УДК 539.31

В.Л. ВОЛОШКО, *канд. фіз.-мат. наук, доц., старший науковий співробітник відділу екологічного нормування Інституту проблем природокористування і екології НАН України, м. Дніпропетровськ, Україна*

ДЕЯКІ МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОТЕНЦІАЛА В ЗАДАЧАХ ЕКОЛОГІЇ

Наведені основні рівняння і крайові задачі, які описують процес розповсюдження забруднюючої суміші та дифузії в навколишньому середовищі. Математична модель враховує основні параметри процесу і достатньо адекватно його відображає. Наведено наближений метод розв'язання крайової задачі Діріхле для рівняння Лапласа у випадку області складної форми. Проаналізовані числові результати.

***Ключові слова*: інтенсивність аерозольної субстанції, функція джерела забруднення, рівняння Лапласа, крайова задача, складний контур, оцінка наближеного розв'язку.**

Аналіз глобального загострення екологічної кризи змушує людство кардинально змінити поведінку в процесі життєдіяльності, підходи до освоєння та використання природно-ресурсного потенціалу. Ідея сталого розвитку передбачає, в тому числі, суттєве розширення наукових досліджень [1], активне запровадження фундаментальних результатів природничих наук, в тому числі математики. Наведемо деякі відомі рівняння математичної фізики з відповідними крайовими задачами, за допомогою яких досліджуються складні процеси в екології.

Нехай $\varphi\ (x,\ y,\ z,\ t)$ – інтенсивність аерозольної субстанції, яка мігрує разом з повітрям атмосфери. Процес розповсюдження брудних домішок в деякій області, обмеженій поверхнею, описується рівнянням [2]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div(\upsilon\varphi)+\sigma\varphi=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\,\Delta\varphi(x,y)+f(x,y,z,t)\,, \tag{1}$$

де $\upsilon = (\upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \upsilon_3)$ – вектор швидкості потоку повітря; $\sigma \geq 0$ – величина, пропорційна відносній швидкості довільного зменшення концентрації суміші; $\nu \geq 0$, $\mu \geq 0$ – відповідно горизонтальний і вертикальний коефіцієнти дифузії, обчислені експериментально; функція f є функцією джерела забруднюючої суміші, $\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

В [3] для опису процесів дифузії нейтронів і теплопровідності одержуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t}=\left(D+\dfrac{k\tau}{T_0}\right)\Delta N+\dfrac{k-1}{T_0}N, \\ c\rho\dfrac{\partial T}{\partial t}=\lambda\,\Delta T+\gamma\left(\dfrac{k\tau}{T_0}\Delta N+\dfrac{k}{T_0}N\right), \end{cases} \tag{2}$$

де N – число нейтронів у одиниці об'єму, D – коефіцієнт дифузії, T – температура середовища, c – питома теплоємність середовища, ρ – її щільність, λ – коефіцієнт теплопровідності, T_0 – час життя нейтрона, величини γ, k вважаємо фізичними константами. Крайові і початкові умови для диференціального рівняння (1) і системи рівнянь (2) визначаються окремо, в залежності від типу задачі і конкретних фізичних умов. Очевидно, що складовою цих рівнянь є оператор Лапласа, а це означає, що потрібні ефективні процедури розв'язання крайових задач для рівняння цього типу.

Математична постановка задачі

Далі нагадаємо відому постановку крайової задачі. Необхідно знайти функцію $v = v(x,y)$, неперервну в області Ω обмеженою контуром Γ, яка має в Ω частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє в ній рівняння:

$$\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (3)$$

та крайовій умові:

$$v(x, y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y)\,. \qquad (4)$$

Коротко подамо відомий метод потенціалу, який в [4] проілюстрований на прикладі більш складного, ніж рівняння Лапласа, бігармонічного рівняння. Метод потенціалу ґрунтується на інтегральному представленні розв'язку рівняння, залежно від його типу. Функція щільності, як елемент ядра потенціалу визначається крайовими умовами. Задача зводиться до системи інтегральних рівнянь, а потім шляхом відповідної апроксимації до системи алгебраїчних. Перевагою методу є можливість одержати наближені розв'язки великої точності для контуру складної форми.

Зведення задачі Діріхле для рівняння Лапласа до інтегрального рівняння

Отже, нехай задана замкнута крива *Г*: $x = \xi(s),\ y = \eta(s),\ 0 \le s \le l$. Позначаємо через $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ – відстань між точкою *(ξ,η)* кривої і точкою *(x,y)*, яка не лежить на цій кривій. Візьмемо якусь неперервну функцію щільності *μ(s)* і утворимо інтеграл:

$$v(x, y) = \int_0^l \mu(s) \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = -\frac{1}{2}\int_0^l \mu(s) \cdot \ln\left((x-\xi(s))^2 + (y-\eta(s))^2\right) ds\,.$$

Цей інтеграл називається логарифмічним потенціалом простого шару щільності *μ(s)*, розповсюдженим на криву *Г*. Позначимо $K(x, y; \xi, \eta) = -\ln\left((x-\xi(s))^2 + (y-\eta(s))^2\right)$ – ядро потенціалу. Основна властивість цього потенціалу $v(x, y)$ та його ядра $K(x, y; \xi, \eta)$ полягає в тому, що вони задовольняють рівняння Лапласа.

Можна показати, що $\Delta \ln\left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

Тоді

$$\Delta v(x, y) = \Delta \int_0^l \mu(s) \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds(\xi, \eta) = \int_0^l \mu(s) \Delta \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds(\xi, \eta) = 0,$$

тому $\Delta v(x, y) = 0$.

Дослідження поведінки функції *v(x,y)* на границі, тобто в точці $(x_0, y_0) \in \Gamma$: $x_0 = \xi(s_0),\ y_0 = \eta(s_0)$ приводить до висновку: коли точка *P(x,y)* перетинає криву *Г*, то функція *v(x,y)* лишається неперервною. Розглянемо тепер задачу Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$v(x, y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$$

Це означає, що треба знайти таку функцію *v(x,y)*, щоб вона задовольняла рівнянню Лапласа, тобто була гармонічною, а на границі області Ω, кривій *Г* її значення співпадало зі значенням функції *φ(x,y)*.

Врахувавши властивості функції – логарифмічного потенціалу

$$v(x, y) = \int_0^l \mu(s)\ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\, ds(\xi, \eta)\,,$$

прирівнюємо її до *φ(x,y)* в крайових точках області, тобто

$$\int_{\Gamma} \mu(s)\, lK(x, y; \xi, \eta)\, d\Gamma(s) = \varphi(x, y)\,. \qquad (5)$$

Отримуємо інтегральне рівняння відносно невідомої функції щільності *μ(s)*, з відомими ядром $K(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$ та функцією *φ(x,y)*.

Таким чином, крайова задача для рівняння Лапласа зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Це рівняння розв'язується прямими числовими методами.

Чисельна реалізація методу

Контур *Г* розбиваємо на *n* елементарних дуг точками $(x_i, y_i), (i = 1, 2 \ldots n)$. На кожній дузі обираємо проміжну точку (xs_i, ys_i). В інтегральному рівнянні (5) замінюємо інтеграли їх наближеними значеннями, [4], тобто представляємо його у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} I_{11}\mu_1 + I_{12}\mu_2 + \ldots I_{1n}\mu_n = \varphi_1 \\ I_{21}\mu_1 + I_{22}\mu_2 + \ldots I_{2n}\mu_n = \varphi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_{n1}\mu_1 + I_{n2}\mu_2 + \ldots I_{nn}\mu_n = \varphi_n , \end{cases}$$

де μ_i − невідомі значення цільностей в деякій точці *i*-ї дуги контуру, а I_{ji} − коефіцієнти системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які обчислюються за допомогою формули Сімпсона:

$$I_{ji} = \frac{1}{6} s_i \left(\ln\frac{1}{r_{ji1}} + 4\ln\frac{1}{r_{ji2}} + \ln\frac{1}{r_{ji3}} \right),$$

s_i − довжина *i*-ї ділянки, яка обчислюється, вважаючи, що кожна така ділянка контуру апроксимується дугою кола. Нехай $r_{ji1}, r_{ji2}, r_{ji3}$ − радіуси-вектори, які поєднують серединну точку *j*-ї дуги, в якій визначається крайова умова, з трьома точками *i*-ї дуги, по якій ведеться інтегрування (рисунок 1). У разі якщо $i = j$ вважаємо $I_{jj} = s_j$, бо з практики обчислення невласних інтегралів [4]. відомо, що коли $r \to 0$, то $-\int\limits_0^s \ln r \, dr = s$.

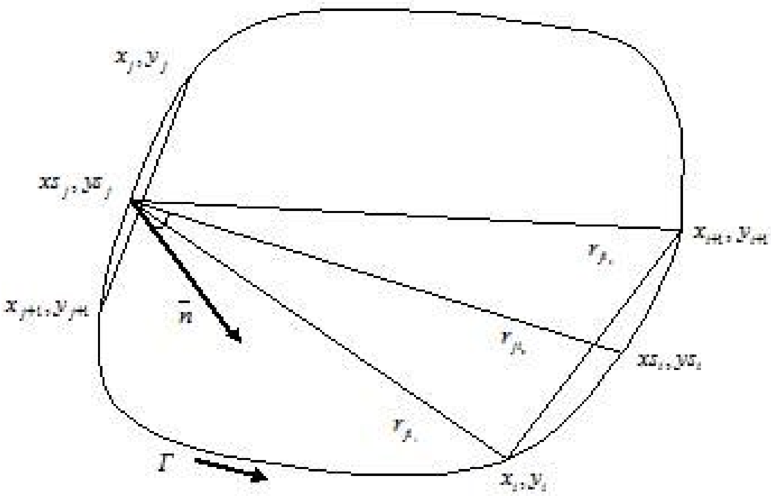

Рисунок 1 – Схема обчислення контурного інтегралу

Встановимо вірогідність обчислювальної схеми і одночасно визначимо оптимальну кількість частин розбиття контуру для одержання максимально точного розв'язку. Цю перевірку і пошук цієї кількості (числа *n*) будемо виконувати на модельній задачі, в якій контур області *Г* – коло радіуса *R*=5. Можна скористатися відомим розв'язком задачі Діріхле для рівняння Лапласа у випадку, коли границя області має форму кола. Оберемо модельну функцію $f(x, y) = x^2 - y^2$. Очевидно, що $\Delta f(x, y) = \Delta(x^2 - y^2) = 0$.

Сформулюємо тепер крайові умови, обчисливши на границі *Г* значення модельної функції $f(x, y) = x^2 - y^2$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$v(x, y)\big|_Г = f(x, y)\big|_Г$$

В силу єдиності розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа значення функції $f(x, y)$, обчислені в будь якій внутрішній точці області, повинні співпадати з розв'язком, одержаним за допомогою поданого алгоритму. Проведемо порівняння результатів при різних значеннях *n* для внутрішньої точки області з координатами $x = 3,\ y = 2$. Результати цього обчислювального експерименту представлені в таблиці 1, з якої видно, що найбільша точність розв'язку для даного контуру досягається при $n = 20$. При цьому значенні n абсолютна похибка становить $0.234237 \cdot 10^{-3}$, відносна – 0,004 %.

Таблиця 1. Результати обчислювального експерименту

n	Точний розв'язок	Отриманий розв'язок	Похибка
$n = 10$	5.0000	4.00663	0.933665E-01
$n = 20$	5.0000	5.00023	0.234237E-03
$n = 30$	5.0000	5.00465	0.465485E-02
$n = 40$	5.0000	5.00051	0.511894E-03
$n = 50$	5.0000	5.00050	0.507825E-03
$n = 60$	5.0000	5.00048	0.488488E-03
$n = 70$	5.0000	5.00046	0.465062E-03
$n = 80$	5.0000	5.00044	0.441502E-03

Розглянемо далі різні модельні функцій $\varphi(x, y)$ на контурі, який має форму еліпса, що задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a, b – велика і мала півосі еліпса відповідно (рисунок 2).

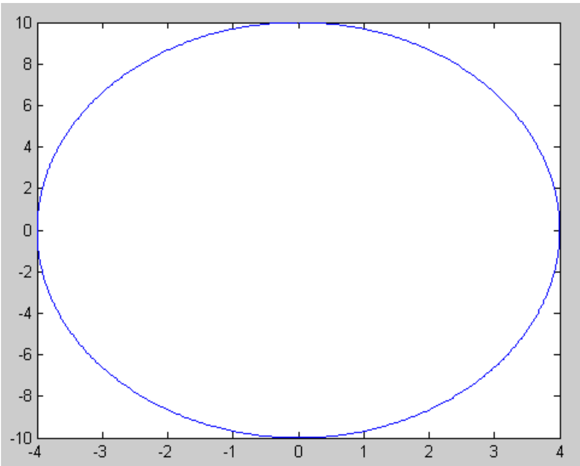

Рисунок 2 – Еліпс (a=4, b=10)

Параметри еліпса, який обмежує область будемо обирати таким чином, щоб його площа наближено відповідала площі круга, на прикладі якого ми одержали оптимальні наближені значення функції *v(x,y)*, наведені в таблиці 2.

Таблиця 2 – Результати обчислень у внутрішніх точках області

Параметри Еліпса	Модельна функція $f(x, y)$	Внутрішня точка області *(x,y)*	Точний розв'язок	Отриманий розв'язок
$a = 5, b = 7$	$f(x, y) = 10$	(2,3)	10.0000	10.0028
$a = 6, b = 4$	$f(x, y) = 3x + 2y$	(1,1)	5.00000	4.96175
$a = 4, b = 5$	$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$	(2,1)	1.50000	1.48742
$a = 5, b = 6$	$f(x, y) = 5x + 3$	(0,2)	3.00000	3.00100
$a = 7, b = 6$	$f(x, y) = 8y + 5$	(1,0)	5.00000	5.00201

Задача Діріхле для рівняння Пуассона

Повернемось до задачі (3) – (4). У відповідності з теоремою Гілберта [4] частинним розв'язком рівняння Пуассона буде функція:

$$v_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\xi,\eta)\cdot \ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\Omega(\xi,\eta)\,,$$

тобто $v_1(x,y)$ знайдена через подвійний інтеграл задовольняє рівняння (3), але не задовольняє крайовим умовам (4), тобто, $\Delta v_1 = f$.

Для того, щоб задовольнити крайовим умовам (3) – (4) формулюємо таку задачу:

$$\Delta v_2 = 0 \qquad (6)$$

$$v_2(x,y)\big|_{\Gamma} = -v_1(x,y) \qquad (7)$$

де крайову умову (7) беремо зі зворотнім знаком.

Далі задача (6) – (7) є задача Діріхде для рівняння Лапласа, і тоді розв'язком задачі (3) – (4) буде:

$$v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y)$$

або

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\xi,\eta)\cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right)d\Omega(\xi,\eta) + \int\limits_{\Gamma}\mu(s)\ln\left(\frac{1}{r}\right)d\Gamma(s),$$

де $\mu(s)$ – тепер відома функція, а (x, y) – тепер внутрішня точка області Ω.

Висновки

1. Аналіз отриманих даних свідчить про їх високу точність і обчислювальну ефективність методу потенціалу в задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

2. При обранні методу обчислень, крім точності, можна врахувати можливість розглядати складну неканонічну форму області, що часто зустрічається на практиці.

3. Метод дає практично точні результати в області механіки. Задача полягає в розповсюдженні цих ідей на складні задачі екології. Складність полягає в побудові адекватних математичних моделей та отримання на їх базі основних параметрів і розрахункових результатів, які в практичному застосуванні дадуть економічний, гуманітарний і моральний ефект.

Перелік посилань

1. Шапар А.Г. «Порядок денний на XXI століття» – сталий розвиток. А що далі? / А.Г. Шапар // Екологія і природокористування. – 2013.– Вип. 16. – С. 17– 26.
2. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К. : Наукова думка, 2005.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров – М. : Наука, 1978.
4. Мельников Ю.А. О геометрически нелинейном изгибе пластин сложного очертания / Ю.А. Мельников, В.Л. Волошко // Прикладная механика. – 1988. – №7. – С. 83–89.

Стаття надійшла до редколегії 21.07.2013 р. українською мовою.
Стаття рекомендована членом редколегії канд. техн. наук П.І. Копачем.

В.Л. ВОЛОШКО
Институт проблем природопользования и экологии НАН Украины,
г. Днепропетровск, Украина

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛА В ЗАДАЧАХ ЭКОЛОГИИ

Приведены основные уравнения и граничные задачи, которые описывают процесс распространения загрязняющей смеси и диффузии в окружающей среде. Математическая модель учитывает основные параметры процесса и достаточно адекватно его отображает. Приведен приближенный метод решения граничной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае области сложной формы. Проанализированы численные результаты.

***Ключевые слова*: интенсивность аэрозольной субстанции, функция источника загрязнения, уравнение Лапласа, граничная задача, сложный контур, оценка приближенного решения.**

V.L. VOLOSHKO
Institute for Nature Management Problems and Ecology of National Academy of Sciences of Ukraine, Dnipropetrovsk, Ukraine

SOME MATHEMATICAL ASPECTS OF USING POTENTIAL METHOD IN ECOLOGY PROBLEMS

The basic equations and boundary value problems, which describe process of polluting mixture spreading and diffusion in environment, were presented. Mathematical model took into account main process parameters and presented this process adequately enough. Approximate method for solution of Dirichlet boundary value problem for Laplace equation in case of irregular area was shown. Calculation results were analyzed.

***Keywords:* the intensity of the aerosol substance, the function of the pollution source, Laplace equation, boundary value problem, a complex path, the evaluation of the approximate solutions.**