты проводились на данных профилирующих буев о температуре за 2009 г. В данной серии экспериментов при расчетах учитывались данные буев за каждый день. На рис. 1 представлены данные наблюдений буев *Argo* в акватории Мирового океана за 1 сутки, (5 января 2009 г.), на рис. 2. представлены данные наблюдений буев *Argo* в акватории Мирового океана за 10 суток (с 1 по 10 января 2009 г.). Нетрудно видеть, что данных за 1 сутки не хватает, чтоб построить правдоподобное поле температуры (и солености) во всей акватории океана. В то время, как данные за 10 суток дают много больше информации. Именно поэтому раньше поля температуры (и солености) строились осредненные за 10 суток. Но такое грубое осреднение вносит погрешности, для избегания которых и предлагается описываемый метод, чтобы учитывать время наблюдения данных более точно.

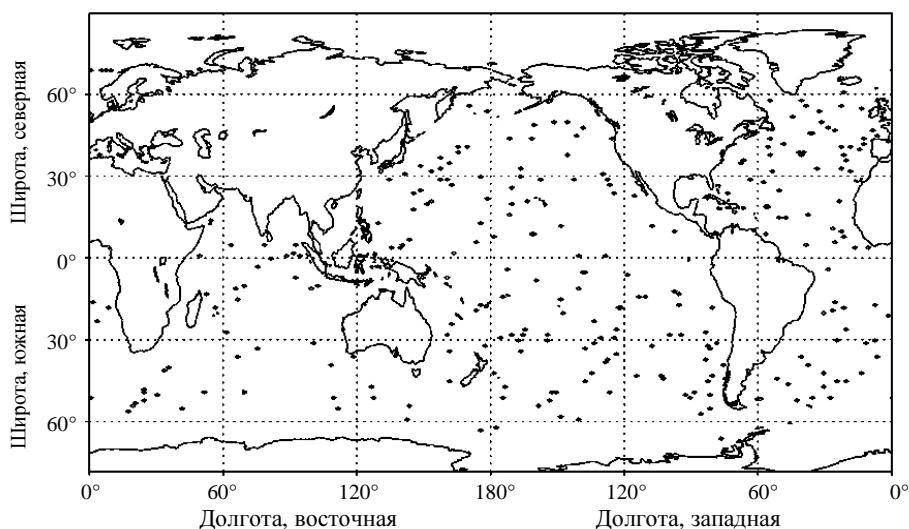


Рис. 1. Расположение буев *Argo* (точек наблюдения) в акватории Мирового океана 5 января 2009 г. – наблюдения за 1 сутки.

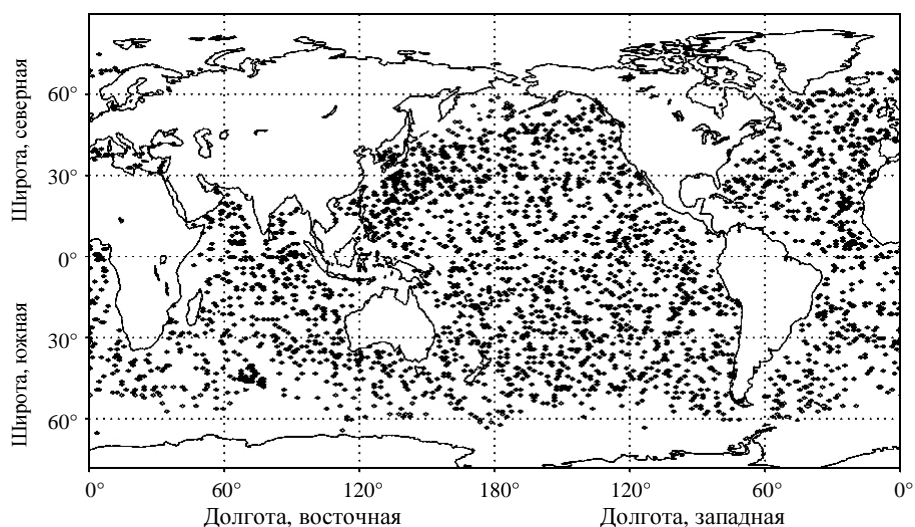


Рис. 2. Расположение буев *Argo* (точек наблюдения) в акватории Мирового океана в период с 1 по 10 января 2009 г. – 10-суточные наблюдения.

В проводимых экспериментах вычисления проводились по упрощенной формуле (19), т.е. пренебрегая «диффузионными слагаемыми» и полагая  $Q \equiv 0$ ,  $\lambda \equiv 0$ . При расчетах были выбраны коэффициенты  $\beta_{n,l} = 1$ , а веса  $r_{n,l}$  рассчитывались по формуле (24), где  $\varepsilon = 10^{-15}$ . В критерии (23) для точек наблюдений, учитывающихся при вычислении значений температуры в узлах равномерной сетки, рассматривались различные интервалы по времени и размеры «окрестности» узловой точки, входящие в которую наблюдения влияют на значение в узле. Компоненты скорости  $u, v$  вычислялись по моделям динамики океанов и морей, разработанным В.Б. Залесным, Н.А. Дианским, А.В. Гусевым и В.В. Фоминым в ИВМ РАН [12].

Для демонстрации характера изменений получаемого интерполянта при различных  $\Delta_k$ , на рис. 3 и рис. 4 приведены изображения рассчитанных интерполянтов на 10 января 2009 года, построенных с одинаковыми значениями  $C_{m,k}$ , но с  $\Delta_k = 2$  и  $\Delta_k = 10$  суток соответственно. В данном эксперименте константы  $C_{m,k}$  выбраны таким образом, что при вычислении значения в узле учитываются точки, расстояние от узла до которых на один и тот же момент времени (с учетом скоростей и направлений течений в данной области) не превышает расстояния, примерно равного 1,5 географических градуса.

Далее, на рис. 5 приведены изображения интерполянтов, рассчитанных на 10 января 2009 г. с  $\Delta_k = 10$  суток. Но в данном эксперименте константы  $C_{m,k}$  выбраны таким образом, что при вычислении значения в узле учитываются точки, расстояние от узла до которых на один и тот же момент времени не превышает расстояния, примерно равного 3 географическим градусам.

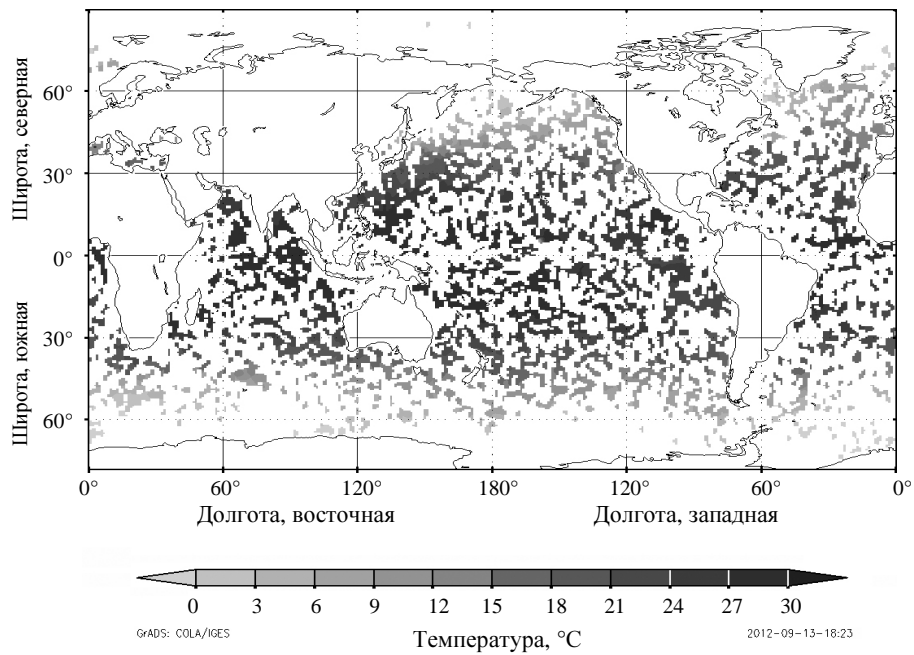


Рис. 3. Результаты расчетов температуры в акватории Мирового океана на 10 января 2009 г. на глубине 10 м. Радиус «окрестности» узловой точки 1,5 географических градуса,  $\Delta_k = 2$  суток.

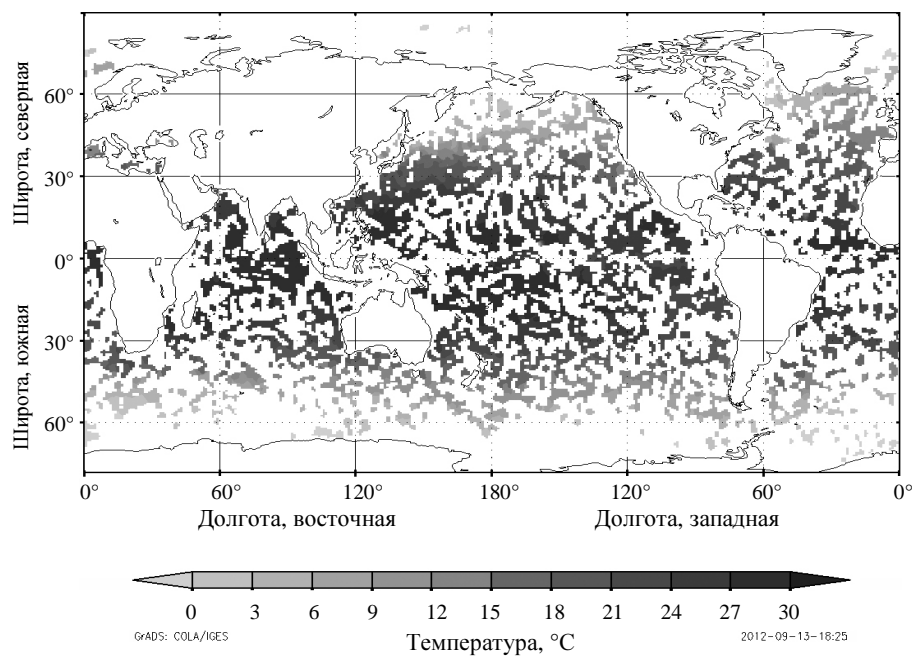


Рис. 4. Результаты расчетов температуры в акватории Мирового океана на 10 января 2009 г. на глубине 10 м. Радиус «окрестности» узловой точки 1,5 географических градуса,  $\Delta_k = 10$  суток.

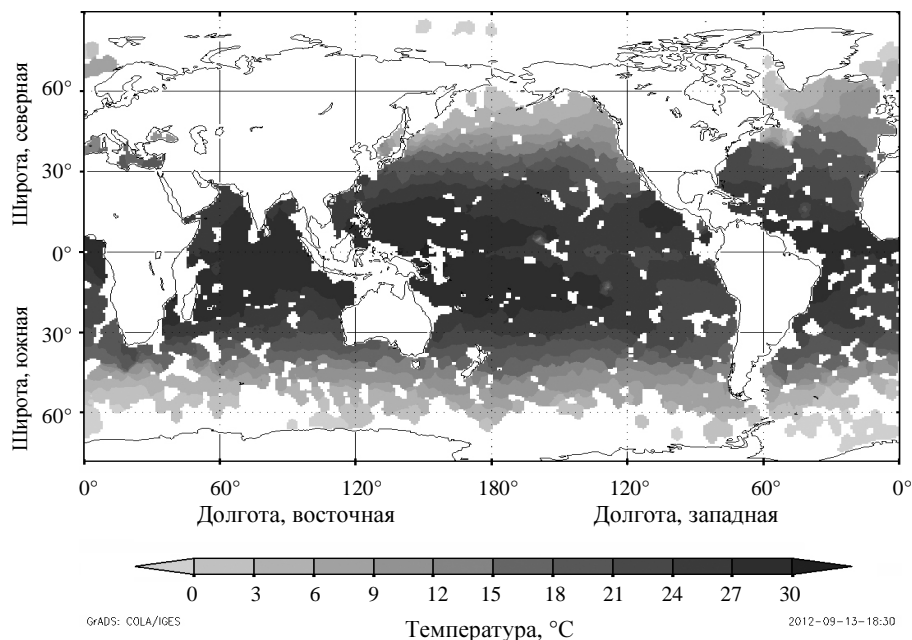


Рис. 5. Результаты расчетов температуры в акватории Мирового океана на 10 января 2009 г. на глубине 10 м. Радиус «окрестности» узловой точки 3 географических градуса,  $\Delta_k = 10$  суток.

Из рис. (3 – 5) видно, что при увеличении временного интервала  $\Delta_k$  и коэффициентов  $C_{m,k}$ , как и предполагалось, увеличивается область вычисленных значений. При радиусе окрестности узловой точки, данные наблюдений входящие в которую учитываются при вычислении значения в узле, равном трем географическим градусам и  $\Delta_k = 10$  суток покрывается практически вся акватория Мирового океана с данными наблюдений буев *Argo*. Но чем больше учитываемые интервалы времени и указанные коэффициенты, при расчете значений в каждом узле, тем больше вносится погрешность в данные наблюдений, точность которых высока. Поэтому подбор коэффициентов  $C_{m,k}$  и временных интервалов  $\Delta_k$  остаются на усмотрения исследователя, и в каждой конкретной задаче определяются отдельно, с учетом поставленных целей исследований.

Для сравнения полученных результатов приведем на рис. 6 поле температуры, построенное методом обратных взвешенных расстояний [2], по данным профилирующих буев за январь 2009 года, усредненное за 10 суток и на рис. 7 поле температуры, полученное моделью полной динамики океана после усвоения поля температур с рис. 6 (оба поля приведены на глубине 10 м).



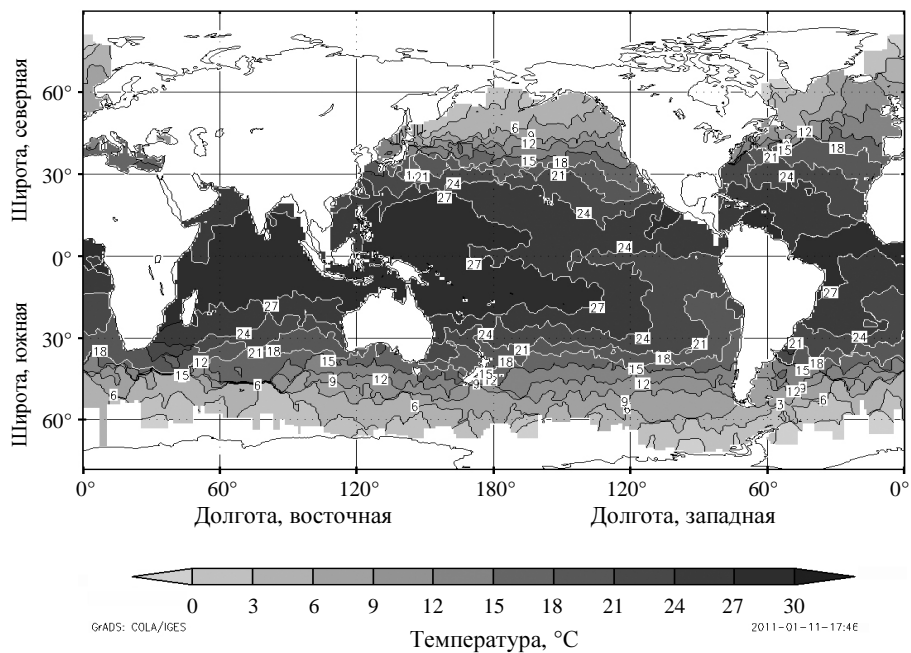


Рис. 6. Поле температуры воды в акватории Мирового океана на глубине 10 м, построенное методом обратных взвешенных расстояний, на 1 – 10 января 2009 г.

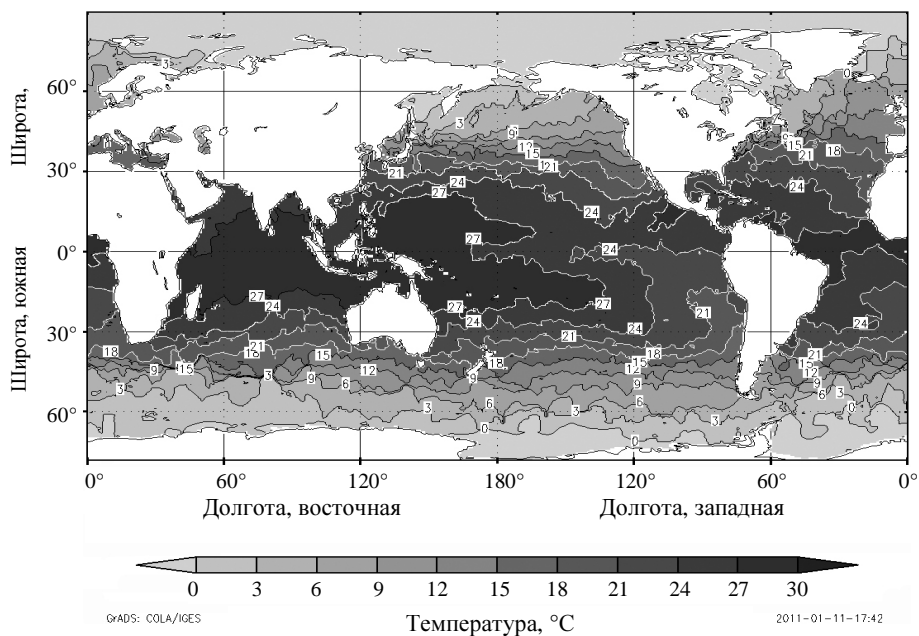


Рис. 7. Поле температуры воды в акватории Мирового океана на глубине 10 м на 10 января 2009 г., полученное моделью после усвоения поля температур, построенного методом обратных взвешенных расстояний.

Из сравнения изображений можно сделать вывод о том, что предложенный в настоящей работе метод интерполяции геофизических полей позволяет получать поля характеристик, наиболее близких к полям, получаемых моделью полной динамики океана даже после процедуры ассимиляции данных наблюдений.

Построенные с помощью описанного в работе алгоритма интерполянты значений можно использовать как для анализа состояния Мирового океана, так и для ассимиляции моделью в качестве данных наблюдений для улучшения качества работы математической модели и решения различных задач гидротермодинамики.

Указанный алгоритм построения интерполянта может быть использован не только в акватории Мирового океана по данным буев *Argo*, но и для обработки данных геофизических наблюдений в бассейне Черного моря. Так, привлекая данные единичных измерений, спутниковых измерений и буев-профилемеров, можно по предложенному методу построить поля «псевдо-наблюдений», которые с приемлемой точностью будут аппроксимировать оперативные поля температуры на акватории Черного моря.

**Заключение.** В настоящей работе предложен новый метод интерполяции геофизических полей с учетом переноса их течениями. В численных экспериментах используются данные наблюдений международной системы буев *Argo* в акватории Мирового океана. Проиллюстрированы результаты экспериментов с различными коэффициентами и параметрами.

Численные эксперименты подтвердили предполагаемые теоретические выкладки о возможности и целесообразности построения интерполянтов геофизических полей с учетом временной характеристики и течений в водах океанов и морей. Полученные интерполянты близки к полям, полученным моделью динамики океана даже после усвоения данных наблюдений, что говорит о том, что интерполяция предложенным методом обладает приемлемой точностью.

Предложенный метод может быть применен для построения интерполяций полей температуры в акватории Черного моря.

*Работа проведена при поддержке Программы Президиума РАН П-23, Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00806, 11-01-12046 и 12-05-00469) и Федеральных Целевых Программ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение 8219) и «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы» (проект 11.519.11.1005).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агошков В.И., Гусев А.В., Дианский Н.А., Олейников Р.В. Решение задачи гидротермодинамики Индийского океана с вариационной ассимиляцией данных о функции уровня // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2007. – Vol. 22, № 2. – P. 1-10.
2. Захарова Н.Б., Лебедев С.А. Интерполяция оперативных данных буев ARGO для ассимиляции данных в модели циркуляции Мирового океана // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса: Физические основы, методы и технологии мониторинга окружающей среды, потенциально

- опасных явлений и объектов. Сборник научных статей. – М.: ООО «ДоМира». – 2010. – Том 7, № 4. – С. 104-111.
3. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 287 с.
  4. Монин А.С., Каменкович В.М., Корт В.Г. Изменчивость Мирового океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 264 с.
  5. Соколов В.А., Беляев К.П., Тихонов В.А., Рева Ю.А. Анализ временной изменчивости гидрологических полей на НЭП по результатам полигонных наблюдений. – Итоги науки и техники, серия Атмосфера, океан, космос. Программа «Разрезы». – М.: ПИК ВИНТИ. – 1986. – Том 7. – 300 с.
  6. Agoshkov V.I. Estimates of spectrum bounds of some operators in geophysical hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2008. – Vol. 23, № 4. – P. 305-327.
  7. Agoshkov V.I. Spectrum bounds for some operators // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2009. – Vol. 24, № 2. – P. 79-113.
  8. Agoshkov V.I., Assovsky M.V., Lebedev S.A. Numerical simulation of Black Sea dynamics subject to tide-forming forces // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2012. – Vol. 27, № 1. – P. 5-32.
  9. Agoshkov V.I., Parmuzin E.I. Numerical solution of the sea surface temperature variational assimilation problem in Black Sea dynamics model // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2012. – Vol. 27, № 1. – P. 69-94.
  10. Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Zakharova N.B. The study and numerical solution of the inverse problem of heat flows in the ocean dynamics model based on ARGO buoys data // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2011. – Vol. 26, № 3. – P. 231-261.
  11. Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989 г. – 608 с.
  12. Zalesny V.B, Diansky N.A, Fomin V.V, Moshonkin S.N, Demyshev S.G. Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2012. – Vol. 27, № 1. – P. 95-111.

Материал поступил в редакцию 04.12.2012 г.

**АНОТАЦІЯ** При дослідженні та розв'язанні багатьох задач геофізичної гідродинаміки використовуються експериментальні данні та данні спостережень, отриманих з різних джерел. У роботі наводяться деякі відомі методи інтерполяції цих спостережень, а також пропонується метод інтерполяції цих спостережень на регулярні сітки з урахуванням перенесення їх течіями, який дозволяє, шляхом введення «псевдоспостережень», збільшувати якість інтерпольованих полів цих спостережень. Усі методи, що розглядаються в справжній роботі, і алгоритми лежать в основі обробки цих спостережень в Інформаційно-обчислювальних системах «ІВМ РАН – Світовий океан» та «ІВМ РАН – Чорне море».

**ABSTRACT** During research and solution of different problems of geophysical hydrodynamics observation data are used from various sources. In this paper some known methods of interpolation of observation data are given and the method of observation data interpolation on regular grids taking into account transfer by their currents is suggested. By means of introduction of «pseudo-observation» this method allows to increase accuracy of interpolated observation data fields. All methods and algorithms considered in this work are used to observation data processing in the Informational-computational systems «INM RAS – the World Ocean» and «INM RAS – the Black Sea».